Schaum

RETROALIMENTACIÓN Y SISTEMAS DE CONTROL

Segunda edición

DiStefano, Stubberud y Williams

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM
TEORIA Y PROBLEMAS DE

RETROALIMENTACION Y SISTEMAS DE CONTROL

Segunda Edición

JOSEPH J. DISTEFANO, III, Ph.D.
Departments of Computer Science and Medicine
University of California, Los Angeles

ALLEN R. STUBBERUD, Ph.D.
Department of Electrical and Computer Engineering
University of California, Irvine

IVAN J. WILLIAMS, Ph.D.
Space and Technology Group, TRW Inc.

Traducción
RIGOBERTO GOMEZ CRUZ
Profesor titular de la Facultad de Ciencias.
Departamento de Química de la Universidad de los Andes.

Revisión técnica
JORGE LUIS SANCHEZ TELLEZ
Ingeniero electrónico.
Jefe de la sección de técnicas digitales
del Departamento de Ingeniería Electrónica
de la Pontificia Universidad Javeriana.
Master of Science in Electrical Engineering
State University of New York at Stony Brook

McGRAW-HILL

Santafé de Bogotá, Buenos Aires, Caracas, Guatemala, Lisboa, Madrid, México, Nueva York, Panamá, San Juan, Santiago, Sao Paulo,
Auckland, Hamburgo, Londres, Milán, Montreal, Nueva Delhi, París, San Francisco, San Luis, Sidney, Singapur, Tokio, Toronto.

JOSEPH J. DISTEFANO, III recibió su grado M.S. en Sistemas de Control y su Ph.D. en Biocibernética de la Universidad de California, Los Angeles (UCLA), en 1966. Actualmente es profesor de Ciencia de la Computación y Medicina, director del Laboratorio de Investigación de Biocibernética y presidente del Programa Interdepartamental de Cibernética en la UCLA. También hace parte de los consejos editoriales de **Anales de ingeniería biomédica** (*Annals of biomedical engineering*) y de **Aplicaciones y métodos de control óptimo** (*Optimal control applications and methods*), y es editor y fundador del **Foro para la metodología de la modelación** (*Modeling methodology forum*) en las **Revistas americanas de Fisiología** (*American journals of physiology*). Es autor de más de 100 artículos y libros de investigación y está activamente involucrado con la teoría y el desarrollo de programas de aplicación de modelación de sistemas, (*software*) de igual manera en la investigación experimental sobre fisiología.

ALLEN R. STUBBERUD obtuvo el grado B.S. de la Universidad de Idaho y los grados M.S. y Ph.D. de la Universidad de California. Los Angeles (UCLA). En el momento es profesor de Ingeniería Eléctrica y de Computación en la Universidad de California, Irvine. El Dr. Stubberud es autor de más de 100 artículos y libros y pertenece a varias organizaciones profesionales y técnicas, incluyendo el Instituto Americano de Aeronáutica y Astronáutica (IAAA) (*American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA)*. Es miembro del Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos (IIEE) (*Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)* y de la Asociación Americana para el avance de la Ciencia (AAAC) (*American Association for the Advancement of Science (AAAS)*.

IVAN J. WILLIAMS obtuvo sus grados de B.S., M.S. y Ph.D. de la Universidad de California, Berkeley. Ha sido instructor en cursos de ingeniería en sistemas de control en la Universidad de California, Los Angeles (UCLA), y actualmente es director de proyecto en el Grupo del Espacio y Tecnología de la TRW, Inc.

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS. Copyright © 1992 por
McGRAW-HILL INTERAMERICANA, S.A.
Transversal 42B No. 19-77. Santafé de Bogotá, Colombia

Traducido de la segunda edición de
Schaum's Outline of Theory and Problems of
FEEDBACK AND CONTROL SYSTEMS
Copyright © MCMXC, por McGRAW-HILL, Inc.
ISBN 0-07-017047-9

Editores: Omar Farfán Bautista y Martha Edna Suárez R.
2134567890 9013456782
ISBN 958-600-101-6

Impreso en Colombia Printed in Colombia

Se imprimieron 3.500 ejemplares en el mes de julio de 1992

Impresor: Nomos Editores e Impresores.

Prefacio

Los procesos de retroalimentación abundan en la naturaleza y, durante las últimas décadas, la palabra retroalimentación, al igual que *computador*, ha encontrado su sitio en nuestro lenguaje mucho más persuasivamente que muchas otras de origen tecnológico. El marco de referencia conceptual para la teoría de la retroalimentación y de la disciplina en la que está inmerso -ingeniería de los sistemas de control- se ha desarrollado desde la Segunda Guerra Mundial. Cuando se publicó nuestra primera edición, en 1967, el tema de los sistemas de control lineales continuos en el tiempo (o *analógicos*) ya había alcanzado un alto nivel de madurez y a menudo se designaron (y aún se hace así) *control clásico* por el *conocimiento*. Este también fue el periodo del desarrollo temprano del computador digital y de los procesos y aplicaciones de control de datos discretos en el tiempo, durante el cual prevaleció la aparición de cursos y libros sobre sistema de control de "datos muestreados". Sistemas de control *digital* y controlados por computador son ahora los términos escogidos para sistemas de control en los que se incluyen computadores digitales o microprocesadores.

En esta segunda edición, como en la primera, presentamos un tratamiento conciso aunque bastante completo de los fundamentos de la teoría y las aplicaciones de la retroalimentación y los sistemas de control para ingenieros, estudiosos de las ciencias físicas, biológicas y del comportamiento, economistas, matemáticos y estudiantes de estas disciplinas. Los únicos prerrequisitos son los conocimientos básicos de cálculo y algo de física. Las herramientas matemáticas necesarias más allá del cálculo y los principios físicos y no físicos y los modelos que se utilizan en las aplicaciones, se desarrollan completamente en el texto y en numerosos problemas resueltos.

En esta nueva edición hemos actualizado el material, de varias maneras significativas. Primero que todo, hemos incluido señales, elementos y sistemas de control de datos discretos en el tiempo (digitales), a través de todo el libro, principalmente en conexión con los tratamientos de sus contrapartes continuas en el tiempo (analógicas), en lugar de presentarlos en capítulos o secciones separadas, a diferencia de la mayor parte de los otros libros de texto en que estos temas se han mantenido pedagógicamente separados. Siempre que ha sido posible, hemos integrado estos temas, en un nivel introductorio, en una exposición *unificada* de los conceptos de sistemas de control continuos en el tiempo y discretos en el tiempo. El énfasis se mantiene en los sistemas de control continuos en el tiempo y lineales, particularmente en los problemas resueltos, pero creemos que nuestra aproximación recupera mucho de la mística de las diferencias metodológicas entre los mundos de los sistemas de control analógicos y digitales. Además, hemos actualizado y modernizado la nomenclatura, introducido las representaciones de variables de estado (modelos) y las hemos utilizado en un capítulo reforzado introductorio a los sistemas de control no lineales, como también en un capítulo sustancialmente modernizado introductorio a los conceptos de sistemas de control avanzado. También hemos resuelto numerosos problemas de análisis y diseño de

sistemas de control analógicos y digitales usando programas de computador (*software*) para propósitos especiales, ilustrando el poder y la facilidad de estas nuevas herramientas.

El libro está diseñado para utilizarse como texto en un curso formal, como suplemento a otros libros de texto, como manual de referencia o de autoinstrucción. El índice, bastante completo y de formato altamente estructurado, facilitará su uso para cualquier clase de lector. Cada nuevo tópico se presenta por sección o por capítulo, y cada capítulo concluye con numerosos problemas resueltos que constan de extensiones y pruebas de la teoría y sus aplicaciones en diferentes campos.

Los Angeles, Irvine y
Redondo Beach, California
Marzo de 1990

JOSEPH J. DISTEFANO, III
ALLEN R. STUBBERUD
IVAN J. WILLIAMS

Contenido

Capítulo 1 **INTRODUCCION** **1**

1.1 Sistemas de control: qué son 1
1.2 Ejemplos de sistemas de control 2
1.3 Sistemas de control en malla abierta y en malla cerrada 3
1.4 Retroalimentación 4
1.5 Características de la retroalimentación 5
1.6 Sistemas de control analógicos y digitales 5
1.7 El problema de la ingeniería de los sistemas de control 7
1.8 Modelos o representaciones de sistemas de control 7

Capítulo 2 **TERMINOLOGIA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL** **18**

2.1 Diagramas de bloques: fundamentos 18
2.2 Diagramas de bloques de sistemas de control continuos (analógicos) con retroalimentación 19
2.3 Terminología del diagrama de bloques en malla cerrada 20
2.4 Diagramas de bloques de componentes discretos en el tiempo (datos muestreados digitales), y de sistemas controlados por computador 21
2.5 Terminología suplementaria 24
2.6 Servomecanismos 27
2.7 Reguladores 27

Capítulo 3 **ECUACIONES DIFERENCIALES, ECUACIONES DE DIFERENCIA Y SISTEMAS LINEALES** **47**

3.1 Ecuaciones de un sistema 47
3.2 Ecuaciones diferenciales y ecuaciones de diferencia 47
3.3 Ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias 48
3.4 Variabilidad e invarianza en el tiempo 49
3.5 Ecuaciones diferenciales y de diferencia lineales y no lineales 49
3.6 El operador diferencial D y la ecuación característica 50
3.7 Independencia lineal y conjuntos fundamentales 51
3.8 Solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes 53
3.9 La respuesta libre 54
3.10 La respuesta forzada 55
3.11 La respuesta total 56

3.12 Las respuestas transitoria y en estado estacionario 57
3.13 Funciones de singularidad: pasos, rampas e impulsos 57
3.14 Sistemas de segundo orden 59
3.15 Representación por variables de estado de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales 60
3.16 Solución de ecuaciones de diferencia lineales con coeficientes constantes 63
3.17 Representación por variables de estado de sistemas descritos por ecuaciones de diferencia lineales 67
3.18 Linealidad y superposición 69
3.19 Causalidad y sistemas realizables físicamente 71

Capítulo 4 LA TRANSFORMADA DE LAPLACE Y LA TRANSFORMADA *z* 92
4.1 Introducción 92
4.2 La transformada de Laplace 92
4.3 La inversa de la transformada de Laplace 93
4.4 Algunas propiedades de la transformada de Laplace y de su inversa 93
4.5 Tabla resumida de transformadas de Laplace 97
4.6 Aplicación de las transformadas de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes 98
4.7 Expansiones en fracciones parciales 103
4.8 Inversas de las transformadas utilizando expansiones en fracciones parciales 105
4.9 La transformada *z* 106
4.10 Determinación de raíces de polinomios 115
4.11 El plano complejo: diagramas de polos y ceros 118
4.12 Evaluación gráfica de residuos 120
4.13 Sistemas de segundo orden 122

Capítulo 5 ESTABILIDAD 145
5.1 Definiciones de estabilidad 145
5.2 Localización de las raíces características en sistemas continuos 145
5.3 Criterio de estabilidad de Routh 146
5.4 Criterio de estabilidad de Hurwitz 147
5.5 Criterio de estabilidad de fracciones continuas 148
5.6 Criterio de estabilidad para sistemas discretos en el tiempo 149

Capítulo 6 FUNCIONES DE TRANSFERENCIA 163
6.1 Definición de función de transferencia de un sistema continuo 163
6.2 Propiedades de la función de transferencia de un sistema continuo 164
6.3 Funciones de transferencia de compensadores y controladores de sistemas de control continuo 165
6.4 Respuesta de tiempo de sistemas continuos 166
6.5 Respuesta de frecuencia del sistema continuo 166
6.6 Funciones de transferencia, de sistemas discretos en el tiempo, compensadores y respuesta de tiempo 168
6.7 Respuesta de frecuencia de sistemas discretos en el tiempo 170
6.8 Combinación de elementos continuos y discretos en el tiempo 171

Capítulo 7 ALGEBRA DE LOS DIAGRAMAS DE BLOQUES Y FUNCIONES DE TRANSFERENCIA DE LOS SISTEMAS 198
7.1 Introducción 198
7.2 Revisión de fundamentos 198
7.3 Bloques en cascada 199
7.4 Formas canónicas de un sistema de control con retroalimentación 200
7.5 Teoremas de transformación de diagramas de bloques 201
7.6 Sistemas con retroalimentación unitaria 203
7.7 Superposición de entradas múltiples 204
7.8 Reducción de diagramas de bloques complicados 206

Capítulo 8 GRAFOS DE FLUJO DE SEÑALES 231
8.1 Introducción 231
8.2 Fundamentos de los grafos de flujo de señales 231
8.3 Algebra de los grafos de flujo de señales 232
8.4 Definiciones 234
8.5 Construcción de grafos de flujo de señales 235
8.6 La fórmula general de ganancia entrada-salida 237
8.7 Cálculo de la función de transferencia de componentes de cascada 240
8.8 Reducción de diagramas de bloques utilizando grafos de flujo de señales y la fórmula general de ganancia entrada-salida 242

Capítulo 9 MEDIDAS DE SENSITIVIDAD DE UN SISTEMA Y CLASIFICACION DE SISTEMAS CON RETROALIMENTACION 268
9.1 Introducción 268
9.2 Sensitividad de las funciones de transferencia y de las funciones de respuesta de frecuencia a los parámetros del sistema 268
9.3 Sensitividad de la salida con respecto a los parámetros para los modelos de ecuaciones diferenciales y de diferencia 275
9.4 Clasificación de los sistemas continuos con retroalimentación 277
9.5 Constantes de error de posición para sistemas continuos con retroalimentación unitaria 278
9.6 Constantes de error de velocidad para sistemas continuos con retroalimentación unitaria 279
9.7 Constantes de error de aceleración para sistemas continuos con retroalimentación unitaria 280
9.8 Constantes de error para sistemas discretos con retroalimentación unitaria 281
9.9 Tabla resumen para sistemas continuos y discretos en el tiempo, con retroalimentación unitaria 281
9.10 Constantes de error para sistemas más generales 282

Capítulo 10 ANALISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL CON RETROALIMENTACION: OBJETIVOS Y METODOS 297
10.1 Introducción 297
10.2 Objetivos del análisis 297
10.3 Métodos de análisis 297

10.4 Objetivos del diseño 298
10.5 Compensación del sistema 304
10.6 Métodos de diseño 305
10.7 La transformada w para el análisis y el diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando métodos de sistemas continuos 305
10.8 Diseño algebraico de sistemas digitales, incluyendo sistemas con transitorio mínimo 308

Capítulo 11 ANALISIS DE NYQUIST 318
11.1 Introducción 318
11.2 Representación gráfica de funciones complejas de una variable compleja 319
11.3 Definiciones 320
11.4 Propiedades de las representaciones $P(s)$ o $P(z)$ 322
11.5 Diagramas polares 324
11.6 Propiedades de los diagramas polares 325
11.7 La trayectoria de Nyquist 327
11.8 El diagrama de estabilidad de Nyquist 330
11.9 Diagramas de estabilidad de Nyquist de sistemas prácticos de control con retroalimentación 331
11.10 El criterio de estabilidad de Nyquist 336
11.11 Estabilidad relativa 338
11.12 Los círculos M y N 339

Capítulo 12 DISEÑO UTILIZANDO EL ANALISIS DE NYQUIST 384
12.1 Filosofía del diseño 384
12.2 Compensación del factor de ganancia 384
12.3 Compensación del factor de ganancia utilizando círculos M 386
12.4 Compensación por adelanto 387
12.5 Compensación por atraso 391
12.6 Compensación por atraso-adelanto 393
12.7 Otros esquemas de compensación y combinaciones de compensadores 395

Capítulo 13 ANALISIS UTILIZANDO EL LUGAR DE LAS RAICES 411
13.1 Introducción 411
13.2 Variación de los polos de un sistema en malla cerrada: el lugar de las raíces 411
13.3 Criterios de ángulo y magnitud 413
13.4 Número de lugares 414
13.5 Lugares sobre el eje real 414
13.6 Asíntotas 415
13.7 Puntos de separación 415
13.8 Angulos de salida y de llegada 416
13.9 Construcción del lugar de las raíces 418
13.10 La función de transferencia en malla cerrada y la respuesta en el dominio del tiempo 420

13.11 Márgenes de ganancia y de fase a partir del lugar de las raíces 422
13.12 Relación de amortiguación a partir del lugar de las raíces para sistemas continuos 424

Capítulo 14 DISEÑO UTILIZANDO EL LUGAR DE LAS RAICES 443
14.1 El problema de diseño 443
14.2 Compensación por cancelación 444
14.3 Compensación de fase: redes de adelanto y de atraso 445
14.4 Compensación de magnitud y combinaciones de compensadores 446
14.5 Aproximaciones por polos-ceros dominantes 449
14.6 Diseño puntual 454
14.7 Compensación por retroalimentación 456

Capítulo 15 ANALISIS DE BODE 471
15.1 Introducción 471
15.2 Escalas logarítmicas y diagramas de Bode 471
15.3 La forma de Bode y la ganancia de Bode para sistemas continuos en el tiempo 472
15.4 Diagramas de Bode de funciones de respuesta de frecuencia sencillas continuas en el tiempo y sus aproximaciones asintóticas 472
15.5 Construcción de diagramas de Bode para sistemas continuos en el tiempo 480
15.6 Diagramas de Bode de funciones de respuesta de frecuencia discretas en el tiempo 483
15.7 Estabilidad relativa 484
15.8 Respuesta de frecuencia en malla cerrada 486
15.9 Análisis de Bode de sistemas discretos en el tiempo utilizando la transferencia w 487

Capítulo 16 DISEÑO UTILIZANDO EL ANALISIS DE BODE 499
16.1 Filosofía del diseño 499
16.2 Compensación del factor de ganancia 499
16.3 Compensación por adelanto para sistemas continuos en el tiempo 501
16.4 Compensación por atraso para sistemas continuos en el tiempo 505
16.5 Compensación por atraso-adelanto para sistemas continuos en el tiempo 507
16.6 Diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando el análisis de Bode 509

Capítulo 17 ANALISIS DE LOS DIAGRAMAS DE NICHOLS 529
17.1 Introducción 529
17.2 Diagramas de magnitud en dB -ángulo de fase 529
17.3 Construcción de diagramas de magnitud en dB Angulo de fase 530
17.4 Estabilidad relativa 535
17.5 La carta de Nichols 537
17.6 Funciones de respuesta de frecuencia en malla cerrada 539

Capítulo 18 **DISEÑO UTILIZANDO EL ANALISIS DE LOS DIAGRAMAS DE NICHOLS** **556**
18.1 Filosofía del diseño 556
18.2 Compensación del factor de ganancia 556
18.3 Compensación del factor de ganancia utilizando curvas de amplitud constante ... 557
18.4 Compensación por adelanto en sistemas continuos en el tiempo 558
18.5 Compensación por atraso en sistemas continuos en el tiempo 562
18.6 Compensación por atraso-adelanto 564
18.7 Diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando las cartas de Nichols 568

Capítulo 19 **INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL NO LINEALES 581**
19.1 Introducción 581
19.2 Aproximaciones linealizadas y linealizadas por tramos de sistemas no lineales ... 582
19.3 Métodos del plano de fase 588
19.4 Criterio de estabilidad de Lyapunov 594
19.5 Métodos de respuesta de frecuencia 597

Capítulo 20 **INTRODUCCION A TEMAS AVANZADOS EN EL ANALISIS Y EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL 614**
20.1 Introducción 614
20.2 Controlabilidad y observabilidad 614
20.3 Diseño en el dominio del tiempo de sistemas con retroalimentación (retroalimentación de estados) 616
20.4 Sistemas de control con entradas aleatorias 618
20.5 Sistemas de control óptimo 619
20.6 Sistemas de control adaptable 620

APENDICE A
Algunos pares de transformadas de Laplace útiles para el análisis de sistemas de control 622

APENDICE B
Algunos pares de transformadas *z* útiles para el análisis de sistemas de control 625

BIBLIOGRAFIA Y REFERENCIAS 627
INDICE 629

Capítulo 1

Introducción

1.1 Sistemas de control: qué son

El uso moderno de la palabra *sistema* tiene muchos significados. Así que comencemos por definir lo que queremos decir cuando la utilicemos en este libro; primero, en forma abstracta y luego, de manera más específica, en relación con la literatura científica.

***Definición 1.1a*:** Un **sistema** es un conjunto, arreglo o colección de cosas unidas o relacionadas de tal manera que forman una entidad o un todo.

***Definición 1.1b*:** Un **sistema** es un ordenamiento de componentes físicos, unidos o relacionados de tal manera que forman y/o actúan como una unidad completa.

La palabra **control** usualmente se toma en el sentido de *regular, dirigir* o *mandar*. Combinando las definiciones anteriores, tenemos

***Definición 1.2*:** Un **sistema de control** es un ordenamiento de componentes físicos unidos o relacionados de tal manera que mandan, dirigen o regulan al mismo sistema o a otro.

En el sentido más abstracto, es posible considerar todo sistema físico como un sistema de control. Todo altera su entorno de alguna manera, si no activa, entonces pasivamente, como un espejo que *dirige* un rayo de luz que lo ilumina en un ángulo agudo. El espejo (figura 1-1) se puede considerar como un sistema de control elemental, ya que controla el rayo de luz de acuerdo con la ecuación simple de "el ángulo de reflexión α es igual al ángulo de incidencia α".

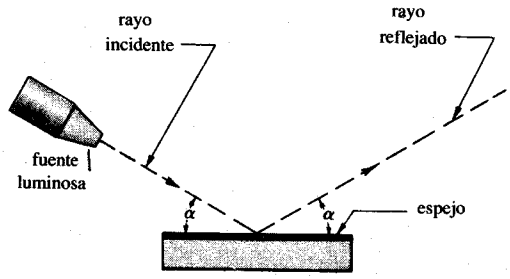


Figura 1-1

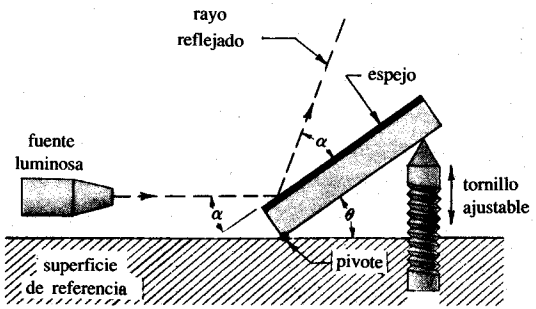


Figura 1-2

En ciencias e ingeniería usualmente restringimos el significado de sistemas de control para aplicarlo a aquellos sistemas cuya función principal es mandar, dirigir o regular *dinámica* o *activamente*. El sistema que se muestra en la figura 1-2, que consta de un espejo fijo en uno de sus extremos, y que puede ajustarse hacia arriba o hacia abajo mediante un tornillo en su otro extremo, adecuadamente se denomina *sistema de control*. El ángulo de la luz reflejada se regula mediante el tornillo.

Sin embargo, es importante notar que los sistemas de control de interés para propósitos de análisis o de diseño incluyen no sólo aquellos que son fabricados, sino también los que existen en la naturaleza, y los sistemas de control con componentes fabricados y naturales.

1.2 Ejemplos de sistemas de control

En nuestro ambiente abundan los sistemas de control. Pero antes de dar los ejemplos, definamos dos términos: *entrada* y *salida*, los cuales nos ayudarán a identificar, delinear o definir un sistema de control.

Definición 1.3: La **entrada** es el estímulo, la excitación o el mandato aplicado a un sistema de control, generalmente desde una fuente externa de energía, usualmente para producir una respuesta específica *del* sistema de control.

Definición 1.4: La **salida** es la respuesta real que se obtiene de un sistema de control. Puede ser o no igual a la respuesta implícita especificada por la entrada.

Las entradas y las salidas pueden tener muchas formas diferentes. Las entradas, por ejemplo, pueden ser variables físicas o cantidades más abstractas, tales como valores de *referencia*, de *ajuste* o *deseados* para la salida del sistema de control.

Usualmente, el propósito del sistema de control es identificar o definir la entrada y la salida. Si se dan la entrada y la salida, es posible identificar, delinear o definir la naturaleza de los componentes del sistema.

Los sistemas de control pueden tener más de una entrada o de una salida. A menudo, todas las entradas y salidas están bien definidas en la descripción del sistema. Pero algunas veces no. Por ejemplo, una tormenta eléctrica puede interferir intermitentemente con la recepción de radio, produciendo una salida no deseada en el altoparlante, en forma de estática. Esta salida de "ruido" es parte de la salida total que se definió antes, pero para los propósitos de identificar un sistema, normalmente no se consideran como entradas y salidas en la descripción del mismo, aquellas entradas espurias que producen salidas indeseables. Sin embargo, usualmente es necesario considerar cuidadosamente esas entradas y salidas extras cuando se examina en detalle el sistema.

Los términos entrada y salida también pueden utilizarse en la descripción de cualquier tipo de sistema, sea o no un sistema de control, y un sistema de control puede ser parte de otro mayor, en cuyo caso se llama **subsistema** o **subsistema de control**, y sus entradas y salidas pueden ser variables internas del sistema mayor.

EJEMPLO 1.1. Un *interruptor eléctrico* es un sistema de control fabricado, que controla el flujo de electricidad. Por definición, el aparato o la persona que mueve el interruptor no hacen parte de este sistema de control.

El movimiento del interruptor a la posición de encendido o de apagado se puede considerar como la entrada. Es decir, la entrada puede estar en uno de los dos estados, el encendido o el apagado. La salida es el flujo o el no flujo (dos estados) de electricidad.

El interruptor eléctrico es uno de los sistemas de control más rudimentarios.

EJEMPLO 1.2. Un *calentador u horno controlado termostáticamente que regula de manera automática la temperatura de un cuarto o un recinto* es un sistema de control. La entrada a este sistema es una temperatura de referencia, usualmente especificada mediante un termostato ajustado apropiadamente. La salida es la temperatura real del cuarto o del recinto.

Cuando el termostato detecta que la salida es menor que la entrada, el horno proporciona calor hasta que la temperatura del recinto se hace igual a la de la entrada de referencia. Entonces el horno se apaga automáticamente. Cuando la temperatura desciende un poco por debajo de la temperatura de referencia, el horno se enciende de nuevo.

EJEMPLO 1.3. El acto aparentemente simple, de *señalar un objeto con el dedo* requiere un sistema de control biológico, el cual consiste, primordialmente, de los ojos, el brazo, la mano y el dedo, y el cerebro. La entrada es la dirección precisa del objeto (en movimiento o no) respecto de alguna referencia, y la salida es la dirección real señalada en relación con la misma referencia.

EJEMPLO 1.4. Una parte del sistema humano de control de temperatura es el *sistema de transpiración*. Cuando la temperatura del aire exterior a la piel se hace demasiado alta, las glándulas sudoríparas secretan copiosamente, induciendo un enfriamiento en la piel mediante la evaporación. Las secreciones se reducen cuando se logra el efecto refrescante deseado o cuando la temperatura del aire se reduce lo suficiente.

La entrada en este sistema puede ser la temperatura "normal" o confortable de la piel, un "punto de referencia", o la temperatura del aire, una variable física. La salida es la temperatura real de la piel.

EJEMPLO 1.5. El sistema de control que consiste en *una persona que conduce un automóvil* tiene componentes fabricados y componentes biológicos. El conductor quiere mantener el automóvil en la calzada correcta de la carretera. El logra esto mirando constantemente la dirección del automóvil con respecto a la dirección del camino. En este caso, la dirección o el curso del camino, representado por la línea o líneas de guía trazadas a los lados de la calzada se pueden considerar como la entrada. El curso del automóvil es la salida del sistema. El conductor controla esta salida constantemente, midiéndola con sus ojos y su cerebro, y corrigiéndola con sus manos sobre el volante. Los componentes principales de este sistema de control son las manos, los ojos y el cerebro del conductor, y el vehículo.

1.3 Sistemas de control en malla abierta y en malla cerrada

Los sistemas de control se clasifican en dos categorías: sistemas en *malla abierta* y en *malla cerrada*. La distinción se determina mediante la **acción de control**, esa cantidad responsable de activar el sistema para producir la salida.

El término *acción de control* es muy empleado en la literatura de sistemas de control; sin embargo, la palabra *acción* en esta expresión no siempre implica *directamente* cambio, movimiento o actividad. Por ejemplo, la acción de control en un sistema diseñado para hacer que un objeto dé en un blanco, usualmente es la *distancia* entre el objeto y el blanco. La distancia, como tal, no es una acción, pero aquí está implícita una acción (movimiento) porque la meta de tal sistema de control es reducir la distancia a cero.

Definición 1.5: Un sistema de control en **malla abierta** es aquel en el cual la acción de control es independiente de la salida.

Definición 1.6: Un sistema de control en **malla cerrada** es aquel en el cual la acción de control depende, de alguna manera, de la salida.

Dos características destacadas de los sistemas de control en malla abierta son:

1. Su capacidad de desempeño con exactitud está determinada por su calibración. **Calibrar** significa establecer o reestablecer la relación entrada-salida para obtener una exactitud deseada del sistema.
2. Usualmente no presentan problemas de *inestabilidad*, concepto que se tratará en detalle a continuación.

Los sistemas de control en malla cerrada, más comúnmente se llaman sistemas de control *retroalimentados*; éstos se tratarán de manera más detallada al comienzo de la siguiente sección.

Para clasificar un sistema de control en malla abierta o en malla cerrada, debemos distinguir claramente entre los componentes del sistema y los componentes que interactúan con él, pero que no hacen parte del sistema. V. gr., en el ejemplo 1.5 el conductor se definió como parte del sistema de control, pero un operador humano puede ser componente de un sistema, o no serlo.

EJEMPLO 1.6. La mayor parte de las *tostadoras automáticas* son sistemas en malla abierta porque están controladas por un temporizador. El tiempo que se requiere para hacer una "buena tostada" debe ser calculado por el usuario, quien no hace parte del sistema. El control sobre la calidad del tostado (la salida) se retira una vez que el tiempo, que es la entrada y la acción de control, se ha determinado. Normalmente, el tiempo se ajusta mediante un disco o un interruptor calibrado.

EJEMPLO 1.7. Un *mecanismo de piloto automático y el avión que éste controla* son un sistema de control en malla cerrada (retroalimentado). Su propósito es mantener una dirección específica del avión, a pesar de los cambios atmosféricos. Realiza esta tarea midiendo continuamente la dirección real del avión y ajustando de manera automática los mecanismos de control del avión (timón, alerones, etc.) de tal modo que logra una correspondencia entre la dirección real del avión y la dirección especificada. El piloto humano o el operador que programa el piloto automático no hacen parte del sistema de control.

1.4 Retroalimentación

La retroalimentación es la característica de los sistemas de control en malla cerrada que los distingue de los sistemas en malla abierta.

Definición 1.7: **Retroalimentación** es aquella propiedad de un sistema en malla cerrada que permite que la salida (o alguna otra variable controlada) se compare con la entrada del sistema (o una entrada de algún otro componente o subsistema situado internamente) de tal manera que la acción de control apropiada se puede formar como alguna función de la entrada y la salida.

De modo más general, se dice que hay retroalimentación en un sistema cuando existe una secuencia *cerrada* de relaciones de causa y efecto entre las variables del sistema.

EJEMPLO 1.8. El mecanismo de piloto automático del ejemplo 1.7 ilustra claramente el concepto de retroalimentación. La entrada es la dirección especificada, la cual se puede ajustar con un marcador u otro instrumento en el tablero de control del avión, y la salida es la dirección real, la cual se determina mediante los instrumentos de navegación automática. Un dispositivo de comparación supervisa continuamente la entrada y la salida. Cuando hay correspondencia entre las dos, no se requiere ninguna acción de control. Cuando existe una diferencia entre la entrada y la salida, el dispositivo de comparación envía una señal de acción de control al controlador, el mecanismo de piloto automático. El controlador suministra las señales apropiadas a los mecanismos de control del avión para reducir la diferencia entrada-salida. La retroalimentación se puede efectuar mediante conexiones eléctricas o mecánicas de los instrumentos de navegación, que determinan la dirección, al dispositivo de comparación. En la práctica, el dispositivo de comparación puede integrarse dentro del dispositivo del piloto automático.

1.5 Características de la retroalimentación

La presencia de retroalimentación típicamente imparte las siguientes propiedades al sistema.

1. Exactitud aumentada. Por ejemplo, la habilidad de reproducir fielmente la entrada. Esta propiedad se ilustra a través de todo el texto.
2. Tendencia hacia la oscilación o la inestabilidad. Esta característica tan importante se considera detalladamente en los Capítulos 5 y 9 al 19.
3. Sensitividad reducida de la razón salida a entrada frente a las variaciones en los parámetros del sistema y en otras características (Capítulo 9).
4. Efectos reducidos de las no linealidades (Capítulos 3 y 19).
5. Efectos reducidos de las distorsiones externas o ruido (Capítulos 7, 9 y 10).
6. Ancho de banda aumentado. El **ancho de banda** de un sistema es una medida de la respuesta de frecuencia de qué tan bien responde (o filtra) el sistema a las variaciones (o frecuencias) de la señal de entrada (Capítulos 6, 10, 12 y 15 al 18).

1.6 Sistemas de control analógicos y digitales

Las señales en un sistema de control, por ejemplo, las formas de onda de entrada y salida, son funciones de alguna variable independiente, usualmente el tiempo, denotada por t.

Definición 1.8: Una señal dependiente de un *continuum* de valores de la variable independiente t se llama señal **continua en el tiempo** o, más generalmente, señal de **datos continuos** o (con menor frecuencia) señal **analógica.**

Definición 1.9: Una señal definida o de interés solamente en los instantes discretos (diferentes) de la variable independiente t (de la cual depende) se llama señal **discreta en el tiempo**, de **datos discretos**, de **datos muestreados** o **digital.**

Destacamos que *digital* es un término un poco más especializado, particularmente en otros contextos. Lo usamos aquí como sinónimo porque ésta es la convención en la literatura de los sistemas de control.

EJEMPLO 1.9. El voltaje continuo que varía sinusoidalmente $v(t)$ o la corriente alterna $i(t)$, disponible en un tomacorriente eléctrico común es una señal continua en el tiempo (analógica) porque está definida *en cada uno y en todos los instantes* de tiempo t que la energía eléctrica está disponible en esa toma.

EJEMPLO 1.10. Si se conecta una lámpara al tomacorriente del ejemplo 1.9, y si se enciende y luego se apaga inmediatamente cada minuto, la luz de la lámpara es una señal discreta en el tiempo, la cual sólo está encendida un instante cada minuto.

EJEMPLO 1.11. La temperatura media T en una habitación, precisamente a las 8 a.m. (08 horas) de cada día, es una señal discreta en el tiempo. Esta señal se puede indicar de varias maneras, dependiendo de la aplicación; por ejemplo, $T(8)$ para la temperatura a las 8 en punto –y no a otra hora–; $T(1)$, $T(2)$, ... para la temperatura a las 8 en punto de la mañana del día 1, el día 2, etc., o de modo equivalente, utilizando una notación con subíndices, T_1, T_2, etc. Note que estas señales discretas en el tiempo son valores *muestreados* de una señal continua en el tiempo, la temperatura media del cuarto en todas las horas, indicada por $T(t)$.

EJEMPLO 1.12. Las señales dentro de los computadores digitales y los microprocesadores son inherentemente señales discretas en el tiempo, de datos discretos o digitales (o codificadas de manera digital). En su nivel más básico, a menudo se encuentran en forma de secuencias de voltajes, corrientes, intensidades de luz u otras variables físicas, en uno de dos niveles constantes, por ejemplo, ± 15 V; luz encendida, luz apagada; etc. Usualmente estas *señales binarias* se representan en forma alfanumérica (números, letras u otros caracteres) en las entradas y salidas de tales dispositivos digitales. De otra parte, las señales de computadores analógicos y de otros dispositivos analógicos son continuas en el tiempo.

Los sistemas de control se pueden clasificar según los tipos de señales que procesan: continuos en el tiempo (analógicos), discretos en el tiempo (digitales), o la combinación de ambos (híbridos).

***Definición 1.10*:** Los **sistemas de control continuos en el tiempo,** llamados también **sistemas de control de datos continuos** o **sistemas de control analógicos**, contienen o procesan únicamente señales y componentes continuos en el tiempo (analógicos).

***Definición 1.11*:** Los **sistemas de control discretos en el tiempo**, llamados también **sistemas de control de datos discretos** o **sistemas de control de datos muestreados**, tienen señales o componentes discretos en el tiempo en uno o más puntos del sistema.

Anotamos que los sistemas de control discretos en el tiempo pueden tener señales continuas en el tiempo y señales discretas en el tiempo; es decir, pueden ser híbridos. El factor distintivo es que el sistema de control discreto en el tiempo, o digital, *debe* incluir por lo menos una señal de datos discretos. Así mismo, los sistemas de control digital, particularmente los del tipo de datos muestreados, a menudo tienen modos de operación en malla abierta y en malla cerrada.

EJEMPLO 1.13. Un sistema de rastreo y seguimiento de un blanco, como el que se describió en el ejemplo 1.3 (rastreo y señalamiento de un objeto con el dedo), usualmente se considera sistema de control analógico o continuo en el tiempo, porque la distancia entre el "rastreador" (el dedo) y el blanco es una función continua en el tiempo, y el objetivo de tal sistema de control es seguir *continuamente* el blanco. El sistema que consiste en una persona que conduce un automóvil (ejemplo 1.5) se considera de la misma categoría. Sin embargo, de manera estricta, los sistemas de rastreo, tanto naturales como fabricados pueden tener señales o componentes digitales. Por ejemplo, en modelos más detallados que incluyen el cerebro, las señales de control del cerebro se tratan a menudo como "pulsatorias" o de datos discretos en el tiempo, y los computadores digitales o los microprocesadores han remplazado muchos de los componentes analógicos en los sistemas de control de los vehículos y en los mecanismos de rastreo.

EJEMPLO 1.14. Una mirada más de cerca al sistema de calefacción controlado termostáticamente, el cual aparece en el ejemplo 1.2, nos indica que es un sistema de control de datos muestreados, con señales y componentes digitales y analógicos. Si la temperatura deseada del recinto es, por ejemplo, de 22°C en el termostato y desciende por debajo de 21°C, el sistema conmutador del termostato cierra el circuito del calentador (un dispositivo analógico) y lo enciende hasta que alcance, digamos, 23°C. Entonces el sistema conmutador automáticamente apaga el calentador hasta que la temperatura del recinto descienda de nuevo por debajo de 21°C. En realidad, este sistema de control está operando en malla abierta entre los instantes de encendido y de apagado del calentador, pero la operación completa se considera en malla cerrada. El termostato recibe como entrada una señal continua en el tiempo, la temperatura real del recinto, y entrega como salida una señal discreta en el tiempo (binaria) de conmutación, la cual enciende y apaga el calentador. La temperatura real del recinto varía así de manera continua entre los 21°C y los 23°C, y la *media* se controla alrededor de los 22°C, el valor de referencia en el termostato.

Los términos discreto en el tiempo y de datos discretos de datos muestreados y continuo en el tiempo y de datos continuos, a menudo se abrevian como *discreto, muestreado* y *continuo* en lo que resta del libro, dondequiera que su significado no sea ambiguo. También se utilizan *digital* o *analógico* en lugar de discreto (muestreado) o continuo donde sea apropiado y cuando el significado resulte claro del contexto.

1.7 El problema de la ingeniería de los sistemas de control

La ingeniería de los sistemas de control consiste en el *análisis* y el *diseño* de las configuraciones de los sistemas de control.

El **análisis** es la investigación de las propiedades de un sistema existente. El **diseño** es la elección y el ordenamiento de los componentes del sistema para desempeñar una tarea específica.

Existen dos métodos para el diseño:

1. Diseño por análisis
2. Diseño por síntesis

El **diseño por análisis** se efectúa al modificar las características de la configuración de un sistema existente o estándar, y el **diseño por síntesis**, al definir la forma del sistema directamente de sus especificaciones.

1.8 Modelos o representaciones de sistemas de control

Para resolver un problema de sistemas de control, debemos especificar o describir la configuración del sistema y sus componentes de una forma que facilite el análisis o el diseño.

En el estudio de sistemas de control se usan extensamente tres representaciones básicas (modelos) de los sistemas y sus componentes:

1. Modelos matemáticos en forma de ecuaciones diferenciales, ecuaciones de diferencia y/u otras relaciones matemáticas, por ejemplo, la transformada de Laplace y la transformada z
2. Diagramas de bloques
3. Grafos de flujo de señales

En los Capítulos 3 y 4 se desarrollan los modelos matemáticos de los sistemas de control. Los diagramas de bloques y los grafos de flujo de señales son las representaciones gráficas abreviadas, del diagrama esquemático de un sistema o del conjunto de ecuaciones matemáticas que caracterizan sus partes. En los Capítulos 2 y 7 se consideran en detalle los diagramas de bloques, y en el Capítulo 8, los grafos de flujo de señales.

Los modelos matemáticos son necesarios cuando se requieren relaciones cuantitativas, por ejemplo, para representar el comportamiento detallado de la salida de un sistema con retroalimentación a una entrada dada. El desarrollo de modelos matemáticos usualmente se basa en los principios de las ciencias físicas, biológicas, sociales, o de la información, dependiendo del área de aplicación del sistema de control, y la complejidad de tales modelos varía de manera amplia. Los modelos llamados *sistemas lineales* han encontrado notable aplicación en la ciencia de los sistemas de control. En la literatura de las matemáticas aplicadas y la ingeniería se encuentran bien establecidas y documentadas las técnicas para resolver sistemas lineales, y el principal objetivo de este libro son los sistemas de control lineales retroalimentados, su análisis y su diseño. Se hace énfasis en los sistemas continuos en el tiempo (continuos, analógicos), pero también se desarrollan técnicas para los sistemas discretos en el tiempo (discretos, digitales) a lo largo del texto, de una manera unificada aunque no exhaustiva. El tema del Capítulo 19 son las técnicas para el análisis y el diseño de sistemas de control *no lineales*, a manera de introducción a este tema más complejo.

Para comunicarse con tantos lectores como sea posible, el material en este libro se desarrolla desde los principios básicos de las ciencias y las matemáticas aplicadas, y en los ejemplos y en los problemas resueltos al final de cada capítulo se presentan aplicaciones específicas en la ingeniería y en otras disciplinas.

Problemas resueltos

Entrada y salida

1.1. Identifique la entrada y la salida del espejo ajustable de la figura 1-2.

La entrada es el ángulo de inclinación θ del espejo, el cual se varía girando el tornillo. La salida es la posición angular $\theta + \alpha$ del rayo reflejado con respecto a la superficie de referencia.

1.2. Identifique una entrada y una salida posibles para un generador rotacional de electricidad.

La entrada puede ser la velocidad rotacional del motor primario (por ejemplo, una turbina de vapor), en revoluciones por minuto. Suponiendo que el generador no tiene conectada una carga a sus terminales de salida, ésta puede ser el voltaje inducido en los terminales de salida.

Alternativamente, la entrada se puede expresar como el momento angular del eje del motor primario, y la salida como unidades de potencia eléctrica (vatios) con una carga conectada al generador.

1.3. Identifique la entrada y la salida de una máquina lavadora automática.

Muchas máquinas lavadoras operan de la siguiente manera: después que la ropa se ha colocado en la máquina, se agregan el jabón o detergente, el blanqueador y el agua, en cantidades apropiadas. El tiempo del ciclo de lavado y exprimido se ajusta en un temporizador, y luego se enciende la lavadora. Cuando el ciclo se completa, la máquina se apaga por sí misma.

Si las cantidades apropiadas de detergente, blanqueador y agua, y la temperatura del agua están predeterminadas o especificadas por el fabricante de la máquina, o son suministradas automáticamente por la misma máquina, entonces la entrada es el tiempo (en minutos) para el ciclo de lavado y exprimido. Lo usual es que el temporizador lo ajuste una persona.

La salida en una máquina lavadora es más difícil de identificar. Definamos *limpio* como la ausencia de sustancias extrañas en la ropa que se va a lavar. Entonces podemos identificar la salida como el porcentaje de limpieza. Al comienzo del ciclo la salida es menor que el 100%, y al final del mismo la salida ideal es igual al 100% (no siempre se obtiene la ropa *limpia*).

Para la mayor parte de las máquinas que operan con monedas, el tiempo del ciclo está predeterminado, y la máquina comienza a operar cuando se introduce la moneda. En este caso, el porcentaje de limpieza se puede controlar ajustando las cantidades de detergente, blanqueador y agua, y la temperatura del agua. Podemos considerar que todas estas cantidades son las entradas.

También son posibles otras combinaciones de entradas y salidas.

1.4. Identifique los componentes órgano-sistemas, la entrada y la salida, y describa la operación del sistema de control biológico que consiste en un ser humano que alcanza un objeto.

Los componentes básicos de la descripción de este sistema de control, simplificado intencionalmente, son el cerebro, el brazo, la mano y los ojos.

El cerebro envía la señal requerida al sistema nervioso central para que el brazo y la mano alcancen el objeto. Esta señal se amplifica en los músculos del brazo y de la mano, los cuales sirven de ejecutores de la fuerza para el sistema. Los ojos se emplean como dispositivos sensores que continuamente "retroalimentan" al cerebro la posición de la mano.

La posición de la mano es la salida en el sistema. La entrada es la posición del objeto.

El objetivo del sistema de control es reducir a cero la distancia entre la posición de la mano y la posición del objeto. La figura 1-3 es un diagrama esquemático. Las líneas punteadas y las flechas representan la dirección del flujo de la información.

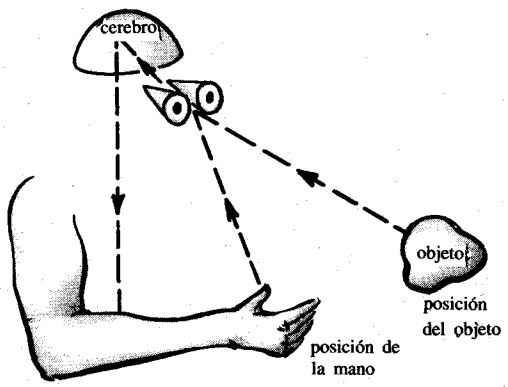


Figura 1-3

Sistemas en malla abierta y en malla cerrada

1.5. Explique cómo podría operar una máquina lavadora automática en malla cerrada.

Se supone que todas las cantidades descritas como entradas posibles, en el problema 1.3, a saber, tiempo del ciclo, volumen de agua, temperatura del agua, cantidad de detergente y de blanqueador, se pueden ajustar mediante dispositivos como válvulas y calentadores.

Una lavadora automática en malla cerrada podría medir de manera continua o periódica el porcentaje de limpieza (salida) de las prendas que se están lavando, ajustar adecuadamente las cantidades de entrada y apagarse sola cuando se alcance la limpieza del 100%.

1.6. ¿Cómo se calibran los siguientes sistemas en malla abierta: *a*) una lavadora automática, *b*) una tostadora automática y *c*) un voltímetro?

a) Las lavadoras automáticas se calibran estimando cualquier combinación de las siguientes cantidades de entrada: 1) cantidad de detergente, 2) cantidad de blanqueador u otros aditivos, 3) cantidad de agua, 4) temperatura del agua, 5) tiempo del ciclo.

En algunas lavadoras se predeterminan una o más de estas entradas. Las cantidades restantes las debe estimar el usuario, las cuales dependen de factores tales como el grado de dureza del agua, la clase de detergente, y la clase y el poder del blanqueador o de otros aditivos. Una vez que esta calibración se ha determinado para un tipo específico de lavada (por ejemplo, ropa blanca, ropa muy sucia), normalmente no tiene que determinarse de nuevo durante el tiempo de vida útil de la máquina. Si ésta sufre una avería y se le instalan piezas de repuesto, puede ser necesaria una recalibración.

b) Aunque el disco del temporizador de la mayor parte de las tostadoras automáticas es calibrado por el fabricante (por ejemplo, bajo-medio-alto), la cantidad de calor producida por el elemento calefactor puede variar sobre un rango muy amplio. Además, la eficiencia del elemento calefactor normalmente se deteriora con el tiempo. En consecuencia, la cantidad de tiempo requerido para un "buen tostado" debe ser estimada por el usuario; a menudo este ajuste debe revisarse en forma periódica. Al principio, la tostada está demasiado clara o demasiado oscura. Después de varios estimativos sucesivamente diferentes, se obtiene el tiempo de tostado requerido para la calidad de tostada deseada.

c) En general, un voltímetro se calibra comparándolo con una fuente estándar de voltaje conocido y marcando apropiadamente la escala de lectura en los intervalos especificados.

1.7. Identifique la acción de control en los sistemas de los problemas 1.1, 1.2 y 1.4.

Para el sistema del espejo señalado en el problema 1.1, la acción de control es igual a la entrada, es decir, el ángulo de inclinación θ del espejo. Para el generador especificado en el problema 1.2, la acción de control es igual a la entrada, esto es, la velocidad rotacional o el momento angular del eje del motor primario. En el problema 1.4 la acción de control del sistema de aproximación del ser humano es igual a la distancia entre la mano y la posición del objeto.

1.8. ¿Cuáles de los sistemas de control de los problemas 1.1, 1.2 y 1.4 son en malla abierta? ¿Cuáles son en malla cerrada?

Puesto que la acción de control es igual a la entrada en los sistemas de los problemas 1.1 y 1.2, no existe retroalimentación, y los sistemas son en malla abierta. El sistema de aproximación del ser humano del problema 1.4 es en malla cerrada porque la acción de control depende de la salida, esto es, la posición de la mano.

1.9. Identifique la acción de control en los ejemplos 1.1 al 1.5.

La acción de control para el interruptor eléctrico del ejemplo 1.1 es igual a la entrada, es decir, la orden de encender o de apagar. La acción de control para el sistema calefactor del ejemplo 1.2 es igual a la diferencia entre la temperatura de referencia y la temperatura del cuarto. Para el sistema de señalamiento con el dedo del ejemplo 1.3, la acción de control es igual a la diferencia entre la dirección real del objeto y la dirección señalada. En el sistema de transpiración del ejemplo 1.4, la acción de control es igual a la diferencia entre la temperatura "normal" y la temperatura real de la superficie de la piel. En el ejemplo 1.5, la diferencia entre la dirección de la carretera y la dirección del automóvil es la acción de control para el sistema de una persona que conduce un automóvil.

1.10. ¿Cuáles de los sistemas de control de los ejemplos 1.1 al 1.5 son en malla abierta? ¿Cuáles son en malla cerrada?

El interruptor eléctrico del ejemplo 1.1 es en malla abierta porque la acción de control es igual a la entrada y, por tanto, independiente de la salida. Para los restantes ejemplos del 1.2 al 1.5, la acción de control es claramente una función de la salida. En consecuencia, son sistemas en malla cerrada.

Retroalimentación

1.11. Considere la red divisora de voltaje de la figura 1-4. La salida es v_2, y la entrada es v_1.

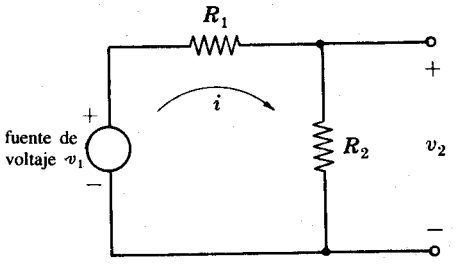


Figura 1-4

a) Escriba una ecuación para v_2 en función de v_1, R_1 y R_2. Es decir, escriba una ecuación para v_2 que corresponda a un sistema en malla abierta.

b) Escriba una ecuación para v_2 en forma de malla cerrada, es decir, v_2 en función de v_1, v_2, R_1 y R_2.

Este problema ilustra cómo una red pasiva se puede caracterizar como un sistema en malla abierta o en malla cerrada.

a) A partir de la ley de Ohm y de las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff, tenemos

$$v_2 = R_2 i \qquad i = \frac{v_1}{R_1 + R_2}$$

Luego
$$v_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) v_1 = f(v_1, R_1, R_2)$$

b) Expresando la corriente i en una forma algo diferente, tenemos $i = (v_1 - v_2)/R_1$. Por tanto

$$v_2 = R_2\left(\frac{v_1 - v_2}{R_1}\right) = \left(\frac{R_2}{R_1}\right) v_1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right) v_2 = f(v_1, v_2, R_1, R_2)$$

1.12. Explique cómo el concepto económico clásico conocido como la ley de la oferta y la demanda se puede interpretar como un sistema de control con retroalimentación. Escoja como salida del sistema el precio del mercado (precio de venta) de un ítem en particular, y suponga que el objetivo del sistema es mantener la estabilidad del precio.

La ley se puede enunciar de la siguiente manera. La *demanda* del mercado por el ítem disminuye cuando su precio aumenta. Usualmente la oferta del mercado se incrementa cuando su precio aumenta. La ley de la oferta y la demanda dice que se alcanza un precio estable en el mercado, si y sólo si la oferta es igual a la demanda.

La manera como se regula el precio por la oferta y la demanda se puede describir con los conceptos de control con retroalimentación. Escojamos los siguientes cuatro elementos básicos para nuestro sistema: el proveedor, el comprador, el vendedor y el mercado en donde el ítem se compra y se vende. (En realidad, estos elementos representan generalmente procesos muy complicados).

La entrada en nuestro sistema económico ideal es la *estabilidad del precio*, esto es, la salida "deseada". Una manera más conveniente de describir esta entrada es *fluctuación cero del precio*. La salida es el precio real en el mercado.

El sistema opera como sigue: el vendedor recibe una orden (cero) para la estabilidad del precio. Este calcula un precio para la transacción en el mercado con la ayuda de la información de su memoria o sus registros de transacciones pasadas. Este precio hace que el proveedor produzca o suministre cierto número de ítems, y que el comprador demande cierto número de los mismos. La diferencia entre la oferta y la demanda es la acción de control en este sistema. Si esta última es diferente de cero, es decir, si la oferta no es igual a la demanda, el vendedor inicia un cambio en el precio del mercado en la dirección que hace que eventualmente la oferta iguale a la demanda. En consecuencia, el proveedor y el comprador pueden considerarse como la retroalimentación, puesto que ellos determinan la acción de control.

Problemas misceláneos

1.13. *a*) Explique cómo operan los semáforos corrientes que controlan el tráfico automotor en las intersecciones de las vías. *b*) ¿Por qué éstos son sistemas de control en malla abierta? *c*) ¿Cómo se puede controlar el tráfico más eficientemente? *d*) ¿Por qué el sistema de *c*) es en malla cerrada?

a) Los semáforos controlan el flujo de ese tráfico confrontando en forma sucesiva el tráfico en una dirección particular (por ejemplo, norte-sur) con una luz roja (pare), y luego con una luz verde (siga). Cuando una dirección tiene la señal verde, el tráfico cruzado en la otra dirección (este-oeste) tiene la roja. En la mayor parte de los semáforos los intervalos de las luces roja y verde están predeterminados por un mecanismo sincronizador calibrado.

b) Los sistemas de control operados por mecanismos sincronizadores prefijados son en malla abierta. La acción de control es igual a la entrada, es decir, los intervalos de rojo y verde.

c) Además de prevenir los choques, generalmente es función de los semáforos controlar el *volumen* de tráfico. Para el sistema en malla abierta descrito antes, el volumen de tráfico no influye los intervalos predeterminados de luz verde y luz roja. Para hacer que el tráfico fluya más uniformemente, el intervalo de tiempo de la luz verde debe ser mayor que el de la luz roja en la dirección que tiene mayor volumen de tráfico. A menudo, un agente del tránsito realiza esta tarea.

El sistema ideal sería medir automáticamente el volumen del tránsito en todas las direcciones utilizando dispositivos sensores apropiados, compararlos, y luego utilizar la diferencia para controlar los intervalos de tiempo de luz verde y luz roja; una tarea ideal para un computador.

d) El sistema de *c*) es en malla cerrada porque la acción de control (la diferencia entre el volumen de tráfico en cada dirección) es una función de la salida (el volumen de tráfico real que fluye por la intersección en cada dirección).

1.14. *a*) Describa de manera simplificada los componentes y las variables de los sistemas de control biológicos involucrados en el caminar en una dirección determinada. *b*) ¿Por qué caminar es una operación en malla cerrada? *c*) ¿Bajo qué condiciones el aparato de caminar del ser humano sería un sistema en malla abierta? ¿Un sistema de datos muestreados? Suponga que la persona tiene una visión normal.

a) Los principales componentes involucrados en la marcha son el cerebro, los ojos, las piernas y los pies. Se puede escoger la entrada como la dirección en la que se desea caminar, y la salida como la dirección real en que se camina. La acción de control se determina por los ojos, los cuales detectan la diferencia entre la entrada y la salida y envían esta información al cerebro. El cerebro ordena a las piernas y los pies caminar en la dirección prescrita.

b) Caminar es una operación en malla cerrada porque la acción de control es una función de la salida.

c) Si se cierran los ojos se rompe el lazo de retroalimentación y el sistema se hace en malla abierta. Si se abren y cierran los ojos periódicamente el sistema se convierte en uno de datos muestreados, y el caminar se controla de manera más exacta que si se hace siempre con los ojos cerrados.

1.15. Diseñe un sistema de control para llenar de agua un recipiente después de haberse vaciado a través de una llave en el fondo. El sistema debe cortar automáticamente el agua cuando el recipiente esté lleno.

El diagrama esquemático simplificado (figura 1-5) ilustra el principio del sistema de llenado de las cisternas comunes de los sanitarios.

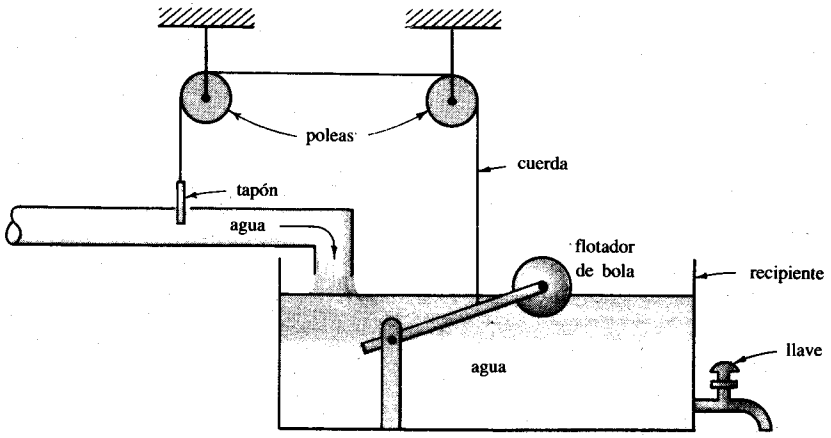


Figura 1-5

La bola flota sobre el agua. A medida que la bola se acerca a la parte superior del recipiente, el tapón disminuye el flujo de agua, y cuando el recipiente se llena, el tapón lo suspende.

1.16. Diseñe un sistema de control simple que encienda automáticamente la lámpara de una habitación al anochecer, y la apague al amanecer.

En la figura 1-6 se muestra un sistema simple que realiza esta tarea.

Al anochecer, la fotocelda, que funciona como un interruptor sensible a la luz, cierra el circuito de la lámpara y en consecuencia ilumina el cuarto. La lámpara se mantiene encendida hasta el amanecer, cuando la fotocelda detecta el brillo de la luz exterior y abre el circuito de la lámpara.

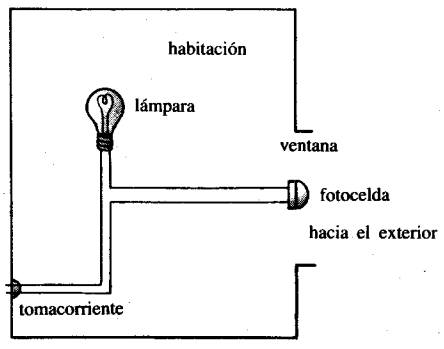


Figura 1-6

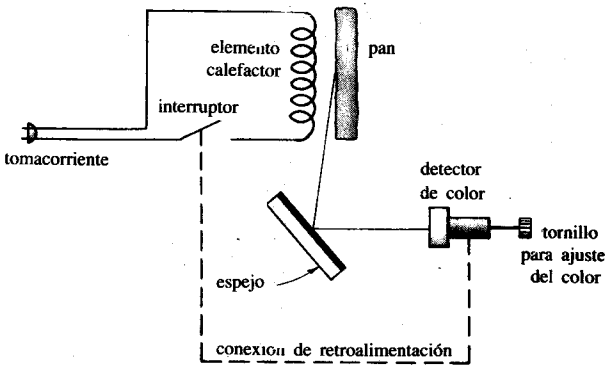


Figura 1-7

1.17. Diseñe una tostadora automática en malla cerrada.

Suponga que cada elemento calefactor suministra la misma cantidad de calor a ambos lados del pan y que la calidad de tostado se puede determinar por su color. En la figura 1-7 se muestra un diagrama esquemático simplificado de una posible forma de aplicar el principio de retroalimentación a una tostadora. Solamente se ilustra un lado de la tostadora.

Inicialmente la tostadora se calibra a una calidad de tostado deseada mediante un botón de ajuste. Este ajuste nunca requiere una recalibración a no ser que cambie el criterio de calidad del tostado. Cuando el interruptor se cierra, el pan se tuesta hasta que el detector de color "ve" el color deseado. Entonces el interruptor se abre automáticamente mediante la conexión de retroalimentación, que puede ser eléctrica o mecánica.

1.18. La red divisora de voltaje del problema 1.11 ¿es un dispositivo analógico o digital? Las entradas y salidas ¿son analógicas o digitales?

Claramente es un dispositivo analógico, como lo son todas las redes eléctricas que constan únicamente de elementos pasivos tales como resistores, capacitores e inductores. La fuente de voltaje v_1 se considera como una entrada externa a esta red. Si produce una señal continua, por ejemplo, de una batería o una fuente de corriente alterna, la salida es una señal continua o analógica. Sin embargo, si la fuente de voltaje v_1 es una señal discreta en el tiempo o digital, entonces así será la salida $\upsilon_2 = \upsilon_1 R_2/(R_1 + R_2)$. Del mismo modo, si se incluyera un interruptor en el circuito, en serie con una fuente de voltaje analógica, la apertura y el cierre intermitente del interruptor generarían una onda muestreada de la fuente de voltaje υ_1, y en consecuencia se tendría una salida muestreada o discreta en el tiempo de esta red analógica.

1.19. El sistema que controla el valor total del efectivo en una cuenta bancaria ¿es un sistema continuo o discreto en el tiempo? ¿Por qué? Suponga que se hace un depósito solamente una vez, y no se hace ningún retiro.

Si el banco no paga intereses ni extrae derechos por mantenimiento de la cuenta (como poner su dinero "bajo el colchón"), el sistema que controla el valor total del efectivo de la cuenta puede considerarse como continuo, porque el valor siempre es el mismo. Sin embargo, la mayor parte de los bancos pagan intereses en forma periódica, por ejemplo, diaria, mensual o anualmente, y el valor de la cuenta, por tanto, cambia periódicamente en *tiempos discretos*. En este caso, el sistema que controla el valor del efectivo en la cuenta es un *sistema discreto*. Suponiendo que no hay retiros, se agregan los intereses al principio de cada vez que la cuenta gana el interés, llamado *compuesto*, y el valor de la cuenta continúa creciendo sin límite (el "mayor invento de la humanidad", comentario atribuido a Einstein).

1.20. ¿Qué *tipo* de sistema de control, en malla abierta o en malla cerrada, continuo o discreto, utiliza un inversionista del mercado ordinario de valores, cuyo objetivo es obtener rentabilidad de su inversión?

A menudo, los inversionistas del mercado de valores siguen en forma periódica el progreso de sus valores, por ejemplo, de sus precios. Pueden verificar a diario los precios de puja, con su corredor de bolsa o en el periódico del día, o con cierta frecuencia, dependiendo de las circunstancias individuales. En cualquier caso, ellos *muestrean* periódicamente las señales de precios, en consecuencia, el sistema es de datos muestreados o discreto en el tiempo. Sin embargo, los precios de los valores normalmente suben y bajan entre los tiempos de muestreo, y entonces el sistema

opera en malla abierta durante estos periodos. La malla de retroalimentación se cierra sólo cuando el inversionista hace sus observaciones periódicas y actúa sobre la información recibida, que puede ser comprar, vender o no hacer nada. De esta manera, el control global es en malla cerrada. El proceso de medida (muestreo) podría, por supuesto, manejarse más eficientemente usando un computador, el cual también se puede programar para que tome decisiones con base en la información que recibe. En este caso el sistema de control permanece discreto en el tiempo, pero no sólo porque hay un computador digital en la malla de control. Los precios de puja no cambian de modo continuo, sino que inherentemente son señales discretas en el tiempo.

Problemas suplementarios

1.21. Identifique la entrada y la salida de un horno con temperatura regulada automáticamente.

1.22. Identifique la entrada y la salida de un refrigerador automático.

1.23. Identifique una entrada y una salida de una cafetera eléctrica automática. ¿Este sistema es en malla abierta o en malla cerrada?

1.24. Diseñe un sistema de control para elevar y bajar en forma automática un puente levadizo que permita el paso de los barcos. No se permite que el operador sea una persona. El sistema debe funcionar completamente de manera automática.

1.25. Explique la operación e identifique las cantidades y los componentes pertinentes de un cañón antiaéreo automático que es controlado por radar. Suponga que no se necesita operador excepto para poner inicialmente el sistema en un modo operacional.

1.26. ¿Cómo se le puede dar una interpretación de sistema de control con *retroalimentación* a la red eléctrica de la figura 1-8? ¿Este sistema es analógico o digital?

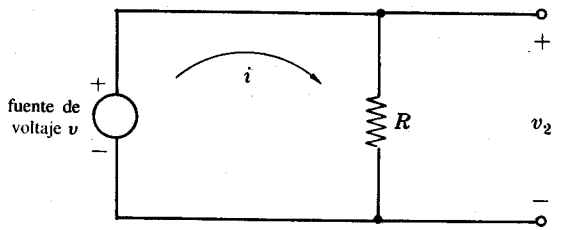


Figura 1-8

1.27. Diseñe un sistema de control para poner en posición el timón de una embarcación desde el cuarto de mando localizado lejos del timón. El objetivo del sistema de control es conducir la embarcación en la dirección deseada.

1.28. ¿Qué entradas adicionales a la orden de la dirección deseada esperaría encontrar actuando en el sistema del problema 1.27?

1.29. ¿Se puede interpretar como un sistema de control con retroalimentación la aplicación del capitalismo sin intervención del Estado? ¿Por qué? ¿El "socialismo" en su forma más pura? ¿Por qué?

1.30. ¿La operación de intercambio de valores, por ejemplo, comprar y vender acciones, se ajusta al modelo de la ley de la oferta y la demanda descrito en el problema 1.12? ¿Cómo?

1.31. ¿Un sistema económico puramente socialista se ajusta al modelo de la ley de la oferta y la demanda descrito en el problema 1.12? ¿Por qué (o por qué no)?

1.32. ¿Qué sistemas de control de los problemas 1.1 al 1.4 y del 1.12 al 1.17 son digitales o de datos muestreados, y cuáles son continuos o analógicos? Defina las señales continuas y las señales discretas en cada sistema.

1.33. Explique por qué los sistemas de control económico basados en la obtención de datos a partir de los procedimientos de contabilidad corrientes son sistemas de control de datos muestreados ¿Son en malla abierta o en malla cerrada?

1.34. Un sistema de radar de antena rotatoria que normalmente recibe datos direccionales y de intervalo en cada una de las revoluciones, ¿es un sistema analógico o digital?

1.35. ¿Qué tipo de sistema de control está involucrado en el tratamiento de un paciente por un médico, basado en los datos obtenidos de los análisis de laboratorio de una muestra de sangre del paciente?

Respuestas a algunos problemas suplementarios

1.21. La entrada es la temperatura de referencia. La salida es la temperatura real del horno.

1.22. La entrada es la temperatura de referencia. La salida es la temperatura real del refrigerador.

1.23. Una entrada posible para la cafetera eléctrica automática es la cantidad de café usado. Además, la mayor parte de las cafeteras tienen un disco que se puede ajustar para café claro, medio u oscuro. Este ajuste generalmente regula un mecanismo de tiempo. Otra entrada posible es el tiempo de preparación. La concentración del café se puede escoger como la salida de cualquier cafetera. Las cafeteras descritas antes son sistemas en malla abierta.

Capítulo 2

Terminología de los sistemas de control

2.1 Diagramas de bloques: fundamentos

Un **diagrama de bloques** es una representación gráfica y abreviada de la relación de causa y efecto entre la entrada y la salida de un sistema físico. Proporciona un método útil y conveniente para caracterizar las relaciones funcionales entre los diversos componentes de un sistema de control. Los *componentes* del sistema se llaman de manera alterna *elementos* del sistema. La forma más simple de un diagrama de bloques es un solo *bloque*, con una entrada y una salida, como se muestra en la figura 2-1.

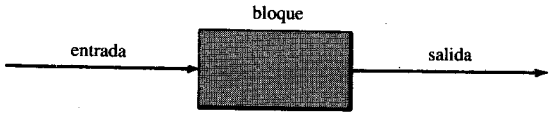


Figura 2-1

El interior del rectángulo que representa el bloque, usualmente contiene la descripción o el nombre del elemento, o el símbolo de la operación matemática que se va a efectuar sobre la entrada para producir la salida. Las *flechas* representan la dirección de la información o flujo de la señal.

EJEMPLO 2.1.

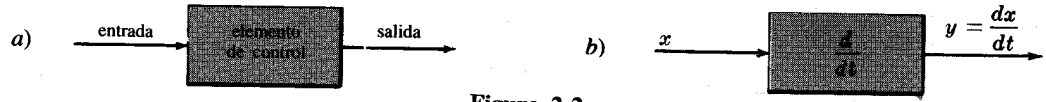


Figura 2-2

Las operaciones de adición y sustracción tienen una representación especial. El bloque se convierte en un pequeño círculo, llamado *punto de suma*, con el signo apropiado más o menos, asociado con las flechas que entran al círculo. La salida es la suma algebraica de las entradas. Cualquier número de entradas puede llegar a un punto de suma.

EJEMPLO 2.2.

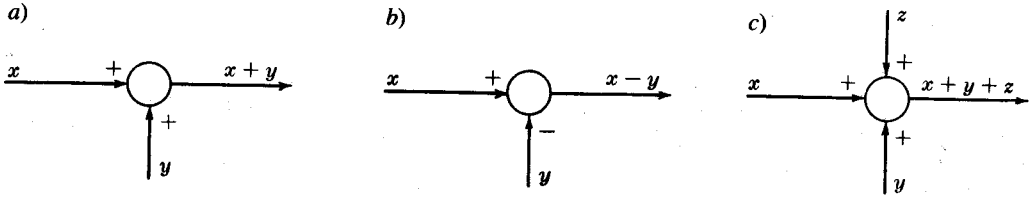


Figura 2-3

Algunos autores ponen una cruz en el círculo: (Figura 2-4)

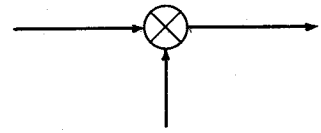


Figura 2-4

Esta notación se evitará aquí porque algunas veces se confunde con la operación de multiplicación.

Para hacer que la misma señal o variable sea una entrada a más de un bloque o punto de suma, se utiliza un **punto de toma.** Este permite que la señal prosiga inalterada por diferentes trayectorias a varios destinos.

EJEMPLO 2.3.

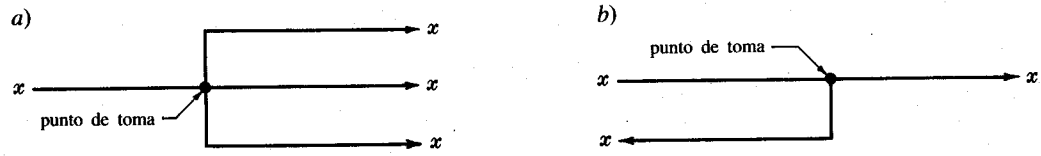


Figura 2-5

2.2 Diagramas de bloques de sistemas de control continuos (analógicos) con retroalimentación

Los bloques que representan los diferentes componentes de un sistema de control están conectados de un modo que caracteriza sus relaciones funcionales dentro del sistema. En la figura 2-6 se ilustra la configuración básica de un sistema de control simple en malla cerrada (retroalimentado), con una sola entrada y una sola salida (abreviada UEUS [en inglés, SISO]) para un sistema con señales continuas únicamente.

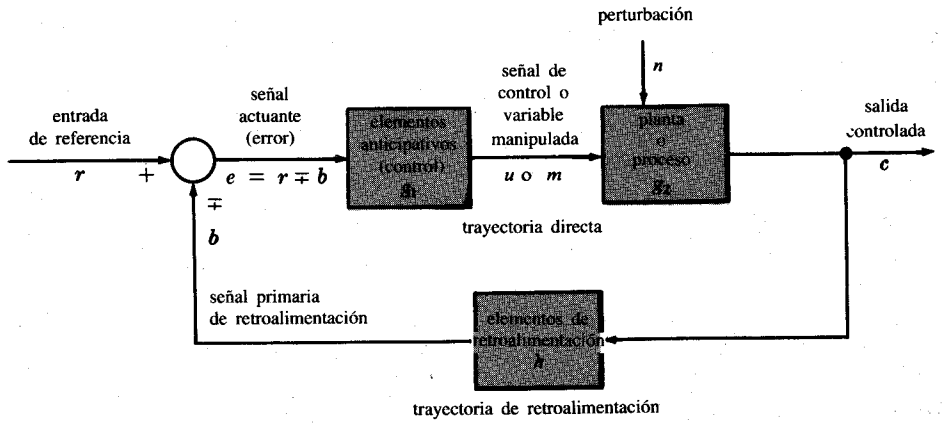


Figura 2-6

Enfatizamos que las flechas de una malla cerrada, que conectan un bloque con otro, representan la dirección del flujo de la energía de *control* o información, que a menudo no es la fuente principal de energía para el sistema. En el caso del ejemplo 1.2., la fuente principal de energía para el calentador controlado termostáticamente, por lo general, es química, proveniente de la combustión de gasolina, carbón o gas. Pero esta fuente de energía no aparece en la malla de control cerrada del sistema.

2.3 Terminología del diagrama de bloques en malla cerrada

Es importante que se entiendan claramente los términos usados en el diagrama de bloques en malla cerrada.

Las letras minúsculas se utilizan para representar las variables de entrada y de salida de cada elemento, como también los símbolos para los bloques g_1, g_2 y h. Estas cantidades representan funciones de tiempo, a no ser que se especifique otra cosa.

EJEMPLO 2.4. $r = r(t)$

En los capítulos subsiguientes, usamos letras mayúsculas para indicar cantidades de transformada de Laplace o de transformada z, como funciones de la variable compleja s, ó z, respectivamente, o cantidades de transformada de Fourier (funciones de frecuencia), como funciones de la variable imaginaria pura $j\omega$. A menudo las funciones de s ó de z se abrevian presentando la letra mayúscula sola. Las funciones de frecuencia nunca se abrevian.

EJEMPLO 2.5. $R(s)$ se puede abreviar como R, o $F(z)$ como F. $R(j\omega)$ nunca se abrevia.

Se escogieron las letras r, c, e, etc., para preservar la naturaleza genérica del diagrama de bloques. Esta convención ahora es clásica.

Definición 2.1: La **planta (proceso** o **sistema controlado)** g_2 es el sistema, subsistema, proceso u objeto comandado por el sistema de control con retroalimentación.

Definición 2.2: La **salida controlada** c es la variable de salida de la planta, bajo el mando del sistema de control con retroalimentación.

Definición 2.3: La **trayectoria** directa es la ruta de transmisión del punto de suma al punto de salida controlada c.

Definición 2.4: Los **elementos anticipativos (de control)** g_1 son los componentes de la trayectoria directa que generan las señales de control u o m aplicadas a la planta. *Nota*: Entre los elementos anticipativos de control corrientemente se encuentran controladores, compensadores (o elementos de ecualización) y/o amplificadores.

Definición 2.5: La **señal de control** u (o la **variable manipulada** m) es la señal de salida de los elementos anticipativos g_1, aplicada como entrada en la planta g_2.

***Definición 2.6*:** La **trayectoria de retroalimentación** es la ruta de transmisión de la salida controlada c que regresa al punto de suma.

***Definición 2.7*:** Los **elementos de retroalimentación** h establecen la relación funcional entre la salida controlada c y la señal primaria de retroalimentación b. *Nota*: Entre los elementos de retroalimentación normalmente se encuentran sensores de la salida controlada c, compensadores y/o elementos controladores.

***Definición 2.8*:** La **entrada de referencia** r es una señal externa aplicada al sistema de control con retroalimentación, usualmente en el primer punto de suma, para ordenar una acción específica a la planta. A menudo representa el comportamiento ideal (o deseado) de la salida en la planta.

***Definición 2.9*:** La *señal primaria de retroalimentación* b es una función de la salida controlada c, sumada algebraicamente con la entrada de referencia r para obtener la señal actuante (error) e, esto es, $r \pm b = e$. *Nota*: Un sistema en *malla abierta* no tiene señal primaria de retroalimentación.

***Definición 2.10*:** La *señal actuante* (*error*) es la señal de entrada de referencia r más o menos la señal primaria de retroalimentación b. La *acción de control* se genera por la señal actuante (error) en un sistema de control con retroalimentación (*véanse* las definiciones 1.5 y 1.6). *Nota*: En un sistema en *malla abierta*, que no tiene retroalimentación, la señal actuante es igual a r.

***Definición 2.11*:** **Retroalimentación negativa** significa que el punto de suma es un sustractor, esto es $e = r - b$ **Retroalimentación positiva** significa que el punto de suma es un sumador, es decir, $e = r + b$.

2.4 Diagramas de bloques de componentes discretos en el tiempo (datos muestreados digitales), de sistemas de control y de sistemas controlados por computador

La definición 1.11 describe un *sistema de control discreto en el tiempo* (*de datos muestreados o digital*) como aquel que tiene señales o componentes discretos en el tiempo en uno o más puntos del sistema. Primero, relacionamos varios componentes comunes de sistemas discretos en el tiempo, y luego, ilustramos algunas de las formas como pueden interconectarse en los sistemas de control digital. Recordamos al lector que en este libro *discreto en el tiempo* a menudo se abrevia como *discreto*, y *continuo en el tiempo* como *continuo*, siempre que su significado no resulte ambiguo.

EJEMPLO 2.6. Un computador digital o microprocesador es un dispositivo discreto en el tiempo (discreto o digital), componente común en sistemas de control digital. Las señales internas y externas de un computador digital se caracterizan por ser discretas en el tiempo o codificadas digitalmente.

EJEMPLO 2.7. Un componente (o componentes) de un sistema discreto con entradas $u(t_k)$ discretas en el tiempo y señales de salida $y(t_k)$ discretas en el tiempo, en donde t_k son los instantes discretos de tiempo, $k = 1,2,\ldots$, etc., puede representarse por un diagrama de bloques como el que se muestra en la figura 2-7.

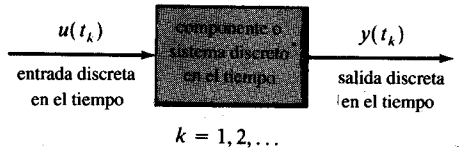


Figura 2-7

Muchos sistemas de control digital contienen componentes discretos y continuos. Usualmente en tales sistemas se incluyen uno o más dispositivos conocidos como *muestreadores*, y otros conocidos como *retenes*.

Definición 2.12: Un **muestreador** es un dispositivo que convierte una señal continua en el tiempo, digamos $u(t)$, en una señal discreta en el tiempo, representada por $u^*(t)$, la cual consiste en una secuencia de valores de la señal en los instantes t_1, t_2,..., es decir, $u(t_1)$, $u(t_2)$,..., etc.

Usualmente los muestreadores ideales se representan de manera esquemática por un interruptor, como se muestra en la figura 2-8, en la cual el interruptor normalmente está abierto, excepto en los instantes t_1, t_2, etc., cuando se cierra por un instante. El interruptor también puede representarse como encerrado en un bloque, como se muestra en la figura 2-9.

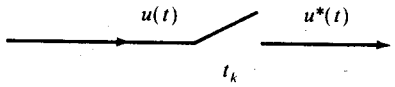


Figura 2-8

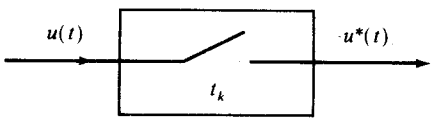


Figura 2-9

EJEMPLO 2.8. En la figura 2-10 se ilustran la señal de entrada de un muestreador ideal y algunas muestras de la señal de salida. Este tipo de señal habitualmente se llama *señal de datos muestreados*.

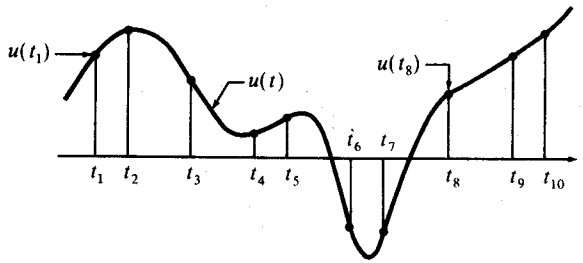


Figura 2-10

A menudo las señales de datos discretos $u(t_k)$ se escriben de manera más simple, con el índice k como único argumento, esto es, $u(k)$, y la secuencia $u(t_1)$, $u(t_2)$,..., etc., se convierte en $u(1)$, $u(2)$, ..., etc. En el Capítulo 3 se introduce esta notación. Aunque en general las tasas de muestreo no son uniformes, como en el ejemplo 2.8, en este libro se sigue como regla el muestreo uniforme, es decir, $t_{k+1} - t_k \equiv T$ para todo k.

Definición 2.13: Un **retén** o **sistema de sostenimiento de datos** es un dispositivo que convierte la salida discreta en el tiempo de un muestreador en alguna clase particular de señal continua en el tiempo o analógica.

EJEMPLO 2.9. Un **sistema de sostenimiento de orden cero** (*retén simple*) es aquel que mantiene (es decir, retiene) el valor de $u(t_k)$ constante hasta el siguiente tiempo de muestreo t_{k+1}, como se muestra en la figura 2-11. Note que la salida $y_{HO}(t)$ del retén de orden cero es continua, excepto en los tiempos de muestreo. Este tipo de señal se llama *continua a tramos*.

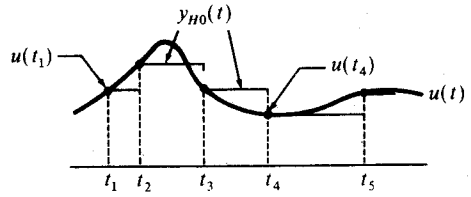


Fig. 2-11

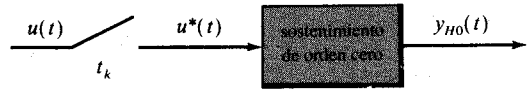


Figura 2-12

Definición 2.14: Un **convertidor analógico a digital (A/D)** es un dispositivo que convierte una señal analógica o continua en una discreta o digital.

Definición 2.15: Un **convertidor digital a analógico (D/A)** es un dispositivo que convierte una señal discreta o digital en una continua en el tiempo o analógica.

EJEMPLO 2.10. El muestreador del ejemplo 2.8 (figuras 2-9 y 2-10) es un convertidor A/D.

EJEMPLO 2.11. El sistema de sostenimiento de orden cero del ejemplo 2.9 (figuras 2-11 y 2-12) es un convertidor D/A.

Los sistemas de muestreo y *sostenimiento de orden cero*, comúnmente se utilizan como convertidores A/D y D/A, pero no son los únicos tipos disponibles. En particular, algunos convertidores D/A son más complejos.

EJEMPLO 2.12. A menudo se utilizan computadores digitales o microprocesadores para controlar plantas o procesos continuos. En tales aplicaciones se necesitan convertidores A/D y D/A, para convertir señales de la planta en señales digitales, y señales digitales del computador en señales de control para la planta analógica. La operación conjunta de estos elementos usualmente se sincroniza con un reloj, y el controlador resultante algunas veces se llama *filtro digital*, como se ilustra en la figura 2-13.

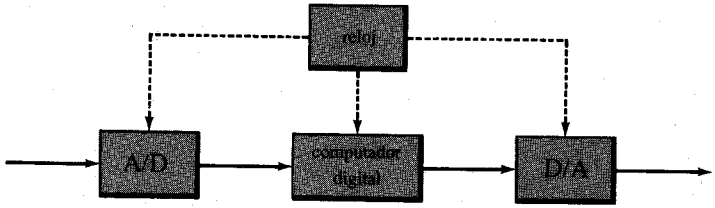


Figura 2-13

***Definición 2.16*:** Un **sistema controlado por computador** incluye un computador como elemento primário de control.

Los sistemas controlados por computador más comunes tienen computadores digitales comandando procesos analógicos o continuos. En este caso, se necesitan convertidores A/D y D/A, como se ilustra en la figura 2-14.

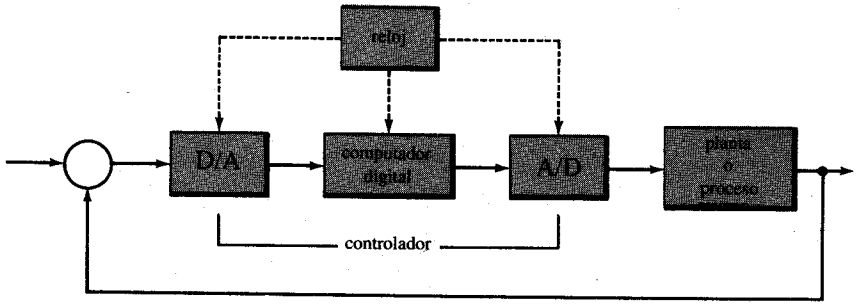


Figura 2-14

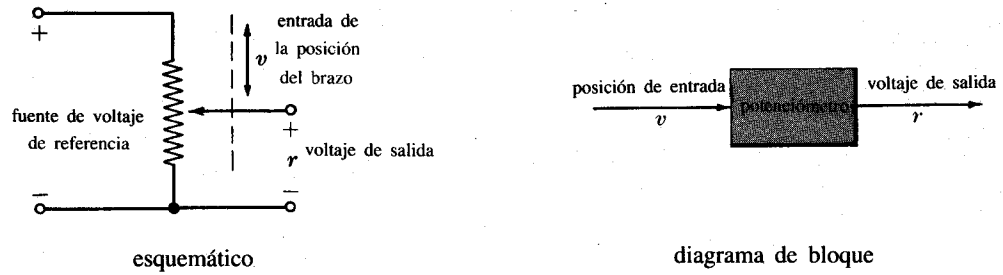
El reloj puede omitirse del diagrama, ya que sincroniza pero no hace parte explícita del flujo de la señal en la malla de control. De la misma manera, algunas veces se omiten del diagrama el punto de suma y la entrada de referencia porque ambos pueden ser implementadas por el computador.

2.5 Terminología suplementaria

En este momento hay varios términos que requieren definición e ilustración. Otros se presentan en los capítulos subsiguientes a medida que sean necesarios.

***Definición 2.17*:** Un **transductor** es un dispositivo que convierte una forma de energía en otra.

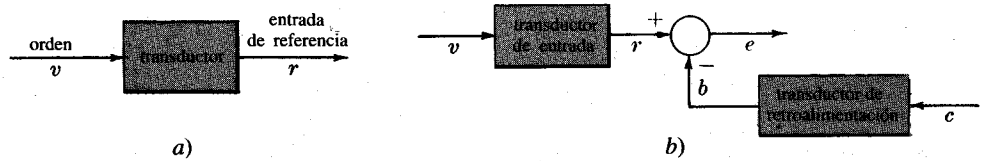
Por ejemplo, uno de los transductores más comunes en las aplicaciones de sistemas de control es el *potenciómetro*, el cual convierte una posición mecánica en un voltaje eléctrico (figura 2-15).



esquemático diagrama de bloque

Figura 2-15

Definición 2.18: La **orden** v es una señal de entrada, usualmente igual a la entrada de referencia r. Pero, cuando la clase de energía de la orden v no es la misma que la de retroalimentación primaria b, se requiere un transductor entre la orden v y la entrada de referencia r, como se muestra en la figura 2-16 *a*.



a) *b)*

Figura 2-16

Definición 2.19: Cuando el elemento de retroalimentación consta de un transductor, y además se necesita un transductor en la entrada, esa parte del sistema de control, ilustrada en la figura 2-16 *b*, se llama **detector de error.**

Definición 2.20: Un **estímulo** o **entrada de prueba** es cualquier señal de entrada introducida externamente (exógenamente) que afecta la salida controlada c. *Nota*: la entrada de referencia r es un ejemplo de un estímulo, pero no es la única clase de estímulo.

Definición 2.21: Una **perturbación** n **(ruido de entrada)** es un estímulo o una señal de entrada no deseados que afectan el valor c de la salida controlada. Puede entrar a la planta con u o m, como se muestra en el diagrama de bloques de la figura 2-6, en el primer punto de suma o en cualquier otro punto intermedio.

Definición 2.22: La **respuesta de tiempo** de un sistema, subsistema o elemento es la salida como función de tiempo, usualmente en seguida de la aplicación de una entrada prescrita bajo condiciones de operación especificadas.

Definición 2.23: Un **sistema multivariable** es aquel que tiene más de una entrada **(multientrada, ME-)**, más de una salida **(multisalida, -MS)** o ambas **(multientrada-multisalida, MEMS)**.

Definición 2.24: El término **controlador** en un sistema de control con retroalimentación, a menudo está asociado con los elementos de la trayectoria directa entre la señal actuante (error) e y la variable de control u. Pero, algunas veces, incluye el punto de suma, los elementos de retroalimentación o ambos. Algunos autores utilizan los términos controlador y compensador como sinónimos. El contexto deberá eliminar cualquier ambigüedad.

Las cinco definiciones siguientes son ejemplos de **leyes de control** o **algoritmos de control.**

Definición 2.25: Un **controlador** de **encendido-apagado** (*on-off*)* (**controlador binario, de dos posiciones**) tiene únicamente dos valores posibles en su salida u, dependiendo de la entrada e en el controlador.

EJEMPLO 2.13. Un controlador binario puede tener una salida $u = +1$ cuando la señal de error es positiva, es decir, $e > 0$, y $u = -1$ cuando $e \leq 0$.

Definición 2.26: Un **controlador proporcional (*P*)** tiene una salida u proporcional a su entrada e esto es, $u = K_P e$, en donde K_P es una constante de proporcionalidad.

Definición 2.27: Un **controlador derivativo (*D*)** tiene una salida u proporcional a la *derivada* de su entrada e, esto es, $u = K_D de/dt$, en donde K_D es una constante de proporcionalidad.

Definición 2.28: Un **controlador integral (*I*)** tiene una salida u proporcional a la *integral* de su entrada e, esto es, $u = K_I \int e(t)dt$, en donde K_I es una constante de proporcionalidad.

Definición 2.29: Los **controladores PD, PI, DI** y **PID** son combinaciones de los controladores proporcional (P), de derivativo (D) e integral (I).

EJEMPLO 2.14. La salida u de un controlador PD tiene la forma:

$$u_{\text{PD}} = K_P e + K_D \frac{de}{dt}$$

La salida de un controlador PID tiene la forma:

$$u_{\text{PID}} = K_P e + K_D \frac{de}{dt} + K_I \int e(t)\, dt$$

* Aunque se escribe en inglés, está muy difundido en español el uso del término *controladores on-off*.

2.6 Servomecanismos

Los sistemas de control con retroalimentación especializados, llamados *servomecanismos*, requieren una atención especial, debido a su frecuente aparición en aplicaciones industriales y en la literatura de los sistemas de control.

Definición 2.30: Un **servomecanismo** es un sistema de control con retroalimentación de amplificación de potencia, en el cual la variable controlada c es una posición mecánica o una derivada con respecto al tiempo, tal como la velocidad o la aceleración.

EJEMPLO 2.15. El *aparato de dirección de potencia de un automóvil* es un servomecanismo. La orden de entrada es la posición angular del volante de dirección. Un pequeño torque rotacional que se aplica al volante de dirección se amplifica hidráulicamente, dando como resultado una fuerza adecuada para modificar la salida, la cual es la posición angular de las ruedas delanteras. En la figura 2-17 se presenta el diagrama de bloques de tal sistema. La retroalimentación negativa es necesaria para regresar la válvula de control a la posición neutra, reduciendo a cero el torque del amplificador hidráulico cuando se ha alcanzado la posición deseada en la rueda.

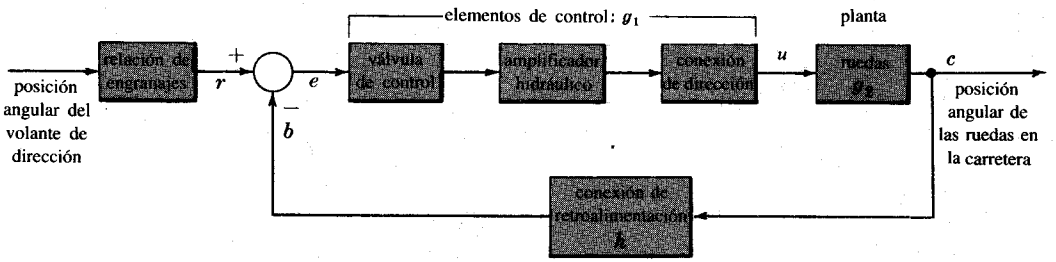


Figura 2-17

2.7 Reguladores

Definición 2.31: Un **regulador** o **sistema regulador** es un sistema de control con retroalimentación en el cual la entrada o comando de referencia es constante por largos periodos de tiempo, habitualmente durante todo el intervalo de tiempo en el cual el sistema es operacional. Con frecuencia tal entrada se llama **punto de referencia.**

Un regulador se diferencia de un servomecanismo en que la función primaria de un regulador usualmente es mantener una salida controlada constante, mientras que la de un servomecanismo es, casi siempre, hacer que una entrada variable en el sistema ocasione una salida.

Problemas resueltos

Diagramas de bloque

2.1. Considere las siguientes ecuaciones en las cuales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son coeficientes generales u operadores matemáticos:

$$a) \quad x_3 = a_1x_1 + a_2x_2 - 5$$

$$b) \quad x_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$$

Dibuje un diagrama de bloque para cada ecuación, identificando todos los bloques, las entradas y las salidas.

a) En la forma como está escrita la ecuación, x_3 es la salida. Los términos del lado derecho de la ecuación se combinan en un punto de suma, como se muestra en la figura 2-18.

El término a_1x_1 se representa por un bloque sencillo, con x_1 como entrada y a_1x_1 como salida. Por tanto, el coeficiente a_1 se coloca dentro del bloque, como se muestra en la figura 2-19. a_1 puede representar cualquier operación matemática. Por ejemplo, si a_1 fuera una constante, la operación del bloque sería "multiplicar la entrada x_1 por la constante a_1". Usualmente, de la descripción o del contexto de un problema resulta claro qué significa el símbolo, el operador o la descripción dentro del bloque.

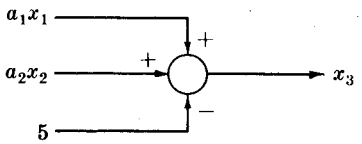


Figura 2-18

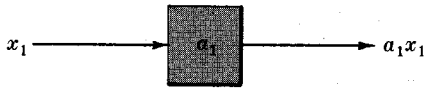


Figura 2-19

El término a_2x_2 se representa de la misma manera.
En la figura 2.20 se muestra el diagrama de bloque para la ecuación completa.

b) Siguiendo el mismo razonamiento que en la parte *a)*, el diagrama de bloque para

$$x_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$$

se muestra en la figura 2-21.

2.2. Dibuje un diagrama de bloque para cada una de las siguientes ecuaciones:

$$a) \quad x_2 = a_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right) \qquad b) \quad x_3 = \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} - x_1 \qquad c) \quad x_4 = \int x_3\,dt$$

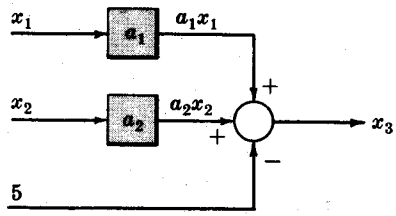


Figura 2-20

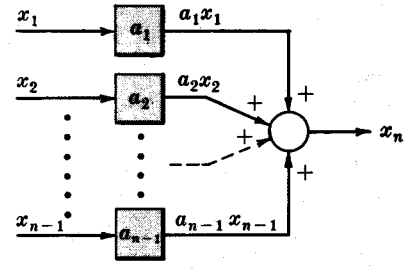


Figura 2-21

a) En esta ecuación se especifican dos operaciones, a_1 y la derivada d/dt. Por tanto, el diagrama contiene dos bloques, como se muestra en la figura 2-22. Nótese el orden de los mismos.

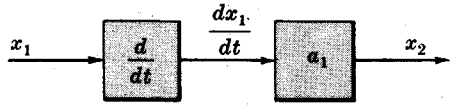


Figura 2-22

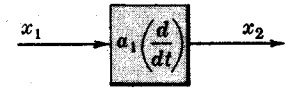


Figura 2-23

Ahora, si a_1 fuera constante, el bloque a_1 se podría combinar con el bloque d/dt, como se muestra en la figura 2-23, ya que no habría confusión en relación con el orden de los bloques. Pero, si a_1 fuera un operador desconocido, la inversión de los bloques d/dt y a_1 no resultaría, necesariamente, en una salida igual a x_2 como se muestra en la figura 2-24.

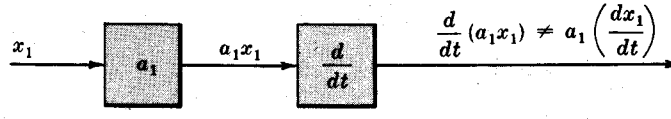


Figura 2-24

b) Las operaciones + y − indican la necesidad de un punto de suma. La derivada puede tratarse como en la parte *a*), o combinando las dos primeras operaciones de derivación en un bloque operador de segunda derivada, con lo cual se obtienen dos diagramas de bloques diferentes para la ecuación de x_3, como se muestra en la figura 2-25.

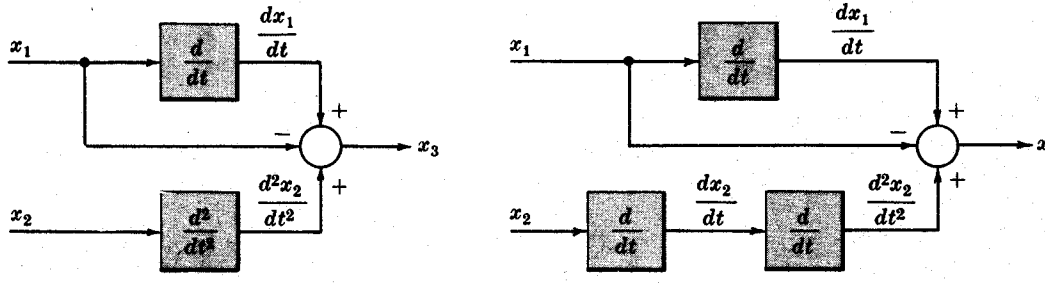


Figura 2-25

c) La integración puede representarse en la forma del diagrama de bloque de la figura 2-26.

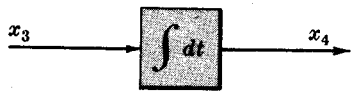


Figura 2-26

2.3. Dibuje un diagrama de bloque para el mecanismo del espejo ajustable que aparece en la sección 1.1, con la salida que se identifica en el problema 1.1. Suponga que en cada rotación de 360° del tornillo, el espejo sube o baja k grados. Identifique en el diagrama todas las señales y los componentes del sistema de control.

Por conveniencia, en la figura 2-27 se repite el diagrama esquemático del sistema.

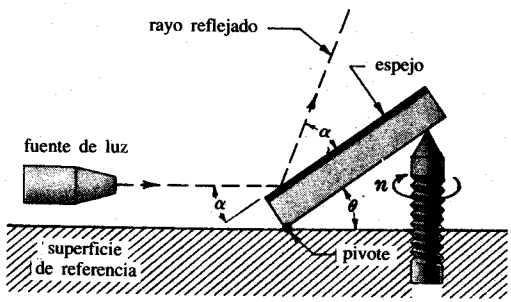


Figura 2-27

Mientras que en el problema 1.1 la entrada se definía como θ, las especificaciones en este problema implican una entrada igual al número de rotaciones del tornillo. Sea n el número de rotaciones del tornillo, tal que $n = 0$ cuando $\theta = 0°$. Por tanto, n y θ pueden relacionarse mediante un bloque descrito por la constante k, tal que $\theta = kn$, como se muestra en la figura 2-28.

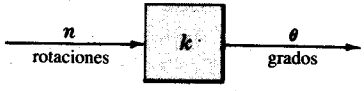


Figura 2-28

Figura 2-29

En el problema 1.1 se determinó $\theta + \alpha$ como salida del sistema. Pero, puesto que la fuente de luz está dirigida paralela a la superficie de referencia, entonces $\alpha = \theta$. En consecuencia, la salida es igual a 2θ, y el espejo puede representarse en un bloque mediante una constante igual a 2, como se muestra en la figura 2-29.

En la figura 2-30 se da completo el diagrama de bloque del sistema en malla abierta. Para este ejemplo simple, también podemos notar que la salida 2θ es igual a $2kn$ rotaciones del tornillo. Esto produce el diagrama de bloques más simple que se muestra en la figura 2-31.

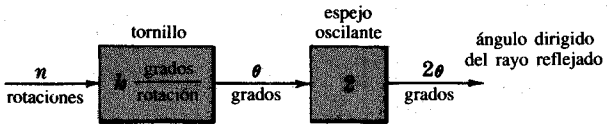


Figura 2-30

Figura 2-31

2.4. Dibuje un diagrama de bloque en malla abierta y otro en malla cerrada, para la red divisora de voltaje del problema 1.11.

En el problema 1.11 se determinó que la ecuación en malla abierta es $v_2 = (R_2/(R_1 + R_2))\, v_1$, en donde v_1 es la entrada y v_2 es la salida. En consecuencia, el bloque se representa por $R_2/(R_1 + R_2)$ (figura 2-32), y claramente la operación es la multiplicación.

La ecuación en malla cerrada es

$$v_2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right) v_1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right) v_2 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)(v_1 - v_2)$$

La señal actuante es $v_1 - v_2$. El diagrama de bloque en malla cerrada con retroalimentación negativa se construye fácilmente con el único bloque representado por R_2/R_1, como se muestra en la figura 2-33.

Figura 2-32

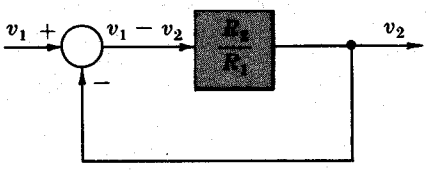


Figura 2-33

2.5. Dibuje un diagrama de bloque para el interruptor eléctrico del ejemplo 1.1 (véanse los problemas 1.9 y 1.10).

Tanto la entrada como la salida son variables binarias (de dos estados). El interruptor se representa por un bloque, y la fuente de potencia eléctrica que el interruptor controla no hace parte del sistema de control. Un posible diagrama de bloques en malla abierta se presenta en la figura 2-34.

Figura 2-34

Por ejemplo, suponga que la fuente de potencia es una fuente de corriente eléctrica. Entonces, el diagrama de bloques para el interruptor podría tomar la forma de la figura 2-35, en donde (de nuevo) la fuente de corriente no hace parte del sistema de control, y la entrada en el bloque del interruptor se muestra como una conexión mecánica a un interruptor simple de "cuchilla", y la salida es una corriente diferente de cero sólo cuando el interruptor está cerrado (encendido). De otro modo es cero (apagado).

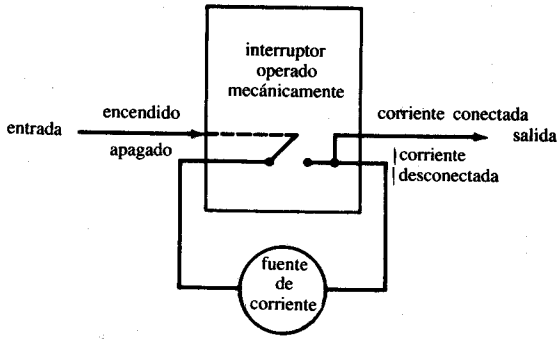


Figura 2-35

2.6. Dibuje los diagramas de bloque simples para los sistemas de control de los ejemplos 1.2 al 1.5.

En el problema 1.10 notamos que estos sistemas son en malla cerrada, y del problema 1.9 dedujimos que en cada ejemplo la señal actuante (acción de control) para el sistema es igual a la entrada menos la salida. Por tanto, en cada sistema existe una retroalimentación negativa.

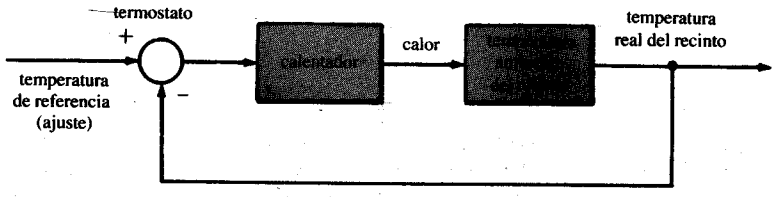
Para el calentador controlado termostáticamente, del ejemplo 1.2, se puede escoger el termostato como el punto de suma, puesto que éste es el dispositivo que determina si el calentador se enciende o no. La temperatura del ambiente del recinto (exterior) puede tratarse como una entrada de **ruido** que actúa directamente en el recinto.

Los ojos pueden representarse como el punto de suma tanto en el sistema humano de señalamiento, del ejemplo 1.3, como en el sistema del conductor de automóviles, del ejemplo 1.5. Los ojos realizan la función de supervisar la entrada y la salida.

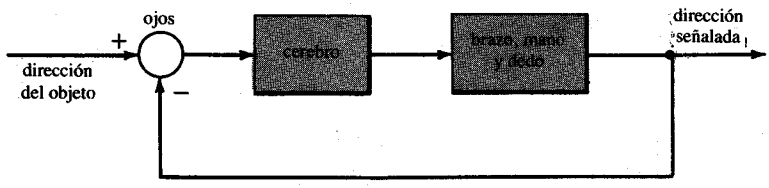
Para el sistema de transpiración del ejemplo 1.4, el punto de suma no se define tan fácilmente. En aras de la simplicidad llamémoslo sistema nervioso.

Los diagramas de bloque se construyen fácilmente, como se muestra abajo, a partir de la información dada antes y de la lista de componentes, entradas y salidas dadas en los ejemplos.

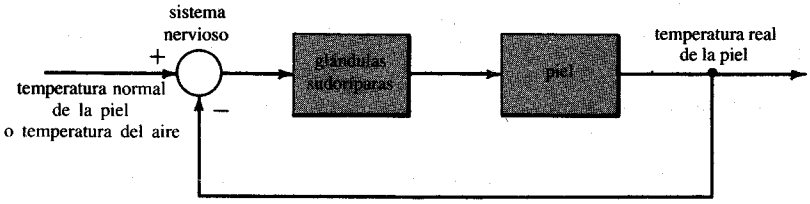
Las flechas entre los componentes en los diagramas de bloque de los sistemas biológicos, que se muestran en los ejemplos 1.3 al 1.5, representan señales eléctricas, químicas o mecánicas, controladas por el sistema nervioso central.



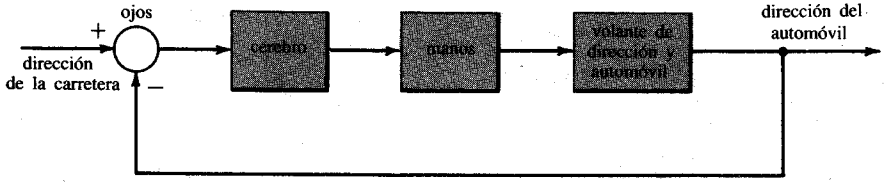
Ejemplo 1.2



Ejemplo 1.3



Ejemplo 1.4



Ejemplo 1.5

Diagramas de bloque de sistemas de control con retroalimentación

2.7. Dibuje un diagrama de bloque para el sistema de la cisterna descrito en el problema 1.15. ¿Qué componente o componentes conforman la planta, el controlador y la retroalimentación?

El recipiente es la planta porque el nivel del agua *del recipiente* se controla (véase la definición 2.1). La válvula tapón puede escogerse como el elemento de control, y como elementos de retroalimentación el flotador, la cuerda y las conexiones asociadas. En la figura 2-36 se presenta el diagrama de bloques.

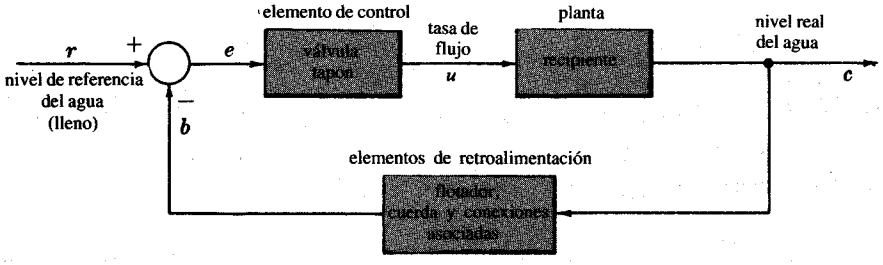


Figura 2-36

La retroalimentación es negativa porque la tasa de flujo del agua debe disminuir a medida que sube el nivel del agua en el recipiente.

2.8. Dibuje un diagrama de bloque para el sistema de control con retroalimentación de los ejemplos 1.7 y 1.8, el avión con piloto automático.

La planta para este sistema es el avión, incluyendo sus mecanismos de control y los instrumentos de navegación. El controlador es el mecanismo del piloto automático, y el punto de suma es el dispositivo de comparación. La conexión de retroalimentación puede representarse simplemente mediante una flecha desde la salida hasta el punto de suma, ya que esta conexión no está bien definida en el ejemplo 1.8.

El piloto automático suministra las señales de control para operar los mecanismos de control (timón, alerones, etc.). Estas señales pueden designarse como u_1, u_2,...

En la figura 2-37 se presenta el diagrama de bloque más simple para este sistema con retroalimentación.

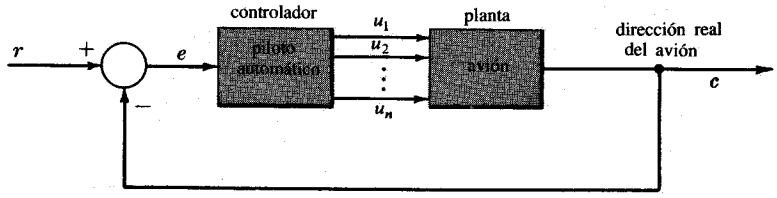


Figura 2-37

Servomecanismos

2.9 Dibuje un diagrama esquemático y un diagrama de bloque a partir de la siguiente descripción de un *servomecanismo de posición* cuya función es abrir y cerrar una válvula de agua.

En la entrada del sistema hay un potenciómetro de tipo rotatorio conectado a través de una batería como fuente de voltaje. Su terminal móvil (el tercero) está calibrado en términos de la posición angular (en radianes). Este terminal de salida está conectado eléctricamente a un terminal de un amplificador de voltaje llamado *servoamplificador*. Este último suministra suficiente potencia de salida para operar un motor eléctrico llamado *servomotor*, el cual está conectado en forma mecánica con la válvula de agua de manera que permite que esta última sea abierta o cerrada por el motor.

Suponga que el efecto de carga de la válvula sobre el motor es despreciable; esto es, no le hace "resistencia" al motor. Una rotación de 360° del eje del motor abre completamente la válvula.

Además, el terminal móvil de un segundo potenciómetro conectado en paralelo a los terminales fijos del potenciómetro de entrada se encuentra conectado de manera mecánica

al eje del motor. Este se encuentra conectado eléctricamente al terminal de entrada restante del servoamplificador. Las relaciones del potenciómetro se ajustan de tal modo que sean iguales cuando la válvula esté cerrada.

Cuando se da la orden de abrir la válvula, el servomotor gira en la dirección apropiada. A medida que la válvula se abre, el segundo potenciómetro, llamado *potenciómetro de retroalimentación*, gira en la misma dirección que el potenciómetro de entrada. Este se detiene cuando las relaciones de los potenciómetros son iguales de nuevo.

Con la descripción precedente puede trazarse fácilmente el diagrama esquemático (figura 2-38). Las conexiones mecánicas se muestran con líneas no continuas.

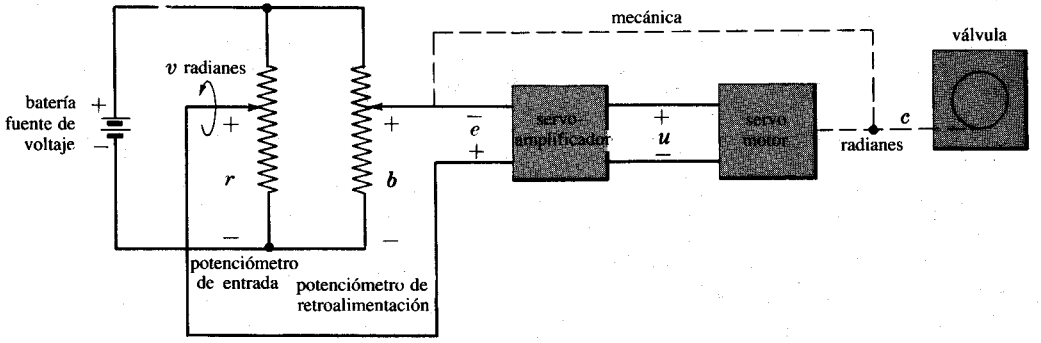


Figura 2-38

El diagrama de bloque para este sistema (figura 2-39) puede dibujarse fácilmente a partir de este diagrama esquemático.

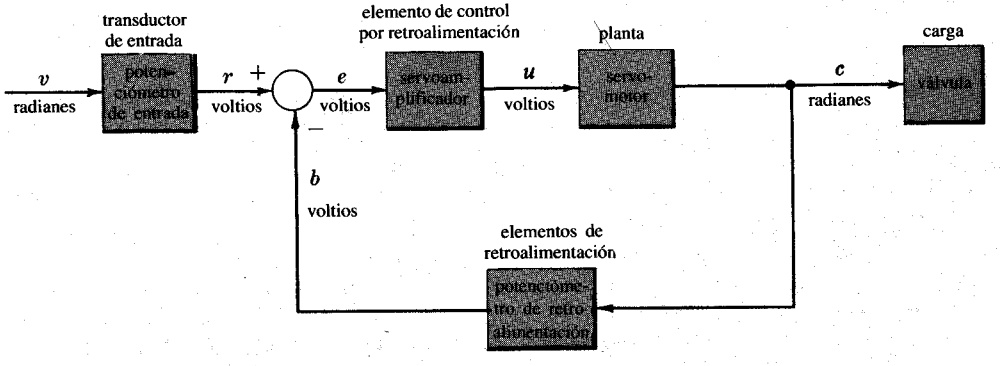


Figura 2-39

2.10. Dibuje un diagrama de bloque para el sistema elemental de control de velocidad (servomecanismo de velocidad) que se da en la figura 2-40.

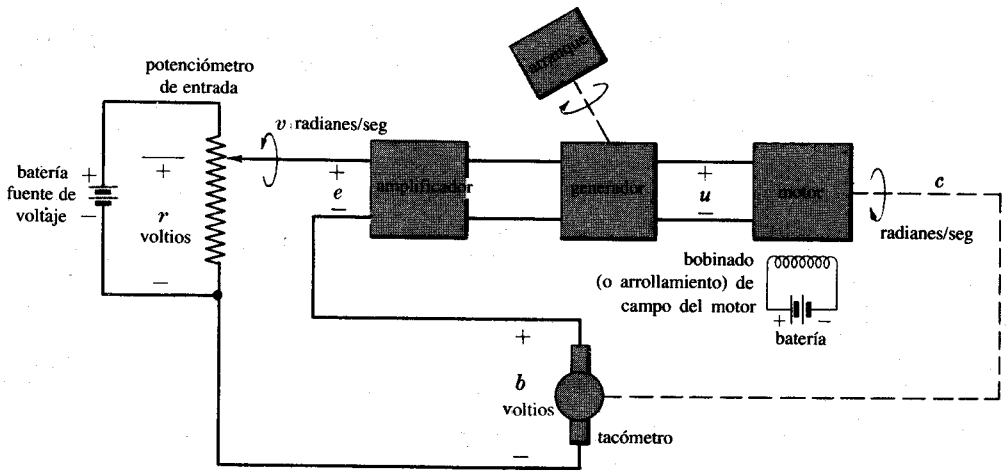


Figura 2-40

El potenciómetro es de tipo rotatorio, calibrado en radianes por segundo, y las corrientes del arranque, del bobinado de campo del motor y del potenciómetro de entrada son funciones constantes de tiempo. Ninguna carga se encuentra acoplada al eje del motor.

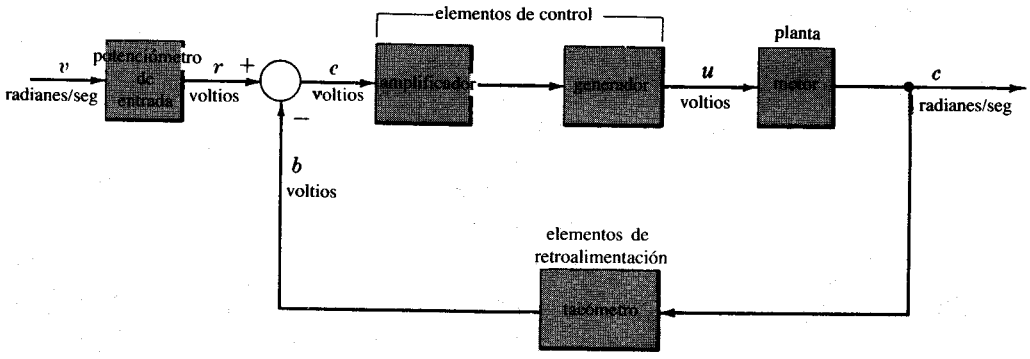


Figura 2-41

La batería, fuente de voltaje para el potenciómetro de entrada y para el bobinado de campo del motor, y la fuente de arranque para el generador, no hacen parte de la malla de control de este servomecanismo. La salida de cada una de estas fuentes es una función constante de tiempo, y pueden tenerse en cuenta en la descripción matemática del potenciómetro de entrada, del generador y del motor, respectivamente. En consecuencia el diagrama de bloques para este sistema es el dado en la figura 2-41.

Problemas misceláneos

2.11. Dibuje un diagrama de bloque para el sistema interruptor de luz con fotocelda, descrito en el problema 1.16. La intensidad de luz en la habitación debe mantenerse en un nivel mayor que o igual a un nivel especificado.

Un modo de describir este sistema es con dos entradas, la primera se escoge como la intensidad luminosa mínima de referencia en la habitación r_1, y la segunda como la intensidad de la luz solar en la habitación r_2. La salida c es la intensidad luminosa real en la habitación.

La habitación es la planta. La variable manipulada (señal de control) es la cantidad de luz suministrada a la habitación por la lámpara y por el sol. La fotocelda y la lámpara son los elementos de control porque ellos controlan la intensidad luminosa en la habitación. Suponga que la intensidad luminosa mínima de referencia en la habitación r_1 es igual a la intensidad de la luz en la habitación suministrada solamente por la lámpara. La figura 2-42 presenta un diagrama de bloque para este sistema.

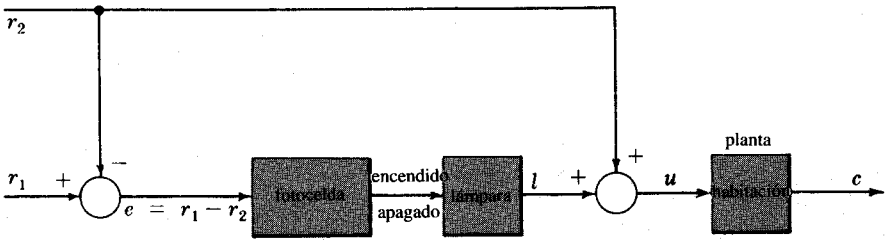


Figura 2-42

Claramente el sistema es en malla abierta. La señal actuante e es independiente de la salida c, y es igual a la diferencia entre las dos entradas: $r_1 - r_2$. Cuando $e \leq 0$, $l = 0$ (la luz se apaga). Cuando $e > 0$, $l = r_1$ (la luz se enciende).

2.12. Dibuje un diagrama de bloque para el sistema en malla cerrada de señales de tráfico descrito en el problema 1.13.

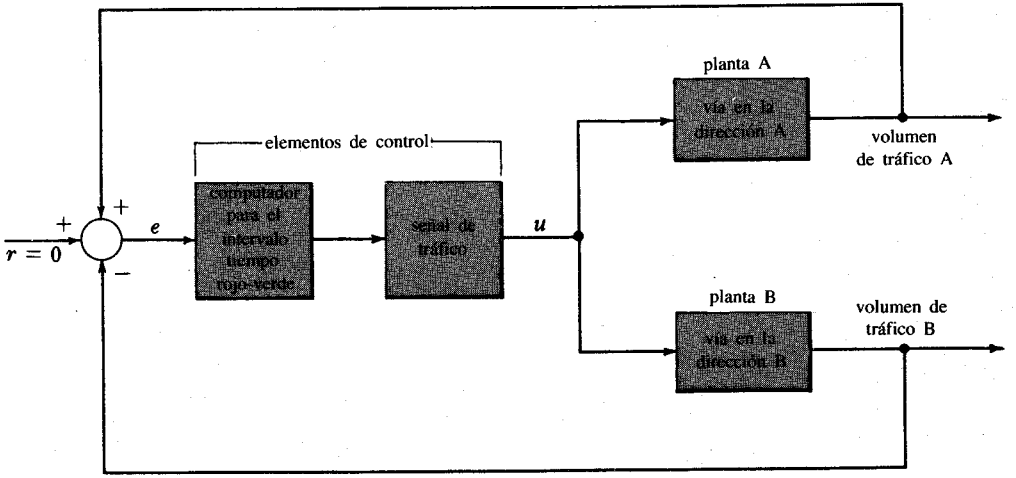


Figura 2-43

Este sistema tiene dos salidas, el volumen de tráfico que pasa en la intersección en una dirección (la dirección A), y el volumen que pasa en la intersección en la otra dirección (la dirección B). La entrada es la orden de iguales volúmenes de tráfico en las direcciones A y B: es decir, la entrada es la diferencia de volumen cero.

Suponga que al mecanismo para calcular los intervalos de tiempo adecuados de luces roja y verde lo llamamos computador para el intervalo de tiempo rojo-verde. Este dispositivo, además de la señal de tráfico, conforma los elementos de control. Las plantas son las vías en las direcciones A y B. El diagrama de bloques de este *regulador* de tráfico se presenta en la figura 2-43.

2.13. Dibuje un diagrama de bloque ilustrando la ley de la oferta y la demanda, como se describió en el problema 1.12.

El diagrama de bloque se da en la figura 2-44.

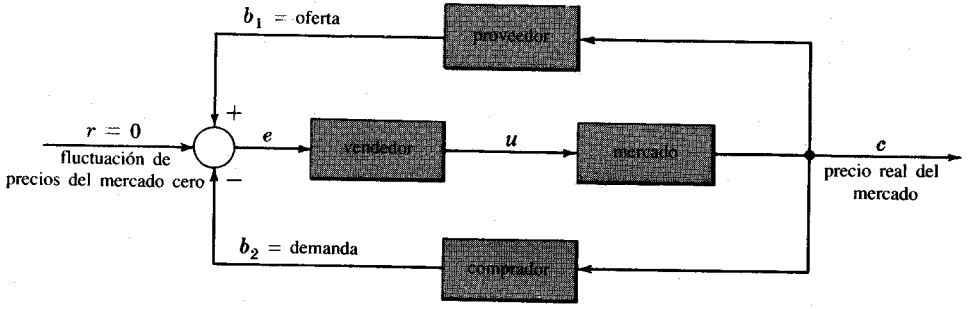


Figura 2-44

2.14. El siguiente modelo, muy simplificado, del mecanismo biológico que regula la presión arterial sanguínea humana es un ejemplo de sistema de control con retroalimentación.

Debe mantenerse una presión bien regulada en los vasos sanguíneos (arterias, arteriolas y capilares) que irrigan los tejidos, de modo que se mantenga el flujo sanguíneo en forma adecuada. A menudo, esta presión se mide en la aorta (una arteria) y se llama *presión sanguínea* p. Esta no es constante, y normalmente está en un rango de 70-130 mm de mercurio (mm Hg) en los adultos. Supongamos que p es igual a 100 mm Hg (en promedio) en un individuo normal.

La siguiente ecuación para la presión arterial es un modelo fundamental para la fisiología circulatoria:

$$p = Q\rho$$

en la cual Q es la *salida cardíaca*, o la tasa volumétrica de flujo de sangre del corazón a la aorta, y ρ es la *resistencia periférica* ofrecida por las arteriolas al flujo sanguíneo. Bajo condiciones normales, ρ es inversamente proporcional a la cuarta potencia del diámetro d de los vasos (arteriolas).

Ahora, se cree que d está controlado por el *centro vasomotor* (CVM) del cerebro; al aumentar la actividad del CVM disminuye d y viceversa. Aunque hay varios factores que afectan la actividad de CVM, se cree que las *células barorreceptoras* del *seno arterial* son las más importantes. La actividad barorreceptora *inhibe* el CVM, y por tanto funciona a modo de retroalimentación negativa. De acuerdo con esta teoría, si ρ aumenta, los barorreceptores envían señales a lo largo de los nervios vago y glosofaríngeos al CVM, disminuyendo su actividad. De esto resulta un aumento en el diámetro d de la arteriola, una disminución en la resistencia periférica ρ y (suponiendo constante la salida cardíaca Q) una correspondiente disminución en la presión sanguínea p. Esta red retroalimentada, probablemente regula, al menos en parte, la presión sanguínea en la aorta.

Dibuje un diagrama de bloque para este sistema de control con retroalimentación, identificando todas las señales y componentes.

Sea la aorta la planta, representada por Q (la salida cardíaca); el CVM y las arteriolas pueden escogerse como el controlador; los barorreceptores son los elementos de retroalimentación. La entrada p_0 es la presión sanguínea normal promedio (de referencia), 100 mm Hg. La salida p es la presión real de la sangre. Puesto que $\rho = k(1/d)^4$, en donde k es una constante de proporcionalidad, las arteriolas se pueden representar en el bloque por $k(\cdot)^4$. El diagrama de bloque se da en la figura 2-45.

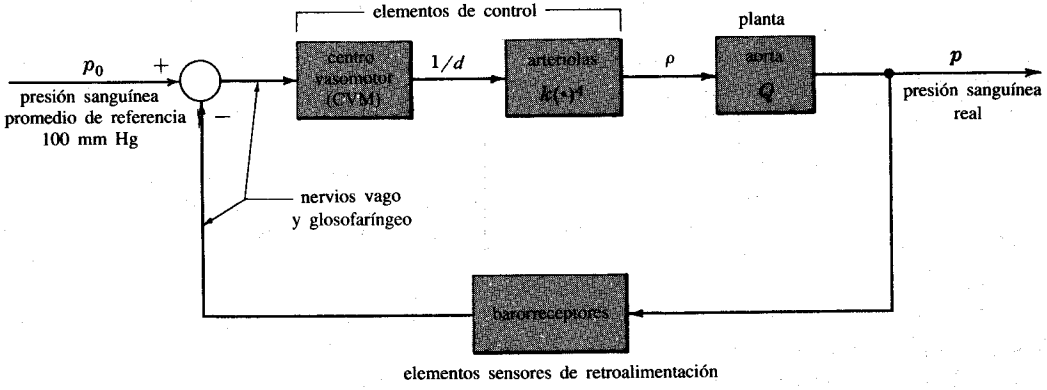


Figura 2-45

2.15. La *tiroides*, una glándula endocrina (de secreción interna) localizada en el cuello humano, segrega *tiroxina* al torrente sanguíneo, el cual es el sistema transmisor de señales para la mayor parte de las glándulas endocrinas, al igual que los alambres conductores son el sistema de transmisión para el flujo de la corriente eléctrica, o los tubos y ductos pueden ser el sistema de transmisión para el flujo de un fluido hidrodinámico.

Como la mayor parte de los procesos fisiológicos humanos, la producción de tiroxina en la glándula tiroides se controla automáticamente. La cantidad de tiroxina en el torrente sanguíneo está regulada, en parte, por una hormona secretada por la *pituitaria anterior*, una glándula endocrina suspendida en la base del cerebro. Esta hormona de "control" se llama *hormona estimulante de la tiroides* (HET). En una vista simplificada de este sistema de control, cuando la cantidad de tiroxina en el sistema circulatorio es mayor que la requerida por el organismo, se inhibe (reduce) la secreción de HET, causando una reducción en la actividad de la tiroides. En consecuencia, esta glándula libera menos tiroxina.

Dibuje un diagrama de bloque del sistema simplificado descrito, identificando todos los componentes y señales.

Sea la tiroides la planta, y la cantidad de tiroxina en la sangre la variable controlada. La pituitaria es el controlador, y la variable manipulada es la cantidad de HET que segrega. El diagrama de bloque se da en la figura 2-46.

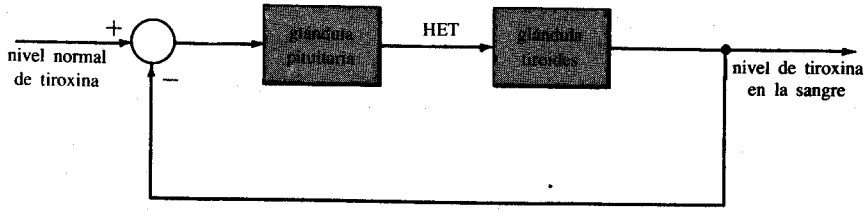


Figura 2-46

Enfatizamos que ésta es una forma muy simplificada de este sistema de control biológico, como lo fue el del problema anterior.

2.16. ¿Qué tipo de **controlador** se incluye en el sistema, más real, de calefacción controlado termostáticamente, descrito en el ejemplo 1.14?

El controlador del calentador con termostato tiene una salida binaria: encendido o apagado. En consecuencia, es un controlador de encendido-apagado (*on-off*). Pero este último no es tan simple como el sensor de signo del ejemplo 2.13. El interruptor del termostato enciende el calentador cuando la temperatura de la habitación desciende 1° por debajo del punto de referencia, 22°C, y lo apaga cuando se eleva 1° por encima de ese punto de referencia.

Gráficamente, la curva característica de tal controlador tiene la forma dada en la figura 2-47.

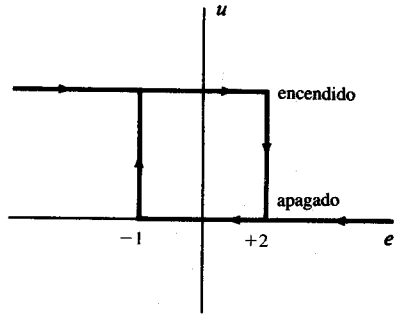


Figura 2-47

Esta se llama curva característica de **histéresis**, porque su salida tiene "memoria"; es decir, los puntos de conmutación dependen de si la entrada e está aumentando o disminuyendo cuando el controlador conmuta los estados de encendido a apagado o de apagado a encendido.

2.17. Haga un bosquejo de las señales de error, de control y de salida controlada en función del tiempo, y analice cómo el controlador de encendido-apagado (on-off), del problema 2.16, mantiene la temperatura promedio de la habitación especificada por el punto predeterminado (22°C) del termostato.

Las señales típicas de $e(t)$, $u(t)$ y $c(t)$ tienen la forma que se muestra en la figura 2-48, suponiendo que la temperatura es inferior a 22°C al comienzo.

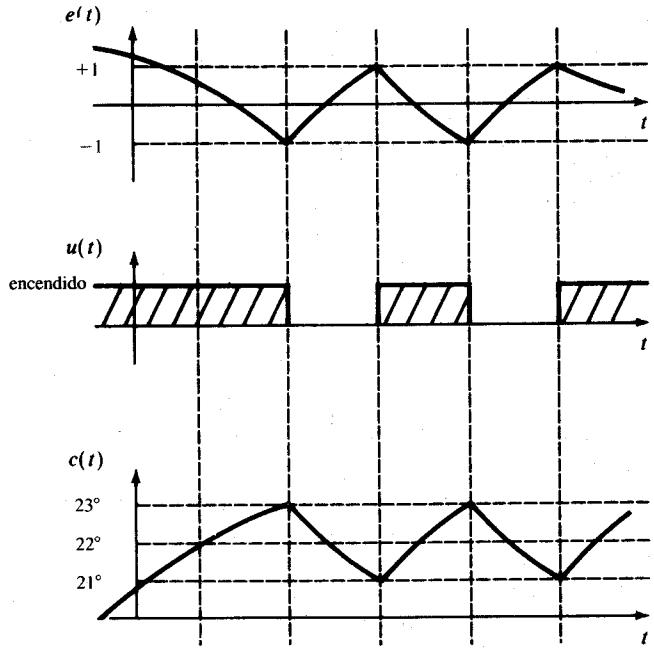


Figura 2-48

La temperatura de la habitación $c(t)$ varía de manera constante y en cada intervalo de conmutación del controlador se eleva a una tasa aproximadamente constante, de 21°C a 23°C, o disminuye a una tasa de 23°C a 21°C. La temperatura promedio de la habitación es el valor medio de esta función $c(t)$, el cual es cercano a 22°C.

2.18. ¿Cuál es la ventaja principal de un sistema controlado por computador, en relación con un sistema analógico?

El controlador (la ley de control) en un sistema controlado por computador se realiza normalmente por programas de aplicación (software) en lugar de dispositivos adicionales (hardware). En consecuencia, las clases de leyes de control que se pueden desarrollar convenientemente, se incrementan de manera sustancial.

Problemas suplementarios

2.19. En la figura 2-49 se da el diagrama esquemático de un amplificador de voltaje *semiconductor* llamado *seguidor de emisor*.

En la figura 2-50 se muestra un circuito equivalente de este amplificador, en donde r_p es la resistencia interna y μ es un parámetro del semiconductor en particular. Dibuje los diagramas de bloques en malla abierta y en malla cerrada para este circuito con una entrada v_{entrada} y una salida v_{salida}.

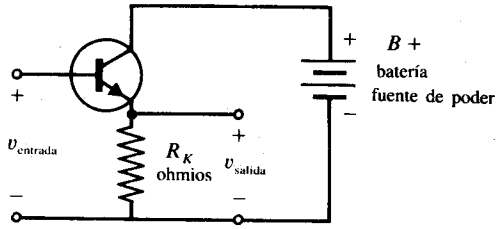


Figura 2-49

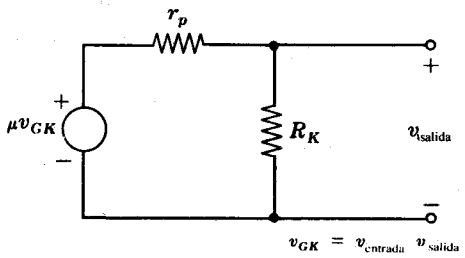


Figura 2-50

2.20. Dibuje un diagrama de bloque para el sistema de caminar humano del problema 1.14.

2.21. Dibuje un diagrama de bloque para el sistema humano de aproximación, descrito en el problema 1.4.

2.22. Dibuje un diagrama de bloque para el horno automático de temperatura regulada, del problema 1.21.

2.23. Dibuje un diagrama de bloque para la tostadora automática en malla cerrada del problema 1.17.

2.24. Establezca las unidades dimensionales comunes para la entrada y la salida en los siguientes transductores: *a*) acelerómetro, *b*) generador de electricidad, *c*) termistor (resistencia sensitiva a la temperatura), *d*) termopar.

2.25. ¿Cuáles de los sistemas 2.1 al 2.8 y del 2.11 al 2.21 son servomecanismos?

2.26. La glándula endocrina conocida como *corteza adrenal* se localiza encima de cada riñón (en dos partes). Ella segrega varias hormonas, una de las cuales es la *cortisona*, la cual juega un papel importante en la regulación del metabolismo de los carbohidratos, las proteínas y las grasas, especialmente en momentos de tensión. La producción de cortisona está controlada por la hormona adrenocorticotrópica (HACT) de la glándula pituitaria anterior. Cantidades altas de cortisona en la sangre inhiben la producción de HACT. Dibuje un diagrama de bloque de este sistema de control con retroalimentación simplificado.

2.27. Dibuje un diagrama de bloque para cada uno de los siguientes elementos, primero con un voltaje v de entrada y una corriente i de salida, y luego a la inversa: *a*) resistor R, *b*) capacitor C, y *c*) inductor L.

2.28. Dibuje un diagrama de bloque para cada uno de los siguientes sistemas mecánicos, en donde la fuerza es la entrada, y la posición es la salida: *a*) un amortiguador, *b*) un resorte, *c*) una masa, y *d*) una masa, un resorte y un amortiguador conectados en serie y asegurados en un extremo (la posición de la masa es la salida).

2.29. Dibuje un diagrama de bloque para una red *R-L-C*, *a*) en paralelo y *b*) en serie.

2.30. ¿Cuáles de los sistemas descritos en los problemas de este capítulo son reguladores?

2.31. ¿Qué tipo de sistema de datos muestreados, de los descritos en este capítulo, podría utilizarse para implementar un dispositivo o algoritmo para aproximar la integral de una función continua $u(t)$, utilizando la bien conocida regla rectangular o técnica de integración rectangular?

2.32. Dibuje un diagrama de bloque simple de un sistema controlado por computador, en el cual se utilice un computador digital para controlar una planta o un proceso analógico, con el punto de suma y la entrada de referencia **implementadas** en los programas de aplicación del computador.

2.33. ¿Qué tipo de controlador es la válvula de tapón del sistema de la cisterna, descrito en el problema 2.7?

2.34. ¿Qué tipos de controladores se encuentran incluidos en: *a*) cada uno de los servomecanismos de los problemas 2.9 y 2.10, y *b*) el regulador de tráfico del problema 2.12?

Respuestas a los problemas suplementarios

2.19. El circuito equivalente para el seguidor de emisor tiene la misma forma que la red divisora de voltaje del problema 1.11. En consecuencia, la ecuación en malla abierta para la salida es

$$v_{\text{salida}} = \frac{\mu R_K}{r_p + R_K}(v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}}) = \left(\frac{\mu R_K}{r_p + (1+\mu)R_K}\right) v_{\text{entrada}}$$

y el diagrama de bloque en malla abierta se muestra en la figura 2-51.

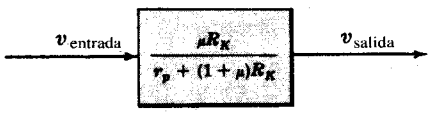


Figura 2-51

La ecuación de salida en malla cerrada es simplemente

$$v_{\text{salida}} = \frac{\mu R_K}{r_p + R_K}(v_{\text{entrada}} - v_{\text{salida}})$$

y el diagrama de bloque en malla cerrada se muestra en la figura 2-52.

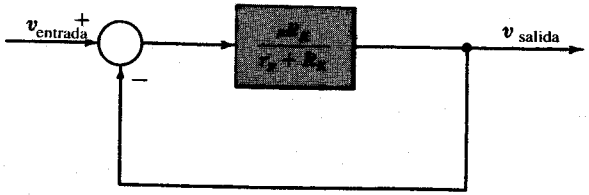
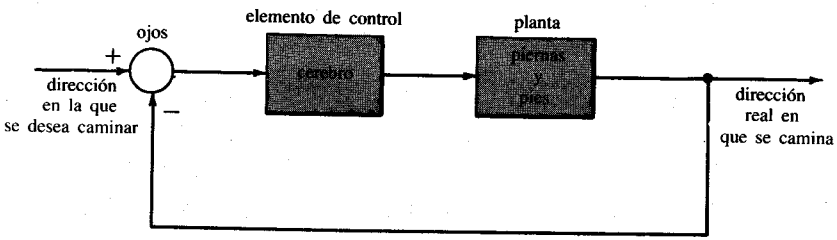
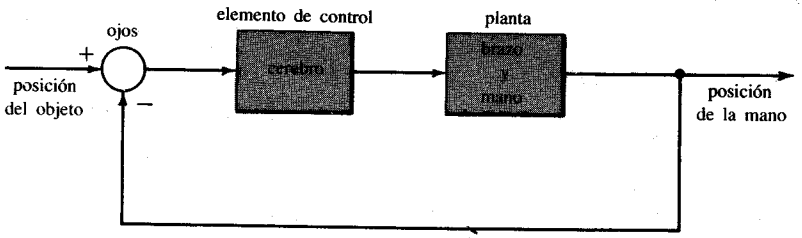


Figura 2-52

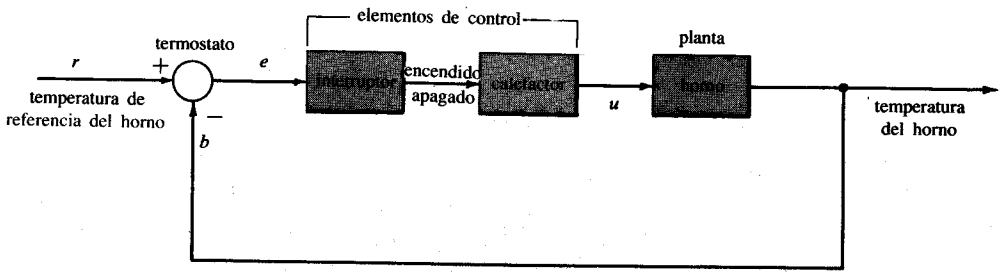
2.20.



2.21.

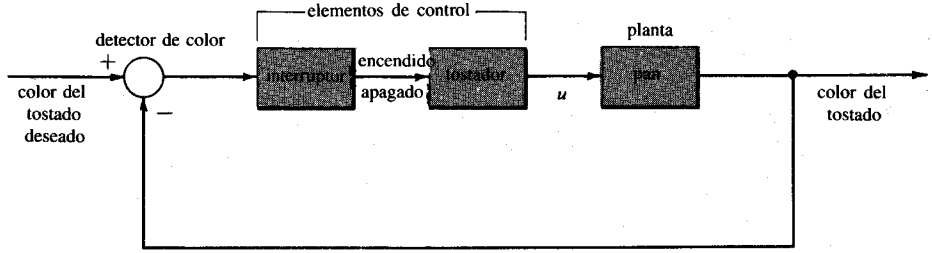


2.22.



Cuando $e > 0$ ($r > b$), el interruptor enciende el calentador. Cuando $e \leq 0$, el calentador se apaga.

2.23.



2.24. *a*) La entrada en un acelerómetro es la aceleración. La salida es el desplazamiento de una masa, un voltaje u otra cantidad proporcional a la aceleración.

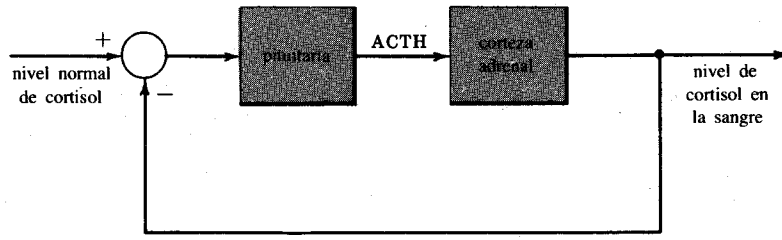
b) *Véase* el problema 1.2.

c) La entrada en un termistor es la temperatura. La salida es una cantidad eléctrica medida en ohmios, voltios o amperios.

d) La entrada en un termopar es una diferencia de temperatura. La salida es un voltaje.

2.25. Los siguientes problemas describen servomecanismos: los ejemplos 1.3 y 1.5 en el problema 2.6, y los problemas 2.7, 2.8, 2.17 y 2.21.

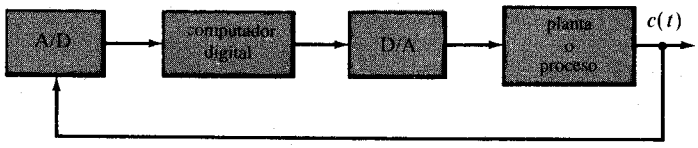
2.26.



2.30. Los sistemas de los ejemplos 1.2 y 1.4 en el problema 2.6, y los sistemas de los problemas 2.7, 2.8, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.22, 2.23 y 2.26 son reguladores

2.31. El dispositivo de muestreo y sostenimiento de orden cero, del ejemplo 2.9, ejecuta parte del proceso necesario para la integración rectangular. Para este sencillísimo algoritmo de integración numérica, el "área bajo la curva" (esto es, la integral) se aproxima por los pequeños rectángulos de altura $u(t_k)$ y ancho $t_{k+1} - t_k$. Este resultado podría obtenerse multiplicando la salida del dispositivo de sostenimiento $u^*(t)$ por el ancho del intervalo $t_{k+1} - t_k$, cuando $u^*(t)$ está en el intervalo entre t_k y t_{k+1}. La suma de estos productos es el resultado deseado.

2.32.



2.33. Si la válvula tapón es sencilla, del tipo de las que sólo pueden estar o totalmente cerradas o totalmente abiertas, es un *controlador de encendido-apagado (on-off)*. Pero si es del tipo de las que se cierran gradualmente a medida que el tanque se llena, es un *controlador proporcional*.

Capítulo 3

Ecuaciones diferenciales, ecuaciones de diferencia y sistemas lineales

3.1 Ecuaciones de un sistema

Una propiedad común a todas las leyes básicas de la física es que ciertas cantidades fundamentales pueden definirse mediante valores numéricos. Las leyes físicas definen relaciones entre estas cantidades fundamentales y usualmente se representan por ecuaciones.

EJEMPLO 3.1. La versión escalar de la segunda ley de Newton establece que, si una fuerza de magnitud f se aplica a una masa de M unidades, la aceleración a de la masa está relacionada con f por la ecuación $f = Ma$.

EJEMPLO 3.2. La ley de Ohm establece que si se aplica un voltaje de magnitud v a través de una resistencia de R unidades, la corriente i que fluye por la resistencia está relacionada con v por la ecuación $v = Ri$.

Muchas leyes que no son físicas también pueden representarse por ecuaciones.

EJEMPLO 3.3. La ley del interés compuesto establece que si se deposita una cantidad $P(0)$ durante n periodos iguales de tiempo a una tasa de interés I para cada periodo de tiempo, la cantidad crecerá a un valor de $P(n) = P(0)\ (1 + I)^n$.

3.2 Ecuaciones diferenciales y ecuaciones de diferencia

Las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones de diferencia son de amplia aplicación en la descripción de sistemas.

***Definición 3.1*:** Una **ecuación diferencial** es cualquier igualdad algebraica o trascendental que involucra diferenciales o derivadas.

Las ecuaciones diferenciales son útiles para relacionar razones de cambio de variables y de otros parámetros.

EJEMPLO 3.4. De otra manera, la segunda ley de Newton (ejemplo 3.1) puede escribirse como una relación entre la fuerza f, la masa M y la razón de cambio de la velocidad v de la masa con respecto al tiempo t, esto es, $f = M(dv/dt)$.

EJEMPLO 3.5. De otro modo la ley de Ohm (ejemplo 3.2) puede escribirse como la relación entre el voltaje v, la resistencia R, y la razón temporal de paso de carga q a través de la resistencia, esto es, $v = R(dq/dt)$.

EJEMPLO 3.6. La ecuación de difusión en una dimensión describe la relación entre la razón de cambio temporal de la cantidad T en un objeto (por ejemplo, concentración de calor en una barra de hierro) y la

razón de cambio posicional de T: $\partial T/\partial x = k(\partial T/\partial t)$, en donde k es una constante de proporcionalidad, x es una variable de posición y t es el tiempo.

***Definición 3.2*:** Una **ecuación de diferencia** es una igualdad algebraica o trascendental que involucra más de un valor de la(s) variable(s) dependiente(s) correspondiente, por lo menos, a más de un valor de una de la(s) variable(s) independiente(s). Las variables dependientes no involucran diferenciales ni derivadas.

Las ecuaciones de diferencia son útiles para relacionar la evolución de las variables (o de los parámetros) de un instante discreto de tiempo (u otra variable independiente) a otro.

EJEMPLO 3.7. De otro modo, la ley de interés compuesto, del ejemplo 3.3, puede escribirse como la relación entre $P(k)$, la cantidad de dinero después de k periodos de tiempo, y $P(k + 1)$, la cantidad de dinero después de $k + 1$ periodos de tiempo, en una ecuación de diferencia, esto es, $P(k + 1) = (1 + I)P(k)$.

3.3 Ecuaciones diferenciales parciales y ordinarias

***Definición 3.3*:** Una **ecuación diferencial parcial** es una igualdad que involucra una o más variables dependientes y dos o más variables independientes, junto con las derivadas parciales de la(s) variable(s) dependiente(s) con respecto a las variables independientes.

***Definición 3.4*:** Una **ecuación diferencial ordinaria (total)** es una igualdad que involucra una o más variables dependientes, una variable independiente y una o más derivadas de la(s) variable(s) dependiente(s) con respecto a la variable independiente.

EJEMPLO 3.8. La ecuación de difusión $\partial T/\partial x = k(\partial T/\partial t)$ es una ecuación diferencial parcial $T = T(x, t)$ es la variable dependiente que representa la concentración de alguna cantidad en alguna posición y en algún momento en el objeto. La variable independiente x define la posición en el objeto, y la variable independiente t define el tiempo.

EJEMPLO 3.9. La segunda ley de Newton (ejemplo 3.4) es una ecuación diferencial ordinaria: $f = M(dv/dt)$. La velocidad $v = v(t$ y la fuerza $f = f(t)$ son las variables dependientes, y el tiempo t es la variable independiente.

EJEMPLO 3.10. La ley de Ohm (ejemplo 3.5) es una ecuación diferencial ordinaria: $v = R(dq/dt)$. La carga $q = q(t)$ y el voltaje $v = v(t)$ son las variables dependientes, y el tiempo t es la variable independiente.

EJEMPLO 3.11. Una ecuación diferencial de la forma:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$$

o de manera más compacta,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = u(t) \tag{3.1}$$

en donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes, es una ecuación diferencial ordinaria. $y(t)$ y $u(t)$ son variables dependientes, y t es la variable independiente.

3.4 Variabilidad e invarianza en el tiempo

En lo que resta de este capítulo, la única variable independiente es el *tiempo*, a no ser que se especifique otra cosa. Esta variable normalmente se designa como t, excepto en las ecuaciones de diferencia en donde a menudo se usa la variable discreta k como abreviatura para el instante de tiempo t_k (*véase* el ejemplo 1.11 y la sección 2.5); esto es, se utiliza $y(k)$ en lugar de $y(t_k)$, etc.

Un *término* de una ecuación diferencial o de una ecuación de difereneia consiste de productos y/o cocientes de funciones explícitas de la variable independiente, las variables dependientes y, para las ecuaciones diferenciales, las derivadas de las variables dependientes.

En las definiciones de esta sección y de la siguiente, el término *ecuación* se refiere a una ecuación diferencial o a una ecuación de diferencia.

Definición 3.5: Una **ecuación variable en el tiempo** es aquella en la cual uno o más términos dependen *explícitamente* de la variable independiente tiempo.

Definición 3.6: Una **ecuación invariable en el tiempo** es aquella en la cual ninguno de los términos depende *explícitamente* de la variable independiente tiempo.

EJEMPLO 3.12. La ecuación de diferencia $ky(k + 2) + y(k) = u(k)$, en la cual u e y son las variables dependientes, es variable en el tiempo porque el término $ky(k + 2)$ depende explícitamente del coeficiente k que representa el tiempo t_k.

EJEMPLO 3.13. Cualquier ecuación diferencia de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i} \tag{3.2}$$

en donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, bb_1, \ldots, b_m$ son constantes, es *invariable en el tiempo*. La ecuación depende *implícitamente* de t a través de las variables dependientes u e y, y de sus derivadas.

3.5 Ecuaciones diferenciales y de diferencia lineales y no lineales

Definición 3.7: Un **término lineal** es aquel de primer grado en la(s) variable(s) dependiente(s) y en sus derivadas.

Definición 3.8: Una **ecuación lineal** es aquella que consiste en una suma de términos lineales. Todas las demás son **ecuaciones no lineales.**

Si algún término de una ecuación diferencial contiene potencias superiores, productos o funciones trascendentales de las variables dependientes, esta ecuación es no lineal. Entre tales términos se encuentran $(dy/dt)^3$, $u(dy/dt)$ y sen u, respectivamente. Por ejemplo $(5/\cos t)\,(d^2y/dt^2)$, es un término de primer grado en la variable dependiente y, y $2uy^3(dy/dt)$ es un término de quinto grado en las variables u e y.

EJEMPLO 3.14. Las ecuaciones diferenciales ordinarias $(dy/dt)^2 + y = 0$ y $d^2y/dt^2 + \cos y = 0$ son no lineales porque en la primera ecuación $(dy/dt)^2$ es de segundo grado, y $\cos y$ en la segunda ecuación *no* es de primer grado, lo cual es cierto para todas las funciones trascendentales.

EJEMPLO 3.15. La ecuación de diferencia $y(k+2) + u(k+1)\,y(k+1) + y(k) = u(k)$, en la cual u e y son las variables dependientes, es no lineal porque $u(k+1)\,y(k+1)$ es de segundo grado en u e y. Algunas veces, este tipo de ecuación no lineal se llama *bilineal* en u e y.

EJEMPLO 3.16. Cualquier ecuación de diferencia

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(k)\,y(k+i) = \sum_{i=0}^{n} b_i(k)\,u(k+i) \tag{3.3}$$

en la que los coeficientes $a_i(k)$ y $b_i(k)$ dependen solamente de la variable independiente k, es lineal.

EJEMPLO 3.17 Cualquier ecuación diferencial ordinaria

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^iy}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i(t)\frac{d^iu}{dt^i} \tag{3.4}$$

en donde los coeficientes $a_i(t)$ y $b_i(t)$ dependen únicamente de la variable independiente t, es lineal.

3.6 El operador diferencial D y la ecuación característica

Considere la ecuación diferencial lineal de n-simo orden con coeficientes constantes

$$\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0y = u \tag{3.5}$$

Es conveniente definir el **operador diferencial**

$$D \equiv \frac{d}{dt}$$

y de manera más general un **operador diferencial de *n*-simo orden**

$$D^n \equiv \frac{d^n}{dt^n}$$

La ecuación diferencial puede escribirse ahora como

$$D^n y + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1 Dy + a_0 y = u$$

o

$$\left(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0\right) y = u$$

Definición 3.9: El polinomio en D:

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 \tag{3.6}$$

se llama **polinomio característico.**

Definición 3.10: La ecuación

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 = 0 \tag{3.7}$$

se llama **ecuación característica.**

El teorema fundamental del álgebra establece que la ecuación característica tiene exactamente n soluciones $D = D_1, D = D_2, \ldots, D = D_n$. Estas n soluciones (también llamadas **raíces**) no necesariamente son diferentes.

EJEMPLO 3.18. Considere la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$$

El polinomio característico es $D^2 + 3D + 2$. La ecuación característica es $D^2 + 3D + 2 = 0$, la cual tiene dos raíces distintas $D = -1$ y $D = -2$.

3.7 Independencia lineal y conjuntos fundamentales

Definición 3.11: Un conjunto de n funciones de tiempo $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ es **linealmente independiente**, si el único conjunto de constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ para las cuales

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \cdots + c_n f_n(t) = 0$$

para cualquier t, son las constantes $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

EJEMPLO 3.19. Las funciones t y t^2 son linealmente independientes, puesto que

$$c_1 t + c_2 t^2 = t(c_1 + c_2 t) = 0$$

implica que $c_1/c_2 = -t$. *No hay constantes* que satisfagan esta relación.

Una ecuación diferencial lineal *homogénea* de n-simo orden de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$$

tiene por lo menos un conjunto de n soluciones linealmente independientes.

Definición 3.12: En una ecuación diferencial lineal homogénea de n-simo orden, cualquier conjunto de n soluciones *linealmente independientes* se llama **conjunto fundamental.**

No hay un conjunto fundamental único. Por medio de la siguiente técnica, pueden generarse otros conjuntos fundamentales a partir de un conjunto fundamental dado. Suponga que $y_1(t)$, $y_2(t),\ldots, y_n(t)$ es un conjunto fundamental de una ecuación diferencial lineal de n-simo orden. Entonces, se puede formar un conjunto de n funciones $z_1(t)$, $z_2(t),\ldots, z_n(t)$

$$z_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} y_i(t),\ z_2(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{2i} y_i(t), \ldots, z_n(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} y_i(t) \qquad (3.8)$$

en donde las a_{ji} son un conjunto de n^2 constantes. Cada $z_i(t)$ es una solución de la ecuación diferencial. Este conjunto de n soluciones es un *conjunto fundamental*, si el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

EJEMPLO 3.20. La ecuación del movimiento armónico simple, $d^2y/dt^2 + \omega^2 y = 0$, tiene un conjunto fundamental

$$y_1 = \operatorname{sen} \omega t \qquad y_2 = \cos \omega t$$

Un segundo conjunto fundamental es*

$$z_1 = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t = e^{j\omega t} \qquad z_2 = \cos \omega t - j \operatorname{sen} \omega t = e^{-j\omega t}$$

Raíces diferentes

Si la ecuación característica $\sum_{i=0}^{n} a_i D^i = 0$

tiene las raíces D_1, $D_2,\ldots, D_n$ diferentes, entonces, un conjunto fundamental para la ecuación homogénea

* La función exponencial compleja e^w, en donde $w = u + jv$ con u y v reales y $j = \sqrt{-1}$, se define en la teoría de las variables complejas como $e^w \equiv e^u(\cos v + j \operatorname{sen} v)$. Por tanto $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \operatorname{sen} \omega t$.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0$$

es el conjunto de funciones $y_1 = e^{D_1 t}$, $y_2 = e^{D_2 t}, \ldots, y_n = e^{D_n t}$.

EJEMPLO 3.21. La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

tiene la ecuación característica $D^2 + 3D + 2 = 0$ cuyas raíces son $D = D_1 = -1$ y $D = D_2 = -2$. Un conjunto fundamental para esta ecuación es $y_1 = e^{-t}$ y $y_2 = e^{-2t}$.

Raíces repetidas

Si la ecuación característica tiene raíces repetidas, entonces para cada raíz D_i de multiplicidad n_i (es decir, n_i raíces iguales a D_i), hay n_i elementos del conjunto fundamental $e^{D_i t}, te^{D_i t}, \ldots, t^{n_i - 1} e^{D_i t}$.

EJEMPLO 3.22. La ecuación

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = 0$$

con ecuación característica $D^2 + 2D + 1 = 0$, tiene la raíz repetida $D = -1$, y un conjunto fundamental que consiste de e^{-t} y te^{-t}.

3.8 Solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes

Considere la clase de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i} \qquad (3.9)$$

en donde los coeficientes a_i y b_i son constantes, $u = u(t)$ (*la entrada*) *es una función de tiempo conocida* y $y = y(t)$ (*la salida*) *es la solución desconocida de la ecuación*. Si esta ecuación describe un sistema físico, generalmente $m \leq n$, y n se llama el **orden** de la ecuación diferencial. Para especificar de manera completa el problema de tal modo que pueda obtenerse *una solución única* $y(t)$, deben darse dos especificaciones adicionales: 1) el intervalo de tiempo en el cual se desea la solución, y 2) un conjunto de n *condiciones iniciales* para $y(t)$ y sus primeras $n - 1$ derivadas. El intervalo de tiempo para la clase de problemas considerados se define por $0 \leq t < +\infty$ y lo usaremos en lo que resta del libro, a menos que se especifique otra cosa. El conjunto de condiciones iniciales es

$$y(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \tag{3.10}$$

Un problema definido en este intervalo y con estas condiciones iniciales se denomina **problema del valor inicial.**

La solución de una ecuación diferencial de esta clase puede dividirse en dos partes, una *respuesta libre* y una *respuesta forzada*. La suma de las dos constituye la *respuesta total*, o solución $y(t)$ de. la ecuación.

3.9 La respuesta libre

La **respuesta libre** de una ecuación diferencial es la solución de ésta cuando la entrada $u(t)$ es idéntica a cero.

Si la entrada $u(t)$ es idéntica a cero, entonces la ecuación diferencial tiene la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = 0 \tag{3.11}$$

La solución $y(t)$ de una ecuación tal, depende únicamente de las n condiciones iniciales de la ecuación (3.10).

EJEMPLO 3.23. La solución de la ecuación diferencial homogénea de primer orden $dy/dt + y = 0$ con la condición $y(0) = c$, es $y(t) = ce^{-t}$. Esta puede verificarse por sustitución directa. ce^{-t} es la respuesta libre de cualquier ecuación diferencial de la forma $dy/dt + y = u$ con la condición inicial $y(0) = c$.

La *respuesta libre* de una ecuación diferencial siempre puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de un *conjunto fundamental*. Esto es, si $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ es un conjunto fundamental, entonces *cualquier* respuesta libre $y_a(t)$ de la ecuación diferencial puede representarse como

$$y_a(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \tag{3.12}$$

en donde las *constantes* c_i se definen en términos de las condiciones iniciales

$$y(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

a partir del conjunto de n ecuaciones algebraicas

$$y(0) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left.\frac{dy_i}{dt}\right|_{t=0}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} c_i \left.\frac{d^{n-1}y_i}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} \tag{3.13}$$

La independencia lineal de $y_i(t)$ garantiza que para $c_1, c_2, \ldots, c_n$ puede obtenerse una solución de estas ecuaciones.

EJEMPLO 3.24. La respuesta libre $y_a(t)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $(dy/dt)|_{t=0} = 1$, se determina haciendo

$$y_a(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$$

en donde c_1 y c_2 son coeficientes desconocidos, y e^{-t} y e^{-2t} son un conjunto fundamental para la ecuación (ejemplo 3.21). Puesto que $y_a(t)$ debe satisfacer las condiciones iniciales, es decir.

$$y_a(0) = y(0) = 0 = c_1 + c_2 \qquad \left.\frac{dy_a(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 1 = -c_1 - 2c_2$$

entonces $c_1 = 1$ y $c_2 = -$. Entonces, la respuesta libre está dada por $y_a(t) = e^{-t} - e^{-t}$.

3.10 La respuesta forzada

La **respuesta forzada** $y_b(t)$ de una ecuación diferencial es la solución de ésta cuando todas las condiciones iniciales

$$y(0), \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}, \ldots, \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0}$$

son idénticas a cero.

Esta definición implica que la respuesta forzada depende solamente de la entrada $u(t)$. La *respuesta forzada* de una ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes puede escribirse en términos de una *integral de convolución* (véase el ejemplo 3.38):

$$y_b(t) = \int_0^t w(t-\tau)\left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(\tau)}{d\tau^i}\right] d\tau \qquad (3.14)$$

en donde $w(t - \tau)$ es la *función de ponderación (o núcleo [kernel]) de la ecuación diferencial.* Esta forma de la integral de convolución supone que la función de ponderación describe un sistema *causal* (*véase* la definición 3.22). Esta suposición se mantiene a continuación.

La función de ponderación de una ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes puede escribirse como

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t) \qquad && t \geq 0 \\ &= 0 && t < 0 \end{aligned} \qquad (3.15)$$

en donde $c_1,\ldots, c_n$ son constantes, y el conjunto de funciones $y_1(t), y_2(t),\ldots, y_n(t)$ es un conjunto fundamental de la ecuación diferencial. Debería notarse que $w(t)$ *es una respuesta libre de la ecuación diferencial* y, en consecuencia, requiere n condiciones iniciales para su especificación completa. Estas condiciones fijan los valores de las constantes $c_1, c_2,\ldots, c_n$. Las condiciones iniciales que deben satisfacer todas las funciones de ponderación de las ecuaciones diferenciales lineales son:

$$w(0) = 0, \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = 0,\ldots, \left.\frac{d^{n-2}w}{dt^{n-2}}\right|_{t=0} = 0, \left.\frac{d^{n-1}w}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = 1 \qquad (3.16)$$

EJEMPLO 3.25. La función de ponderación de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u$$

es una combinación lineal de e^{-t} y e^{-2t} (un conjunto fundamental de la ecuación). Esto es,

$$w(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$$

c_1 y c_2 se determinan a partir de las dos ecuaciones algebraicas

$$w(0) = 0 = c_1 + c_2 \qquad \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = 1 = -c_1 - 2c_2$$

La solución es $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, y la función de ponderación es $w(t) = e^{-t} - e^{-2t}$.

EJEMPLO 3.26. Para la ecuación diferencial del ejemplo 3.25, si $u(t) = 1$, entonces la respuesta forzada $y_b(t)$ de la ecuación es

$$y_b(t) = \int_0^t w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t e^{\tau}\,d\tau - e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}\,d\tau = \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t})$$

3.11 La respuesta total

La **respuesta total** de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes es la suma de la *respuesta libre* y la *respuesta forzada*.

EJEMPLO 3.27. La respuesta total $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $(dy/dt)|_{t=0} = 1$ es la suma de la respuesta libre $y_a(t)$, determinada en el ejemplo 3.24, y la respuesta forzada $y_b(t)$, determinada en el ejemplo 3.26. Así

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) + \frac{1}{2}(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$$

3.12 Las respuestas transitoria y en estado estacionario

La *respuesta en estado estacionario* y la *respuesta transitoria* son otro par de cantidades cuya suma es igual a la respuesta total. Estos términos se utilizan a menudo para especificar el desempeño de sistemas de control, y se definen como sigue.

***Definición 3.13*:** La **respuesta en estado estacionario** es la parte de la respuesta total que *no* se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

***Definición 3.14*:** La **respuesta transitoria** es la parte de la respuesta total que se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

EJEMPLO 3.28. La respuesta total de la ecuación diferencial del ejemplo 3.27 se determinó como $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}$. Claramente se ve que la respuesta del estado estacionario está dada por $y_{ee} = \frac{1}{2}$. Puesto que $\lim_{t\to\infty}[-\frac{1}{2}e^{-t}] = 0$, la respuesta transiente es $y_T = -\frac{1}{2}e^{-t}$.

3.13 Funciones de singularidad: pasos, rampas e impulsos

En el estudio de los sistemas de control y de las ecuaciones que los describen, se usa extensamente una familia particular de funciones llamadas *funciones de singularidad*. Cada miembro de esta familia se relaciona con los demás por una o más integrales o derivadas. Las tres funciones de singularidad de más amplio uso son el *paso unitario*, el *impulso unitario* y la *rampa unitaria*.

***Definición 3.15*:** Una **función paso unitario** $\mathbf{1}(t - t_0)$ se define mediante

$$\mathbf{1}(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{para } t > t_0 \\ 0 & \text{para } t \le t_0 \end{cases} \qquad (3.17)$$

En la figura 3-1 se ilustra esta función paso unitario.

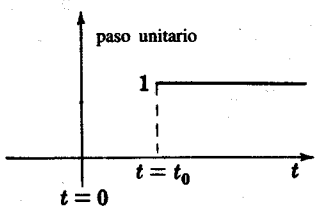


Figura 3-1

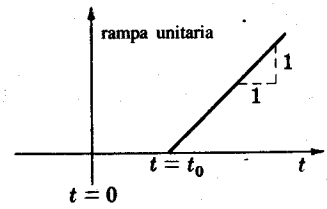


Figura 3-2

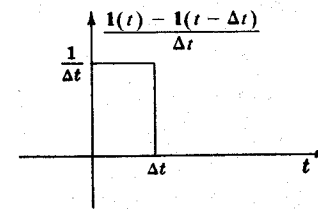


Figura 3-3

Definición 3.16: Una **función rampa unitaria** es la integral de una función paso unitario

$$\int_{-\infty}^{t} \mathbf{1}(\tau - t_0)\, d\tau = \begin{cases} t - t_0 & \text{para } t > t_0 \\ 0 & \text{para } t \le t_0 \end{cases} \qquad (3.18)$$

En la figura 3-2 se ilustra la función rampa unitaria.

Definición 3.17: Una **función impulso unitario** $\delta(t)$ puede definirse mediante

$$\delta(t) = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta t > 0}} \left[\frac{\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \Delta t)}{\Delta t} \right] \qquad (3.19)^*$$

en donde $\mathbf{1}(t)$ es la función paso unitario.

El par $\left\{ \begin{matrix} \Delta t \to 0 \\ \Delta t > 0 \end{matrix} \right\}$ puede abreviarse por $\Delta t \to 0^+$ que quiere decir que Δt se aproxima a cero *por la derecha*. El cociente entre corchetes representa un rectángulo de altura $1/\Delta t$ y de ancho Δt, como se muestra en la figura 3-3. El proceso de límite produce una función cuya altura se aproxima a infinito y el ancho se aproxima a cero. El área bajo la curva es igual a 1 para todos los valores de Δt. Esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

La función impulso unitario tiene la siguiente propiedad muy importante:

Propiedad de muestreo: La integral del producto de una función impulso unitario $\delta(t - t_0)$ y una función $f(t)$, continuas en $t = t_0$ y sobre un intervalo que incluya a t_0, es igual a la función $f(t)$ evaluada en t_0, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = f(t_0) \qquad (3.20)$$

Definición 3.18: La **respuesta impulso unitario** de un sistema es la salida $y(t)$ de éste cuando la entrada $u(t) = \delta(t)$ y todas sus condiciones iniciales son cero.

EJEMPLO 3.29. Si la relación entrada-salida de un sistema lineal está dada por la integral de convolución

* En un sentido formal, la ecuación (*3.19*) define la *derivada por un lado* de la función paso unitario. Pero en el sentido matemático ordinario no existen ni el límite ni la derivada. Sin embargo, para los propósitos de este libro y muchos otros, la definición 3.17 es satisfactoria.

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

entonces, la respuesta impulso unitario $y_\delta(t)$ del sistema es

$$y_\delta(t) = \int_0^t w(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau = w(t) \qquad (3.21)$$

ya que $w(t-\tau) = 0$ para $\tau > t$, $\delta(\tau) = 0$ para $\tau < 0$, y se ha utilizado la propiedad de muestreo del impulso unitario para evaluar la integral.

***Definición 3.19*:** La **respuesta paso unitario** es la salida $y(t)$ cuando la entrada $u(t) = \mathbf{1}(t)$ y todas las condiciones iniciales son cero.

***Definición 3.20*:** La **respuesta rampa unitaria** es la salida $y(t)$ cuando la entrada $u(t) = t$ para $t > 0$, $u(t) = 0$ para $t \leq 0$, y todas las condiciones iniciales son cero.

3.14 Sistemas de segundo orden

En el estudio de los sistemas de control son importantes las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, de la forma:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u \qquad (3.22)$$

puesto que a menudo los sistemas de orden superior pueden aproximarse a sistemas de segundo orden. La constante ζ se llama **razón de amortiguación**, y la constante ω_n se llama **frecuencia natural no amortiguada** del sistema. De particular interés resulta la respuesta forzada de esta ecuación para entradas u pertenecientes a la clase de funciones de singularidad. Esto es, la *respuesta forzada* a un impulso unitario, un paso unitario o una rampa unitaria, es lo mismo que la *respuesta impulso unitario*, la *respuesta paso unitario* o la *respuesta rampa unitaria* de un sistema representado por esta ecuación.

Suponiendo que $0 \leq \zeta \leq 1$, la ecuación característica de la ecuación (*3.22*) es

$$D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2 = \left(D + \zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right)\left(D + \zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\right) = 0$$

De aquí que las raíces sean

$$D_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \equiv -\alpha + j\omega_d \qquad D_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \equiv -\alpha - j\omega_d$$

en donde $\alpha \equiv \zeta\omega_n$ se llama el **coeficiente de amortiguación, y** $\omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ se llama **frecuencia natural amortiguada.** α es el inverso de la **constante de tiempo** τ del sistema, esto es $\tau = 1/\alpha$.

La función de ponderación de la ecuación (*3.22*) es $w(t) = (1/\omega_d)e^{-\alpha t}$ sen $\omega_d t$. La respuesta paso unitario está dada por

$$y_1(t) = \int_0^t w(t-\tau)\omega_n^2\, d\tau = 1 - \frac{\omega_n e^{-\alpha t}}{\omega_d}\operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \tag{3.23}$$

en donde $\phi \equiv \tan^{-1}(\omega_d/\alpha)$.

La figura 3-4 es una representación paramétrica de la respuesta paso unitario. Note que la abscisa de esta familia de curvas es el tiempo normalizado $\omega_n t$ y el parámetro que define cada curva es la razón de amortiguación ζ.

3.15 Representación por variables de estado de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales

En algunos problemas de retroalimentación y control es más conveniente describir un sistema mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden, en lugar de hacerlo por una o más ecuaciones diferenciales de n-simo orden. Una razón para ello es que pueden aplicarse más fácilmente resultados bastante generales y más poderosos a partir del álgebra vectorial y matricial para obtener las soluciones a las ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 3.30. Considere la forma diferencial de la segunda ley de Newton, $f = M(d^2x/dt^2)$. De los significados de velocidad v y aceleración a, resulta claro que esta ecuación de segundo orden puede remplazarse por dos ecuaciones de primer orden, $v = dx/dt$ y $f = M(dv/dt)$.

Hay numerosas maneras de transformar ecuaciones diferenciales de n-simo orden en n ecuaciones de primer orden. Una de éstas es bastante frecuente en la literatura, y únicamente la presentamos aquí a modo de ilustración. Considere la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de n-simo orden y una sola entrada.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = u$$

Esta ecuación siempre puede remplazarse por las siguientes n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\
&\vdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\
\frac{dx_n}{dt} &= -\frac{1}{a_n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}\right] + \frac{1}{a_n}u
\end{aligned} \tag{3.24a}$$

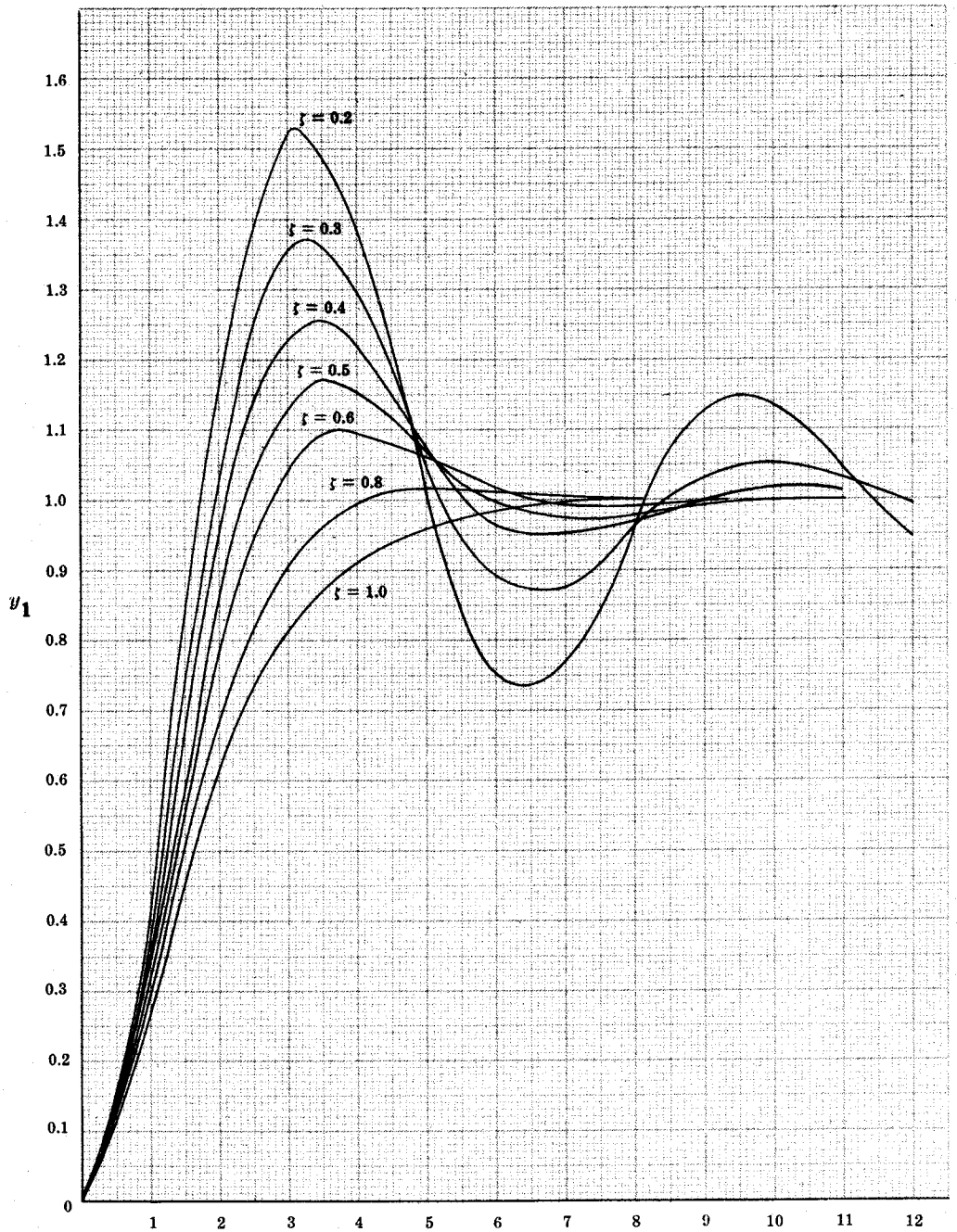

$\zeta = 0.2$
$\zeta = 0.3$
$\zeta = 0.4$
$\zeta = 0.5$
$\zeta = 0.6$
$\zeta = 0.8$
$\zeta = 1.0$
y_1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
Tiempo normalizado

Figura 3-4

en donde hemos escogido $x_1 = y$. Utilizando la notación de *vectores y matrices*, este conjunto de ecuaciones puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u \qquad (3.24b)$$

o de manera más compacta como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \qquad (3.24c)$$

En la ecuación (*3.24c*) $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t)$ se denomina **vector de estado**, con n funciones de tiempo $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_n(t$ como elementos, llamados **variables de estado** del sistema. La entrada escalar del sistema es $u(t)$.

De una manera más general, los *sistemas multientrada-multisalida* (*MEMS*) descritos por una o más ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, pueden representarse mediante una ecuación diferencial de vectores y matrices de la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \qquad (3.25a)$$

o de forma más compacta como

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \qquad (3.25b)$$

En la ecuación (*3.25b*) $\mathbf{x}$ se define como en la ecuación (*3.24c*), A es la matriz $n \times n$ de constantes a_{ij}, y B es la matriz $n \times r$ de constantes b_{ij}, cada una dada en la ecuación (*3.25a*), y $\mathbf{u}$ es un vector r de funciones de entrada.

La matriz de transición

La ecuacion matricial

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi$$

en donde Φ es una matriz $n \times n$ de funciones de tiempo, llamada **matriz de transición de la ecuación diferencial** (*3.24c*) o (*3.25b*), juega un papel especial en la solución de ecuaciones diferenciales de vectores y matrices como la ecuación (*3.25b*). Si I es la matriz $n \times n$ *identidad* o *unidad* y $\Phi(0) = I$ es la condición inicial de esta ecuación homogénea, la matriz de transición tiene la solución especial: $\Phi(t) = e^{At}$. En este caso e^{At} es una función matricial $n \times n$ definida por la serie infinita:

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots$$

Φ también tiene la *propiedad de transición*, según la cual, para todo t_1, t_2 y t_3: $\Phi(t_1 - t_2)\Phi(t_2 - t_3) = \Phi(t_1 - t_3)$.

Para resolver la ecuación diferencial (*3.24*) o la (*3.25*) debe especificarse el intervalo de tiempo de interés, por ejemplo, $0 \leq t < +\infty$, también se necesita el vector de condición inicial $\mathbf{x}(0)$. En este caso, la solución general de la ecuación (*3.25*) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)\,d\tau \qquad (3.26)$$

La condición inicial $\mathbf{x}(0)$ se conoce, algunas veces, como el **estado del sistema en el tiempo t = 0**. De la ecuación (*3.26*) vemos que el conocimiento de $\mathbf{x}(0)$, y de la entrada $\mathbf{u}(t)$ en el intervalo $0 \leq t < +\infty$, son adecuados para determinar completamente las variables de estado para cualquier tiempo $t \geq 0$. En realidad, *el conocimiento del estado del sistema* en cualquier *tiempo* t', tal que $0 < t' < +\infty$, y el conocimiento de la entrada $u(t)$ para $t' \leq t < +\infty$, son adecuados para definir completamente el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ en todos los tiempos subsiguientes $t \geq t'$.

3.16 Solución de ecuaciones de diferencia lineales con coeficientes constantes

Considere la clase de ecuaciones de diferencia

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = \sum_{i=0}^{m} b_i u(k+i) \qquad (3.27)$$

en donde k es la variable discreta de tiempo de valor entero, los coeficientes a_i y b_i son constantes, a_0 y a_n son diferentes de cero, la entrada $u(k)$ es una secuencia de tiempo conocida, y la salida $y(k)$ es la secuencia desconocida, solución de la ecuación. Puesto que $y(k+n)$ es una función explícita de $y(k)$, $y(k+1),\ldots, y(k+n-1)$, entonces el **orden de la ecuación de diferencia** es n. Para obtener una solución única para $y(k)$ deben especificarse dos términos adicionales, la secuencia de

tiempo sobre el cual se desea una solución, y un conjunto de n condiciones iniciales para $y(k)$. La secuencia de tiempo para los problemas tratados en este libro es el conjunto de enteros no negativos, es decir, $k = 0,1,2,\ldots$ El conjunto de condiciones iniciales es

$$y(0), y(1), \ldots, y(n-1) \tag{3.28}$$

Un problema que se defina sobre esta secuencia de tiempo y con estas condiciones iniciales se denomina **problema del valor inicial.**

Considere la ecuación de diferencia lineal con coeficientes constantes de n-simo orden

$$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-1) + \cdots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = u(k) \tag{3.29}$$

Es conveniente definir un **operador de desplazamiento** Z mediante la ecuación

$$Z[y(k)] \equiv y(k+1)$$

Por aplicación repetida de esta operación, obtenemos

$$Z^n[y(k)] = Z[Z[\ldots Z[y(k)]\ldots]] = y(k+n)$$

De manera similar, se define un **operador unitario** I, mediante

$$I[y(k)] = y(k)$$

y $Z^0 \equiv I$. El operador Z tiene las siguientes propiedades algebraicas importantes:

1. Para c constante, ..., $Z[cy(k)] = cZ[y(k)]$
2. $Z^m[y(k) + x(k)] = Z^m[y(k)] + Z^m[x(k)]$

Así, la ecuación de diferencia puede escribirse como

$$Z^n[y(k)] + a_{n-1}Z^{n-1}[y(k)] + \cdots + a_1 Z[y(k)] + a_0 y(k) = u(k)$$

$$\text{o} \quad \left(Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0\right)[y(k)] = u(k)$$

La ecuación $$Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0 = 0 \tag{3.30}$$

se llama **ecuación característica** de la ecuación de diferencia y, por el teorema fundamental del álgebra, tiene exactamente n soluciones: $Z = Z_1$, $Z = Z_2, \ldots, Z = Z_n$.

EJEMPLO 3.31. Considere la ecuación de diferencia

$$y(k+2) + \frac{5}{6}y(k+1) + \frac{1}{6}y(k) = u(k)$$

La ecuación característica es $Z^2 + \frac{5}{6}Z + \frac{1}{6} = 0$, con dos soluciones $Z = -\frac{1}{2}$ y $Z = -\frac{1}{3}$.

Una ecuación de diferencia lineal homogénea de n-simo orden tiene por lo menos un conjunto de n soluciones linealmente independientes. Cualquiera de tales conjuntos se llama **conjunto fundamental**. Al igual que las ecuaciones diferenciales, los conjuntos fundamentales no son únicos.

Si la ecuación característica tiene $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ raíces distintas, un conjunto fundamental para la ecuación homogénea

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = 0 \tag{3.31}$$

es el conjunto de funciones $Z_1^k, Z_2^k, \ldots, Z_n^k$.

EJEMPLO 3.32. La ecuación de diferencia

$$y(k+2) + \frac{5}{6}y(k+1) + \frac{1}{6}y(k) = 0$$

tiene la ecuación característica $Z^2 + \frac{5}{6}Z + \frac{1}{6} = 0$, con raíces $Z = Z_1 = -\frac{1}{2}$ y $Z = Z_2 = -\frac{1}{3}$. Un conjunto fundamental de esta ecuación es $y_1(k) = (-\frac{1}{2})^k$ y $y_2(k) = (-\frac{1}{3})^k$.

Si la ecuación característica tiene raíces repetidas, entonces existen n_i elementos del conjunto fundamental $Z_i^k, kZ_i^k, \ldots, k^{n_i-2}Z_i^k, k^{n_i-1}Z_i^k$, para cada raíz Z_i de multiplicidad n_i.

EJEMPLO 3.33. La ecuación $y(k+2) + y(k+1) + \frac{1}{4}y(k) = 0$ con la raíz repetida $Z = -\frac{1}{2}$ tiene un conjunto fundamental que consiste de $(-\frac{1}{2})^k$ y $k(-\frac{1}{2})^k$.

La respuesta libre de una ecuación de diferencia de la forma de la ecuación (*3.27*), es la solución cuando la secuencia de entrada es idéntica a cero. La ecuación tiene entonces la forma de la ecuación (*3.31*), y su solución depende únicamente de las n condiciones iniciales (*3.28*). Si $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$ es un conjunto fundamental, entonces cualquier respuesta libre de la ecuación de diferencia (*3.27*) puede representarse como

$$y_a(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(k)$$

en donde las constantes se definen en términos de las condiciones iniciales $y_i(0)$ a partir del conjunto de las n ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} y(0) &= \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(0) \\ y(1) &= \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(1) \\ &\vdots \\ y(n-1) &= \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(n-1) \end{aligned} \tag{3.32}$$

La independencia lineal de $y_i(k)$ garantiza una solución para $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

EJEMPLO 3.34. La respuesta libre de la ecuación de diferencia $y(k+2) + \frac{5}{6}y(k+1) + \frac{1}{6}y(k) = u(k)$ con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$ se determina haciendo

$$y_a(k) = c_1\left(-\frac{1}{2}\right)^k + c_2\left(-\frac{1}{3}\right)^k$$

en donde c_1 y c_2 son los coeficientes desconocidos, y $(-\frac{1}{2})^k$ y $(-\frac{1}{3})^k$ son un conjunto fundamental para la ecuación (*véase* el ejemplo 3.32). Puesto que $y_a(k)$ debe satisfacer las condiciones iniciales, esto es,

$$y_a(0) = y(0) = 0 = c_1 + c_2$$
$$y_a(1) = y(1) = 1 = -\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{3}c_2$$

entonces $c_1 = -6$ y $c_2 = 6$. La respuesta libre está dada entonces por $y_a(k) = -6(-\frac{1}{2})^k + 6(-\frac{1}{3})^k$.

La respuesta forzada $y_b(k)$ de una ecuación de diferencia es su solución cuando todas las condiciones iniciales $y(0), y(1), \ldots, y(n-1)$ son cero. Esta puede escribirse en términos de una *suma de convolución*:

$$y_b(k) = \sum_{j=0}^{k-1} w(k-j)\left[\sum_{i=0}^{m} b_i u(j+i)\right] \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{3.33}$$

en donde $w(k-j)$ es la **secuencia de ponderación de la ecuación de diferencia.** Nótese que por definición de la respuesta forzada $y_b(0) = 0$, y $w(k-j) = 0$ para $k < j$ (*véase* la sección 3.19). Si $u(j) \equiv \delta(j) = 1$ para $j = 0$, y $\delta(j) = 0$ para $j = 0$, esta entrada especial se denomina **secuencia delta de Kronecker**, entonces la respuesta forzada $y_b(k) \equiv y_\delta(k)$ se llama **respuesta delta de Kronecker.**

La secuencia de ponderación de una ecuación de diferencia lineal con coeficientes constantes puede escribirse como

$$w(k-l) = \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j(l)}{a_n M(l)} y_j(k) \tag{3.34}$$

en donde $y_1(k), y_2(k), \ldots, y_n(k)$ es un conjunto fundamental de la ecuación de diferencia, $M(l)$ es el **determinante**:

$$M(l) = \begin{vmatrix} y_1(l+1) & y_2(l+1) & \cdots & y_n(l+1) \\ y_1(l+2) & y_2(l+2) & \cdots & y_n(l+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(l+n) & y_2(l+n) & \cdots & y_n(l+n) \end{vmatrix}$$

y $M_j(l)$ es el **cofactor** del último elemento en la j-ésima columna de $M(l)$.

EJEMPLO 3.35. Considere la ecuación de diferencia $y(k+2)+\frac{5}{6}y(k+1)+\frac{1}{6}y(k)=u(k)$. La secuencia de ponderación está dada por

$$w(k-l)=\frac{M_1(l)}{M(l)}y_1(k)+\frac{M_2(l)}{M(l)}y_2(k)$$

en donde $y_1(k)=(-\frac{1}{2})^k$, $y_2(k)=(-\frac{1}{3})^k$, $M_1(l)=-(-\frac{1}{3})^{l+1}$, $M_2(l)=(-\frac{1}{2})^{l+1}$, y

$$M(l)=\begin{vmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)^{l+1} & \left(-\frac{1}{3}\right)^{l+1}\\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{l+2} & \left(-\frac{1}{3}\right)^{l+2}\end{vmatrix}=\frac{1}{36}\left(-\frac{1}{2}\right)^{l}\left(-\frac{1}{3}\right)^{l}$$

En consecuencia

$$w(k-l)=12\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-l}-18\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-l}$$

Al igual que para los sistemas continuos, la **respuesta total** de una ecuación de diferencia es la suma de las respuestas libre y forzada de la ecuación. La **respuesta transitoria** de una ecuación de diferencia es aquella parte de la respuesta total que se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Aquella parte de la respuesta total que no se aproxima a cero se llama **respuesta en estado estacionario.**

3.17 Representación por variables de estado de sistemas descritos por ecuaciones de diferencia lineales

Como sucede con las ecuaciones diferenciales de la sección 3.15, a menudo es útil describir un sistema por medio de un conjunto de ecuaciones de diferencia de primer orden, en lugar de hacerlo por una o más ecuaciones de diferencia de n-simo orden.

EJEMPLO 3.36. La ecuación de diferencia de segundo orden

$$y(k+2)+\frac{5}{6}y(k+1)+\frac{1}{6}y(k)=u(k)$$

puede escribirse como dos ecuaciones de primer orden

$$x_1(k+1)=x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=-\frac{5}{6}x_2(k)-\frac{1}{6}x_1(k)+u(k)$$

en donde hemos elegido $x_1(k)\equiv y(k)$.

Considere la ecuación de diferencia lineal con coeficientes constantes de n-simo orden con una sola entrada.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y(k+i) = u(k)$$

Esta ecuación siempre puede remplazarse por las siguientes n ecuaciones de diferencia de primer orden:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_2(k) \\ x_2(k+1) &= x_3(k) \\ &\vdots \\ x_{n-1}(k+1) &= x_n(k) \\ x_n(k+1) &= -\frac{1}{a_n}\left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1}(k)\right] + \frac{1}{a_n}u(k) \end{aligned} \tag{3.35a}$$

en donde hemos escogido $x_1(k) \equiv y(k)$. Utilizando la notación de vectores y matrices, este conjunto de ecuaciones puede escribirse como la ecuación de diferencia de *vectores y matrices*

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & 1 \\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & \cdots & & -a_{n-1}/a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1/a_n \end{bmatrix} u \tag{3.35b}$$

o de manera más compacta, como

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u \tag{3.35c}$$

En estas ecuaciones $\mathbf{x}(k)$ es un elemento vector n de una secuencia de tiempo llamada **vector de estado**, conformado por los elementos escalares $x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)$ llamados **variables de estado** del sistema en el tiempo k.

En general, los sistemas *multientrada-multisalida* (MEMS) descritos por una o más ecuaciones de diferencia lineales con coeficientes constantes pueden presentarse por

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k) \tag{3.36}$$

en donde $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estado del sistema; como antes, A es una matriz $n \times n$ de constantes a_{ij}, y B es una matriz $n \times r$ de constantes b_{ij}, cada una definida como en la ecuación (*3.25a*), y $\mathbf{u}(k)$ es un elemento vector r de una secuencia de entrada (múltiple). Dados una secuencia de tiempo de interés, $k = 0,1,2,\ldots$, y un vector $\mathbf{x}(0)$ de condición inicial, la solución de la ecuación (*3.36*) puede escribirse como

$$\mathbf{x}(k) = A^k\mathbf{x}(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j}B\mathbf{u}(j) \tag{3.37}$$

Nótese que la ecuación (*3.37*) tiene una forma similar a la (*3.26*). Sin embargo, en general, no se necesita que A^k tenga las propiedades de una matriz de transición de una ecuación diferencial. Pero hay un caso muy importante cuando A^k tiene tales propiedades, es decir, en donde A^k es una matriz de transición. Este caso proporciona la base de la *discretización* de las ecuaciones diferenciales, como se ilustra a continuación.

Discretización de ecuaciones diferenciales

Considere un sistema *diferencial* descrito por la ecuación (*3.26*). Suponga que sólo es necesario tener conocimiento de las variables de estado en instantes periódicos de tiempo $t = 0, T, 2T, \ldots, kT, \ldots$ En este caso, puede escribirse la siguiente *secuencia* de vectores de estado como

$$\mathbf{x}(T) = e^{AT}\mathbf{x}(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\mathbf{x}(2T) = e^{AT}\mathbf{x}(T) + e^{AT}\int_T^{2T} e^{A(T-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{x}(kT) = e^{AT}\mathbf{x}((k-1)T) + e^{A(k-1)T}\int_{(k-1)T}^{kT} e^{A(T-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

Si suprimimos el parámetro T, utilizamos la abreviatura $\mathbf{x}(k) \equiv \mathbf{x}(kT)$ y definimos una nueva *secuencia* de entrada mediante

$$\mathbf{u}'(k) = e^{AkT}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(T-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)\,d\tau$$

entonces el conjunto anterior de ecuaciones de solución puede remplazarse por la *ecuación de diferencia de matrices y vectores*

$$\mathbf{x}(k+1) = e^{AT}\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}'(k) \tag{3.38}$$

Nótese que $A' \equiv e^{AT}$ es una matriz de transición en la ecuación (*3.38*).

3.18 Linealidad y superposición

En la definición 3.8 se presentó el concepto de linealidad como una propiedad de las ecuaciones diferenciales y de diferencia. En esta sección, la linealidad se plantea como una propiedad de los *sistemas generales*, con una variable independiente, el tiempo t. En los Capítulos 1 y 2 se definieron los conceptos de sistema, entrada y salida. La siguiente definición de linealidad se basa en estas definiciones.

Definición 3.21: Si todas las condiciones iniciales en un sistema son cero, esto es, si el sistema está completamente en reposo, entonces el **sistema** es **lineal** si tiene la siguiente propiedad:

a) Si una entrada $u_1(t)$ produce una salida $y_1(t)$ y
b) una entrada $u_2(t)$ produce una salida $y_2(t)$,
c) entonces $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ produce una salida $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ para todos los pares de entradas $u_1(t)$ y $u_2(t)$ y para todos los pares de constantes c_1 y c_2.

A menudo los sistemas lineales pueden representarse mediante ecuaciones lineales diferenciales o de diferencia.

EJEMPLO 3.37. Un sistema es *lineal* si su relación de entrada-salida puede describirse mediante la ecuación diferencial lineal

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i(t)\frac{d^i u}{dt^i} \tag{3.39}$$

en donde $y = y(t)$ es la salida del sistema, y $u = u(t)$ es la entrada del mismo.

EJEMPLO 3.38. Un sistema es lineal si la relación de entrada-salida puede describirse mediante la **integral de convolución**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t,\tau)\,u(\tau)\,d\tau \tag{3.40}$$

en donde $w(t, \tau)$ es la **función de ponderación**, que incorpora las propiedades físicas internas del sistema, $y(t)$ es la salida, y $u(t)$ es la entrada.

En la sección 3.10 se analizó la relación entre los sistemas de los ejemplos 3.37 y 3.38. A menudo el concepto de linealidad se expresa por el *principio de superposición*.

Principio de superposición: La respuesta $y(t)$ de un sistema lineal, debida a varias entradas $u_1(t)$, $u_2(t),\ldots, u_n(t)$ que actúan simultáneamente, es igual a la suma de las respuestas a cada entrada actuando solas, cuando todas las condiciones iniciales en el sistema son cero. Esto es, si $y_i(t)$ es la respuesta debida a la entrada $u_i(t)$, entonces

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)$$

EJEMPLO 3.39. Un sistema lineal se describe por la ecuación algebraica lineal

$$y(t) = 2u_1(t) + u_2(t)$$

en donde $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = t^2$ son las entradas, y $y(t)$ es la salida. Cuando $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = 0$, entonces $y(t) = y_1(t) = 2t$. Cuando $u_1(t) = 0$ y $u_2(t) = t^2$, entonces $y(t) = y_2(t) = t^2$. La salida total resultante de $u_1(t) = t$ y $u_2(t) = t_2$ es entonces igual a

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = 2t + t^2$$

El principio de superposición se deriva directamente de la definición de linealidad (definición 3.21). Cualquier sistema que satisfaga el principio de superposición es lineal.

3.19 Causalidad y sistemas realizables físicamente

Las propiedades de un sistema físico restringen la forma de su salida. Esta restricción se encuentra incorporada en el concepto de *causalidad*.

Definición 3.22: Un sistema en el cual el tiempo es la variable independiente se llama **causal** si la salida depende únicamente de los valores presente y pasado de la entrada. Esto es, si $y(t)$ es la salida, entonces $y(t)$ depende únicamente de la entrada $u(\tau)$ para valores de $\tau \leq t$.

Esta definición implica que un sistema *causal* es aquel en el cual no se puede anticipar cuál será la entrada futura. En concordancia con ello, los sistemas causales algunas veces se llaman **realizables físicamente.** Una consecuencia importante de la causalidad (la factibilidad física) es que la función de ponderación $w(t, \tau)$ de un sistema continuo lineal causal es idéntica a cero para $\tau > t$; esto es, los valores futuros de la entrada se ponderan a cero. Para sistemas causales discretos la secuencia de ponderación $w(k - j) \equiv 0$ para $j > k$.

Problemas resueltos

Ecuaciones de un sistema

3.1. La ley de Faraday establece que el voltaje v inducido entre los terminales de un inductor es igual a la tasa temporal de cambio de las líneas de flujo. La línea de flujo magnético que une una vuelta del devanado del inductor se define como línea de flujo. Suponga que se determina experimentalmente que el número de líneas de flujo λ está relacionado con la corriente i en el inductor, como se muestra en la figura 3-5. La curva es una línea aproximadamente recta para $-I_0 \leq i \leq I_0$. Determine una ecuación diferencial que relacione el voltaje inducido v y la corriente i, válida para $-I_0 \leq i \leq I_0$.

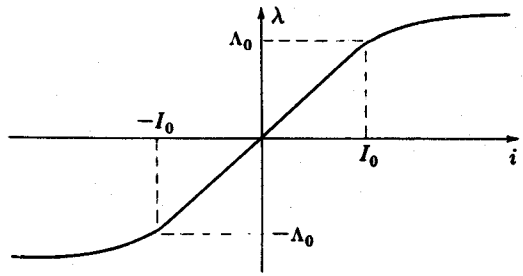


Figura 3-5

La ley de Faraday puede escribirse como $v = d\lambda/dt$. De la gráfica puede verse que

$$\lambda = \left(\frac{\Lambda_0}{I_0}\right) i = Li \qquad -I_0 \le i \le I_0$$

en donde $L \equiv \Lambda_0/I_0$ se denomina *inductancia* del inductor. La ecuación que relaciona v e i se obtiene sustituyendo Li por λ:

$$v = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = L\frac{di}{dt} \quad \text{en donde} \quad -I_0 \le i \le I_0$$

3.2. Determine una ecuación diferencial que relacione el voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$ para $t \ge 0$, para la red eléctrica de la figura 3.6. Suponga que el capacitor está descargado en el tiempo $t = 0$, la corriente i es cero en el tiempo $t = 0$, y se cierra el interruptor S en el tiempo $t = 0$.

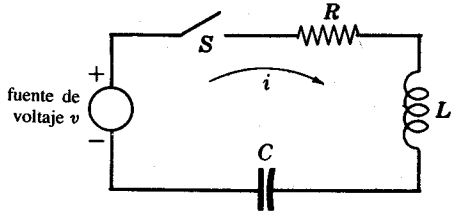


Figura 3.6

Mediante la ley de voltaje de Kirchhoff, el voltaje aplicado $v(t)$ es igual a la suma de las caídas de voltaje v_R, v_L y v_C a través del resistor R, el inductor L y el capacitor C, respectivamente. Así

$$v = v_R + v_L + v_C = Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau$$

Para eliminar la integral se derivan con respecto al tiempo ambos lados de la ecuación, resultando la ecuación diferencial deseada:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dv}{dt}$$

3.3. Las dos primeras leyes del movimiento planetario de Kepler establecen que:

1. La órbita de un planeta es una elipse con el sol en uno de sus focos.
2. El radio vector dibujado desde el sol a un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.

Encuentre dos ecuaciones diferenciales que describan el movimiento de un planeta alrededor del sol, utilizando las dos primeras leyes de Kepler.

A partir de la primera ley de Kepler, el movimiento de un planeta satisface la ecuación de una elipse:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

en donde r y θ se definen en la figura 3-7 y $p \equiv b^2/a = a(1 - e^2)$.

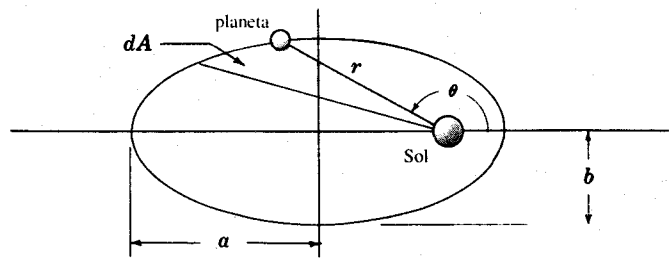


Figura 3-7

En un tiempo infinitesimal dt el ángulo θ se incrementa en una cantidad $d\theta$. El área barrida por el radio r durante el periodo dt es igual a $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. La velocidad a la cual se barre el área por el radio r es una constante (segunda ley de Kepler). Por tanto,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{constante} \qquad \text{o} \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = k$$

La primera ecuación diferencial se obtiene derivando este resultado con respecto al tiempo:

$$2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \qquad \text{o} \qquad 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

La segunda ecuación se obtiene derivando la ecuación de la elipse:

$$\frac{dr}{dt} = \left[\frac{pe\,\text{sen}\,\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}\right]\frac{d\theta}{dt}$$

Utilizando los resultados de $d\theta/dt = k/r^2$ y $(1 + e\cos\theta) = p/r$, dr/dt puede reescribirse como

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ek}{p}\text{sen}\,\theta$$

Derivando de nuevo y remplazando a $r^2(d\theta/dt)$ por k produce

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \left(\frac{e}{p}\right)\left(\frac{k^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

Pero $\cos\theta = (1/e)[p/r - 1]$. Por tanto

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k^2}{pr^2}\left[\frac{p}{r} - 1\right] = \frac{k^2}{r^3} - \frac{k^2}{pr^2}$$

Sustituyendo a $r(d\theta/dt)^2$ por k^2/r^3, obtenemos la segunda ecuación diferencial solicitada.

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{pr^2} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k^2}{pr^2}$$

3.4. Como resultado del trabajo de varios autores [2, 3, 4], se ha producido un modelo matemático para describir una característica de la organización del sistema nervioso denominada *inhibición lateral*. El fenómeno inhibitorio lateral puede describirse de manera simple como la interacción eléctrica inhibitoria entre las neuronas (células nerviosas) vecinas, lateralmente espaciadas. Cada neurona en este modelo tiene una respuesta c, medida por la frecuencia de descarga de pulsos en su axón (el "cable" o "alambre" de conexión). La respuesta se determina mediante una excitación r suministrada por un estímulo externo, y se disminuye mediante todas las influencias inhibitorias que actúan sobre las neuronas como resultado de la actividad de las neuronas vecinas. En un sistema de n neuronas, la respuesta en estado estacionario de la k-ésima neurona está dada por

$$c_k = r_k - \sum_{i=1}^{n} a_{k-i}c_i$$

en donde la constante a_{k-i} es el coeficiente inhibitorio de la acción de la neurona i sobre la neurona k. Depende solamente de la separación de la k-ésima y la i-ésima neuronas, y puede interpretarse como una *función de ponderación espacial*. Además, $a_m = a_{-m}$ (interacción espacial simétrica).

a) Si el efecto de la neurona i sobre la neurona k no se siente inmediatamente, sino que presenta un pequeño retardo de tiempo Δt, ¿cómo se modificaría el modelo?

b) Si la entrada $r_k(t)$ se determina únicamente por la salida c_k, Δt segundos antes de t [$r_k(t) = c_k(t - \Delta t)$], determine una ecuación diferencial aproximada para el sistema de la parte *a*).

a) La ecuación se hace

$$c_k(t) = r_k(t) - \sum_{i=1}^{n} a_{k-i}c_i(t - \Delta t)$$

b) Sustituyendo $c_k(t - \Delta t)$ por $r_k(t)$,

$$c_k(t) - c_k(t - \Delta t) = -\sum_{i=1}^{n} a_{k-i}c_i(t - \Delta t)$$

Dividiendo ambos lados por Δt,

$$\frac{c_k(t) - c_k(t - \Delta t)}{\Delta t} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{k-i}}{\Delta t} \right) c_i(t - \Delta t)$$

El lado izquierdo de la ecuación es aproximadamente igual a dc_k/dt para Δt pequeño. Si además suponemos que $c_i(t - \Delta t) \cong c_i(t)$ para Δt pequeño, obtenemos entonces la ecuación diferencial aproximada

$$\frac{dc_k}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{k-i}}{\Delta t} \right) c_i(t) = 0$$

3.5. Determine una ecuación matemática que describa una salida de datos muestreados para el muestreador ideal descrito en la definición 2.12 y el ejemplo 2.8.

Una representación conveniente de la salida en un muestreador ideal se basa en la extensión del concepto de función de impulso unitario $\delta(t)$ a un **tren de impulsos**, definido para $t \geq 0$ como la función

$$m_{\mathrm{IT}}(t) = \delta(t) + \delta(t - t_1) + \delta(t - t_2) + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - t_k)$$

en donde $t_0 = 0$ y $t_{k+1} > t_k$. La señal muestreada $u^*(t)$ está dada entonces por

$$u^*(t) = u(t)\, m_{\mathrm{IT}}(t) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - t_k)$$

La utilidad de esta representación se desarrolla al comienzo del Capítulo 4, en seguida de la introducción de los métodos de transformada.

3.6. Demuestre cómo la red simple R-C, que se da en la figura 3-8, puede usarse para aproximar la función de muestreo y la función de sostenimiento (de orden cero), descrito en el ejemplo 2.9.

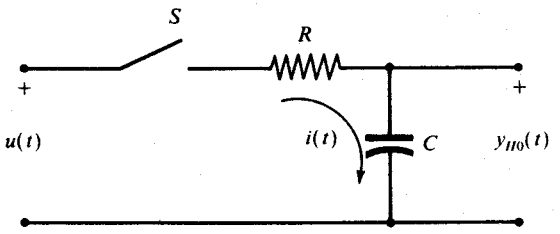


Figura 3-8

Este sistema opera como sigue. Cuando el interruptor de muestreo S se cierra, se carga el capacitor C a través del resistor R, y el voltaje a través de C se aproxima a la entrada $u(t)$. Cuando S se abre, el capacitor no puede liberar su carga porque la corriente (carga) no tiene en donde disiparse, así que sostiene su voltaje hasta la siguiente vez que S se cierre. Si describimos la apertura y el cierre del interruptor mediante la función simple

$$m_S(t) = \begin{cases} 1 & \text{Si } S \text{ está abierto} \\ 0 & \text{Si } S \text{ está cerrado} \end{cases}$$

podemos decir que la corriente a través de R y C está *modulada* por $m_s(t)$. En estos términos, podemos escribir

$$i(t) = m_S(t)\left(\frac{u(t) - y_{H0}(t)}{R}\right)$$

y puesto que $i = C dy_{H0}/dt$, la ecuación diferencial para este circuito es

$$\frac{dy_{H0}}{dt} = \left(\frac{u - y_{H0}}{RC}\right) m_S(t)$$

Notamos que ésta es una ecuación diferencial *variable en el tiempo*, debido al efecto multiplicativo de la función $m_S(t)$ en el lado derecho. También, a medida que RC se hace más pequeño, es decir, $1/RC$ se hace más grande, dy_{H0}/dt se hace más grande y el capacitor se carga más rápidamente. Así, un RC más pequeño en este circuito crea una mejor aproximación de la función de muestreo y de sostenimiento.

3.7. Si el muestreador del problema anterior es ideal, y la velocidad de muestreo es uniforme, con un periodo T, ¿cuál es la ecuación diferencial?

En el problema 3.5 se definió la función moduladora $m_{TI}(t)$ del tren de impulsos del muestreador ideal. Así que la ecuación diferencial del muestreo y del sostenimiento se hace

$$\frac{dy_{H0}}{dt} = \left(\frac{u - y_{H0}}{RC}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

En esta idealización, los impulsos remplazan los pulsos de corriente.

Clasificaciones de las ecuaciones diferenciales

3.8. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales dependiendo de si son ordinarias o parciales. Indique las variables dependientes e independientes.

$$a) \quad \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + x + y = 0 \qquad x = x(t) \qquad y = y(t)$$

$$b) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + x + y = 0 \qquad f = f(x, y)$$

$$c) \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 0 \qquad f = x^2 + \frac{dx}{dt}$$

$$d) \quad \frac{df}{dx} = x \qquad f = y^2(x) + \frac{dy}{dx}$$

a) Ordinaria; variable independiente t; variables dependientes x e y.

b) Parcial; variables independientes x e y; variable dependiente f.

c) Puesto que $\partial f/\partial x = 2x$, entonces $(d/dt)[\partial f/\partial x] = 2(dx/dt) = 0$, que es una ecuación diferencial ordinaria; variable independiente t; variable dependiente x.

d) $df/dx = 2y(dy/dx) + d^2y/dx^2 = x$, que es una ecuación diferencial ordinaria; variable independiente x; variable dependiente y.

3.9. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales lineales dependiendo de si son variables o invariables en el tiempo. Indique los términos variables en el tiempo, si los hay

a) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2y = 0$ *c)* $\left(\dfrac{1}{t+1}\right)\dfrac{d^2y}{dt^2} + \left(\dfrac{1}{t+1}\right)y = 0$

b) $\dfrac{d}{dt}(t^2y) = 0$ *d)* $\dfrac{d^2y}{dt^2} + (\cos t)y = 0$

a) Invariable en el tiempo

b) $(d/dt)(t^2y) = 2ty + t^2(dy/dt) = 0$. Dividiendo todo por t, se obtiene t, $t(dy/dt) + 2y = 0$ la cual es variable en el tiempo. El término variable en el tiempo es $t(dy/dt)$.

c) Multiplicando todo por $t + 1$, obtenemos $d^2y/dt^2 + y = 0$ la cual es invariable en el tiempo.

d) Variable en el tiempo; el término variable en el tiempo es $(\cos t)y$.

3.10. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales dependiendo de si son lineales o no lineales. Indique las variables independientes y dependientes, y los términos no lineales, si los hay.

a) $t\dfrac{dy}{dt} + y = 0 \quad y = y(t)$ *d)* $(\cos t)\dfrac{d^2y}{dt^2} + (\operatorname{sen} 2t)y = 0 \quad y = y(t)$

b) $y\dfrac{dy}{dt} + y = 0 \quad y = y(t)$ *e)* $(\cos y)\dfrac{d^2y}{dt^2} + \operatorname{sen} 2y = 0 \quad y = y(t)$

c) $\dfrac{dy}{dt} + y^2 = 0 \quad y = y(t)$ *f)* $(\cos x)\dfrac{d^2y}{dt^2} + \operatorname{sen} 2x = 0 \quad y = y(t),\ x = x(t)$

a) Lineal; variable independiente t; variable dependiente y.

b) No lineal; variable independiente t; variable dependiente y; término no lineal $y(dy/dt)$.

c) No lineal; variable independiente t; variable dependiente y; término no lineal y^2.

d) Lineal; variable independiente t; variable dependiente y.

e) No lineal; variable independiente t; variable dependiente y; términos no lineales $(\cos y)d^2y/dt^2$ y sen $2y$.

f) No lineal; variable independiente t; variables dependientes x e y; términos no lineales $(\cos x)d^2y/dt^2$ y sen $2x$.

3.11. ¿Por qué ninguna de las funciones trascendentales es de primer grado?

Las funciones trascendentales, tales como las logarítmicas, las trigonométricas y las hiperbólicas y sus correspondientes inversas, no son de primer orden porque ellas se definen o pueden escribirse como series infinitas. Por tanto su grado es, en general, igual a *infinito*. Por ejemplo

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

en la cual el primer término es de primer grado, el segundo es de tercer grado, y así sucesivamente.

La ecuación característica

3.12. Encuentre el polinomio característico y la ecuación característica para cada sistema:

$$a) \quad \frac{d^4y}{dt^4} + 9\frac{d^2y}{dt^2} + 7y = u \qquad b) \quad \frac{d^4y}{dt^4} + 9\frac{d^2y}{dt^2} + 7y = \operatorname{sen} u$$

a) Haciendo $D^n \equiv d^n/dt^n$ para $n = 2$ y $n = 4$, el polinomio característico es $D^4 + 9D^2 + 7$; y la ecuación característica es $D^4 + 9D^2 + 7 = 0$.

b) Aunque la ecuación dada en la parte *b)* es no lineal, mediante la definición 3.8 (el término sen u no es de primer grado en u), podemos tratarla como una ecuación lineal si arbitrariamente hacemos sen $u = x$, y tratamos a x como una segunda variable dependiente, la cual representa la entrada. En este caso, la parte *b)* tiene la misma respuesta que la parte *a)*.

3.13. Determine la solución de la ecuación característica del problema anterior.

Hagamos $D^2 \equiv E$. Entonces, $D^4 = E^2$, y la ecuación característica se convierte en cuadrática:

$$E^2 + 9E + 7 = 0 \qquad E = -\frac{9 \pm \sqrt{53}}{2} \qquad \text{y} \qquad D = \pm\sqrt{\frac{-9 \pm \sqrt{53}}{2}}$$

Independencia lineal y conjuntos fundamentales

3.14. Demuestre que para que un conjunto de n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sea linealmente independiente, es condición suficiente que el determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \dfrac{df_1}{dt} & \dfrac{df_2}{dt} & \cdots & \dfrac{df_n}{dt} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{d^{n-1}f_1}{dt^{n-1}} & \dfrac{d^{n-1}f_2}{dt^{n-1}} & \cdots & \dfrac{d^{n-1}f_n}{dt^{n-1}} \end{vmatrix}$$

sea diferente de cero. Este determinante se llama **wronskiano** de las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

Suponiendo que las f_i son derivables por lo menos $n-1$ veces, dejemos que las $n-1$ derivadas de

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0$$

se formen como sigue, en donde los c_i son las constantes desconocidas:

$$c_1 \frac{df_1}{dt} + c_2 \frac{df_2}{dt} + \cdots + c_n \frac{df_n}{dt} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_1 \frac{d^{n-1} f_1}{dt^{n-1}} + c_2 \frac{d^{n-1} f_2}{dt^{n-1}} + \cdots + c_n \frac{d^{n-1} f_n}{dt^{n-1}} = 0$$

Estas ecuaciones pueden considerarse como n ecuaciones lineales homogéneas simultáneas en las n constantes desconocidas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ con coeficientes dados por los elementos del wronskiano. Es bien conocido que estas ecuaciones tienen una solución diferente de cero para $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (es decir, no todos los c_i son iguales a cero) si y sólo si el determinante de los coeficientes (el wronskiano) es igual a cero. En consecuencia, si el wronskiano es diferente de cero, la única solución para $c_1, c_2, \ldots, c_n$ es la solución degenerada $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Evidentemente, esto equivale a decir que si el wronskiano es diferente de cero, las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente independientes, puesto que la única solución para $c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0$ es entonces $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. En consecuencia, una condición suficiente para la independencia lineal de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ es que el wronskiano sea diferente de cero. Esta no es condición *necesaria*; es decir, existen conjuntos de funciones linealmente independientes para los cuales el wronskiano *es* cero.

3.15. Demuestre que las funciones 1, t, t_2 son linealmente independientes.

El wronskiano de estas tres funciones (véase el problema 3.14) es

$$\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Puesto que el wronskiano es diferente de cero, las funciones son linealmente independientes.

3.16. Determine un conjunto fundamental para las ecuaciones diferenciales

$$a) \quad \frac{d^3y}{dt^3} + 5\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 4y = u \qquad b) \quad \frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y = u$$

a) El polinomio característico es $D^3 + 5D^2 + 8D + 4$, el cual puede escribirse en forma factorizada como $(D+2)(D+2)(D+1)$. Correspondiente a la raíz $D_1 = -1$ hay una solución e^{-t}, y correspondiente a la raíz repetida $D_2 = D_3 = -2$ hay dos soluciones e^{-2t} y te^{-2t}. Las tres soluciones constituyen un conjunto fundamental.

b) El polinomio característico es $D^3 + 4D^2 + 6D + 4$, el cual puede escribirse en forma factorizada como $(D + 1 + j)(D + 1 - j)(D + 2)$.

Entonces un conjunto fundamental es $e^{(-1-j)t}$, $e^{(-1+j)t}$, y e^{-2t}.

3.17. Para las ecuaciones diferenciales del problema 3.16, encuentre conjuntos fundamentales diferentes de los encontrados allí.

a) Escojamos cualquier determinante 3×3 diferente de cero, digamos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -5$$

Utilizando los elementos de la primera fila como coeficientes a_{1i} para el conjunto fundamental e^{-t}, e^{-2t}, te^{-2t}, encontrado en el problema 3.16, se forma

$$z_1 = e^{-t} + 2e^{-2t} - te^{-2t}$$

Utilizando la segunda fila, se forma

$$z_2 = -3e^{-t} + 2e^{-2t}$$

De la tercera fila, se forma

$$z_3 = e^{-t} + 3e^{-2t} - 2te^{-2t}$$

Las funciones z_1, z_2 y z_3, constituyen un conjunto fundamental.

b) Para esta ecuación generamos el segundo conjunto fundamental haciendo

$$z_1 = e^{-2t}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}e^{(-1+j)t} + \frac{1}{2}e^{(-1-j)t} = e^{-t}\left(\frac{e^{-jt} + e^{jt}}{2}\right)$$

$$= e^{-t}\left(\frac{\cos t - j \operatorname{sen} t + \cos t + j \operatorname{sen} t}{2}\right) = e^{-t}\cos t$$

$$z_3 = \frac{1}{2j}e^{(-1+j)t} - \frac{1}{2j}e^{(-1-j)t} = e^{-t}\left(\frac{e^{t} - e^{-jt}}{2j}\right)$$

$$= e^{-t}\left(\frac{\cos t + j \operatorname{sen} t - \cos t + j \operatorname{sen} t}{2j}\right) = e^{-t}\operatorname{sen} t$$

El determinante de coeficientes en este caso es

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2j} & -\frac{1}{2j} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2j}$$

Solución de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes

3.18. Demuestre que cualquier respuesta libre $y_a(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)$ satisface $\sum_{i=0}^{n} a_i(d^i y/dt^i) = 0$.

Por la definición de conjunto fundamental, $y_k(t)$, $k = 1,2,\ldots, n$ satisface $\sum_{i=0}^{n} a_i(d^i y_k/dt^i) = 0$. Sustituyendo $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)$ en esta ecuación diferencial se produce

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i}\left[\sum_{k=1}^{n} c_k y_k(t)\right] = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i}(c_k y_k(t)) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left[\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y_k(t)}{dt^i}\right] = 0$$

Se obtiene la última igualdad porque el término entre corchetes es cero para cualquier k.

3.19. Demuestre que la respuesta forzada dada por la ecuación (3.14)

$$y_b(t) = \int_0^t w(t-\tau)\left[\sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u(\tau)}{d\tau^i}\right] d\tau$$

satisface la ecuación diferencial

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i}$$

Por simplificación, hagamos $r(t) \equiv \sum_{i=0}^{m} b_i(d^i u/dt^i)$. Entonces $y_b(t) = \int_0^t w(t-\tau)r(\tau)\,d\tau$ y

$$\frac{dy_b}{dt} = \int_0^t \frac{\partial w(t-\tau)}{\partial t} r(\tau)\,d\tau + w(t-\tau)r(\tau)\Big|_{\tau=t} = \int_0^t \frac{\partial w(t-\tau)}{\partial t} r(\tau)\,d\tau + 0 \cdot r(t)$$

De manera similar,

$$\frac{d^2 y_b}{dt^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 w(t-\tau)}{\partial t^2} r(\tau)\,d\tau, \ldots, \frac{d^{n-1} y_b}{dt^{n-1}} = \int_0^t \frac{\partial^{n-1} w(t-\tau)}{\partial t^{n-1}} r(\tau)\,d\tau$$

puesto que por la ecuación (*3.16*),

$$\frac{\partial^i w(t-\tau)}{\partial t^i}\Big|_{\tau=t} = \frac{d^i w(t)}{dt^i}\Big|_{t=0} = 0 \quad \text{para } i = 0,1,2,\ldots,n-2$$

La n-sima derivada es

$$\frac{d^n y_b}{dt^n} = \int_0^t \frac{\partial^n w(t-\tau)}{\partial t^n} r(\tau)\, d\tau + \left.\frac{\partial^{n-1} w(t-\tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{\tau=t} \cdot r(t) = \int_0^t \frac{\partial^n w(t-\tau)}{\partial t^n} r(\tau)\, d\tau + r(t)$$

puesto que, por la ecuación (*3.16*),

$$\left.\frac{\partial^{n-1} w(t-\tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{\tau=t} = \left.\frac{d^{n-1} w(t)}{dt^{n-1}}\right|_{t=0} = 1$$

La suma de las n derivadas es

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y_b}{dt^i} = \int_0^t \left[\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i w(t-\tau)}{\partial t^i}\right] r(\tau)\, d\tau + r(t)$$

Finalmente, haciendo el cambio de variables $t - \tau = \theta$ en el término entre corchetes, se produce

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\partial^i w(\theta)}{\partial \theta^i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i w(\theta)}{d\theta^i} = 0$$

porque $w(\theta)$ es una respuesta libre (*Véanse* la sección 3.10 y el problema 3.18). En consecuencia

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y_b}{dt^i} = r(t) \equiv \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i}$$

3.20. Encuentre la respuesta libre de la ecuación diferencial

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 4\frac{d^2 y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 4y = u$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $(dy/dt)|_{t=0} = 0$, y $(d^2y/dt^2)|_{t=0} = -1$.

De los resultados de los problemas 3.16 y 3.17, se encuentra que un conjunto fundamental para esta ecuación es e^{-2t}, e^{-t}, cos t, e^{-t}, sen t. En consecuencia, la respuesta libre puede escribirse como

$$y_a(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \cos t + c_3 e^{-t} \operatorname{sen} t$$

Las condiciones iniciales proporcionan el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas para c_1, c_2, c_3:

$$y_a(0) = c_1 + c_2 = 1 \qquad \left.\frac{dy_a}{dt}\right|_{t=0} = -2c_1 - c_2 + c_3 = 0 \qquad \left.\frac{d^2 y_a}{dt^2}\right|_{t=0} = 4c_1 - 2c_3 = -1$$

de las cuales $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{3}{2}$. Por tanto, la respuesta libre es

$$y_a(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t + \frac{3}{2} e^{-t} \operatorname{sen} t$$

3.21. Encuentre la función de ponderación de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 3\frac{du}{dt} + 2u$$

La ecuación característica es $D^2 + 4D + 4 = (D + 2)^2 = 0$, con raíz repetida $D = -2$. En consecuencia, un conjunto fundamental es el dado por e^{-2t}, te^{-2t}, y la función de ponderación tiene la forma

$$w(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}$$

con las condiciones iniciales

$$w(0) = \left[c_1 e^{-2t} + c_2 te^{-2t}\right]\Big|_{t=0} = c_1 = 0 \qquad \left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = \left[-2c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-2t} - 2c_2 te^{-2t}\right]\Big|_{t=0} = c_2 = 1$$

Entonces $w(t) = te^{-2t}$.

3.22. Encuentre la respuesta forzada de la ecuación diferencial (problema 3.21):

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 3\frac{du}{dt} + 2u$$

en donde $u(t) = e^{-3t}$, $t \geq 0$.

La respuesta forzada está dada por la ecuación (*3.14*) como

$$y_h(t) = \int_0^t w(t-\tau)\left[3\frac{du}{d\tau} + 2u\right] d\tau = 3\int_0^t w(t-\tau)\frac{du}{d\tau}\, d\tau + 2\int_0^t w(t-\tau)\, u\, d\tau$$

Realizando la primera integral por partes,

$$\int_0^t w(t-\tau)\frac{du}{d\tau}\, d\tau = w(t-\tau)\, u(\tau)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{\partial w(t-\tau)}{\partial \tau}\, u\, d\tau$$

$$= w(0)\, u(t) - w(t)\, u(0) - \int_0^t \frac{\partial w(t-\tau)}{\partial \tau}\, u\, d\tau$$

Pero $w(0) = 0$; en consecuencia, la respuesta forzada puede escribirse como

$$y_h(t) = \int_0^t \left[-3\frac{\partial w(t-\tau)}{\partial \tau} + 2w(t-\tau)\right] u(\tau)\, d\tau - 3w(t)\, u(0)$$

A partir del problema 3.21, $w(t-\tau) = (t-\tau)e^{-2(t-\tau)}$; por tanto

$$\left[-3\frac{\partial w(t-\tau)}{\partial \tau} + 2w(t-\tau)\right] = 3e^{-2(t-\tau)} - 4(t-\tau)\, e^{-2(t-\tau)}$$

y la respuesta forzada es

$$y_h(t) = 3e^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}e^{-3\tau}\, d\tau - 4te^{-2t}\int_0^t e^{2\tau}e^{-3\tau}\, d\tau + 4e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}e^{-3\tau}\, d\tau - 3te^{-2t}$$

$$= 7\left[e^{-2t} - e^{-3t} - te^{-2t}\right]$$

3.23. Encuentre la salida y de un sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + t$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $(dy/dt)|_{t=0} = 1$.

Hagamos $u_1 \equiv 1$ y $u_2 \equiv t$. La respuesta y debida a u_1 actuando sola, se determinó en el ejemplo 3.27 que era $y_1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$. En el ejemplo 3.24 se encontró que la respuesta libre y_a para la ecuación diferencial es $y_a = e^{-t} - e^{-2t}$. La respuesta forzada debida a u_2 está dada por la ecuación (*3.14*). Utilizando la función de ponderación determinada en el ejemplo 3.25, la respuesta forzada debida a u_2 es

$$y_2 = \int_0^t w(t-\tau)\,u_2(\tau)\,d\tau = \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}]\,\tau\,d\tau$$

$$= e^{-t}\int_0^t \tau e^{\tau}\,d\tau - e^{-2t}\int_0^t \tau e^{2\tau}\,d\tau = \frac{1}{4}[4e^{-t} - e^{-2t} + 2t - 3]$$

Así, la respuesta forzada es

$$y_b = y_1 + y_2 = \frac{1}{4}[4e^{-t} - 3e^{-2t} + 2t - 1]$$

y la respuesta total es

$$y = y_a + y_b = \frac{1}{4}[8e^{-t} - 7e^{-2t} + 2t - 1]$$

3.24. Encuentre las respuestas transiente y en estado estacionario de un sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = 1 + t$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $(dy/dt)|_{t=0} = 1$.

La respuesta total para esta ecuación se determinó en el problema 3.23 como

$$y = \frac{1}{4}[8e^{-t} - 7e^{-2t} + 2t - 1]$$

Puesto que el $\lim_{t\to\infty}[\frac{1}{4}(8e^{-t} - 7e^{-2t})] = 0$, la respuesta transiente es $y_T = \frac{1}{4}(8e^{-t} - 7e^{-2t})$. Y la respuesta en estado estacionario es $y_{EE} = \frac{1}{4}(2t - 1)$.

Funciones de singularidad

3.25. Evalúe: *a)* $\int_5^8 t^2\delta(t-6)\,dt$, *(b)* $\int_0^4 \text{sen}\ t\delta(t-7)\,dt$.

a) Utilizando la propiedad de muestreo de la función de impulso unitario $\int_5^8 t^2\delta(t-6)\,dt = t^2|_{t=6} = 36$.

b) Puesto que el intervalo de integración $0 \le t \le 4$ no incluye la posición de la función impulso unitario, $t = 7$, la integral $\int_0^4 \text{sen}\,t\delta(t-7)\,dt = 0$.

3.26. Demuestre que la respuesta paso unitario $y_1(t)$ de un sistema lineal causal, descrito por la integral de convolución

$$y(t) = \int_0^t w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

está relacionada con la respuesta impulso unitario $y_\delta(t)$ por medio de la ecuación $y_1(t) = \int_0^t y_\delta(\tau)\, d\tau$.

La respuesta paso unitario está dada por $y_1(t) = \int_0^t w(t-\tau)u(\tau)d\tau$, en donde $\mathbf{1}(t)$ es una función paso unitario. En el ejemplo 3.29 se demostró que $y_\delta(t) = w(t)$. Por tanto

$$y_1(t) = \int_0^t y_\delta(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \int_0^t y_\delta(t-\tau)\, d\tau$$

Ahora hacemos el cambio de variable $\theta = t - \tau$. Entonces, $d\tau = -d\theta$, $\tau = \theta$ implica $\theta = t$, $\tau = t$ implica $\theta = 0$, y la integral se convierte en

$$y_1(t) = -\int_t^0 y_\delta(\theta)\, d\theta = \int_0^t y_\delta(\theta)\, d\theta$$

3.27. Demuestre que la respuesta rampa unitaria $y_r(t)$ de un sistema lineal causal descrito por la integral de convolución (*véase* el problema 3.26) está relacionada con la respuesta impulso unitario $y_\delta(t)$ y con la respuesta paso unitario $y_1(t)$ por medio de la ecuación

$$y_r(t) = \int_0^t y_1(\tau')\, d\tau' = \int_0^t \int_0^{\tau'} y_\delta(\theta)\, d\theta\, d\tau'$$

Procediendo como en el problema 3.26 con $w(t-\tau) = y_\delta(t-\tau)$, y cambiando τ por $t - \tau'$, obtenemos

$$y_r(t) = \int_0^t y_\delta(t-\tau)\tau\, d\tau = \int_0^t (t-\tau')\, y_\delta(\tau')\, d\tau' = \int_0^t t y_\delta(\tau')\, d\tau' - \int_0^t \tau' y_\delta(\tau')\, d\tau'$$

A partir del problema 3.26, el primer término puede escribirse como $t\int_0^t y_\delta(\tau')\, d\tau' = t y_1(t)$. El segundo término puede integrarse por partes, produciendo

$$\int_0^t \tau' y_\delta(\tau')\, d\tau' = \tau' y_1(\tau')\Big|_0^t - \int_0^t y_1(\tau')\, d\tau'$$

en donde $dy_1(\tau') = y_\delta(\tau')d\tau'$. En consecuencia

$$y_r(t) = t y_1(t) - t y_1(t) + \int_0^t y_1(\tau')\, d\tau' = \int_0^t y_1(\tau')\, d\tau'$$

Utilizando nuevamente el resultado del problema 3.26, obtenemos la ecuación pedida.

Sistemas de segundo orden

3.28. Demuestre que la función de ponderación de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$$

está dada por $w(t) = (1/\omega_d)e^{-\alpha t}$ sen $\omega_d t$, en donde $\alpha \equiv \zeta\omega_n$, $\omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, $0 \le \zeta \le 1$.

La ecuación característica

$$D^2 + 2\zeta\omega_n D + \omega_n^2 = 0$$

tiene las raíces

$$D_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha + j\omega_d$$

$$D_2 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -\alpha - j\omega_d$$

Un conjunto fundamental es $y_1 = e^{-\alpha t}e^{j\omega_d t}$, $y_2 = e^{-\alpha t}e^{-j\omega_d t}$; y la función de ponderación puede escribirse como

$$w(t) = c_1 e^{-\alpha t}e^{-j\omega_d t} + c_2 e^{-\alpha t}e^{j\omega_d t}$$

en donde c_1 y c_2 son hasta ahora coeficientes desconocidos. $w(t)$ puede escribirse de nuevo como

$$\begin{aligned} w(t) &= e^{-\alpha t}[c_1 \cos\omega_d t - jc_1 \operatorname{sen}\omega_d t + c_2 \cos\omega_d t + jc_2 \operatorname{sen}\omega_d t] \\ &= (c_1 + c_2)e^{-\alpha t}\cos\omega_d t + j(c_2 - c_1)e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t \\ &= Ae^{-\alpha t}\cos\omega_d t + Be^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t \end{aligned}$$

en donde $A \equiv c_1 + c_2$ y $B \equiv j(c_2 - c_1)$ son los coeficientes desconocidos determinados a partir de las condiciones iniciales dadas por la ecuación (*3.16*). Esto es,

$$w(0) = [Ae^{-\alpha t}\cos\omega_d t + Be^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t]\big|_{t=0} = A = 0$$

y

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0} = Be^{-\alpha t}[\omega_d \cos\omega_d t - \alpha \operatorname{sen}\omega_d t]\big|_{t=0} = B\omega_d = 1$$

Por tanto

$$w(t) = \frac{1}{\omega_d}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}\omega_d t$$

3.29. Determine la razón de amortiguación ζ, la frecuencia natural no amortiguada ω_n, la frecuencia natural amortiguada ω_d, el coeficiente de amortiguación α, y la constante de tiempo τ, para el siguiente sistema de segundo orden:

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 8y = 8u$$

Dividiendo por 2 ambos lados de la ecuación $d^2y/dt^2 + 2(dy/dt) + 4y = 4u$. Comparando los coeficientes de esta ecuación con los de la ecuación (*3.22*), obtenemos: $2\zeta\omega_n = 2$ y $\omega_n^2 = 4$ con las soluciones $\omega_n = 2$ y $\zeta = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Ahora $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{3}$, $\alpha = \zeta\omega_n = 1$, y $\tau = 1/\alpha = 1$.

3.30. El **sobrepulso** de un sistema de segundo orden en respuesta a una entrada peso unitario es la diferencia entre el valor máximo alcanzado por la salida y la solución en estado estacionario. Determine el sobrepulso para el sistema del problema 3.29, utilizando la familia de curvas normalizadas dada en la sección 3.14.

Puesto que la razón de amortiguación del sistema es $\zeta = 0{,}5$ se utiliza la curva normalizada correspondiente a $\zeta = 0{,}5$. Esta curva tiene su valor máximo (pico) en $\omega_n t = 3{,}4$. A partir del problema 3.29, $\omega_n = 2$, por tanto el tiempo t_p en el cual ocurre el pico es $t_p = 3{,}4/\omega_n = 3{,}4/2 = 1{,}7$ s. El valor alcanzado en este tiempo es 1,17 y el sobrepulso es $1{,}17 - 1{,}00 = 0{,}17$.

Representación por variables de estado de sistemas descritos por ecuaciones lineales diferenciales y de diferencia

3.31. Convierta la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = u$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $(dy/dt)|_{t=0} = -1$, en la forma de variables de estado. Desarrolle luego una solución para la ecuación de vectores y matrices resultante en la forma de la ecuación (*3.26*), y a partir de ella especifique la respuesta libre y la respuesta forzada. También, para $u(t) = 1$ especifique las respuestas transiente y en estado estacionario.

Haciendo $x_1 \equiv y$ y $dx_1/dt = x_2$, la representación por variables de estado es $dx_1/dt = x_2$ con $x_1(0) = 1$, y $dx_2/dt = u$ con $x_2(0) = -1$. Las matrices A y B en la forma general de la ecuación (*3.25*) son

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Puesto que $A^k = 0$ para $k \geq 2$, la matriz de transición es

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y la solución de la ecuación de variables de estado puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & (t-\tau) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u(\tau) \end{bmatrix} d\tau$$

o, después de multiplicar las matrices en cada término,

$$x_1(t) = 1 - t + \int_0^t (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$x_2(t) = -1 + \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

Las *respuestas libres* son

$$x_{1a}(t) = 1 - t$$

$$x_{2a}(t) = -1$$

y las *respuestas forzadas* son

$$x_{1b}(t) = \int_0^t (t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$$

$$x_{2b}(t) = \int_0^t u(\tau)\, d\tau$$

Para $u(t) = 1$, $x_1(t) = 1 - t + t^2/2$ y $x_2(t) = -1 + t$. Las *respuestas transientes* son $x_{1T}(t) = 0$ y $x_{2T}(t) = 0$ y las *respuestas en estado estacionario* son $x_{1EE}(t) = 1 - t + t^2/2$ y $x_{2EE}(t) = -1 + t$.

3.32. Demuestre que la secuencia de ponderación de la ecuación de diferencia (*3.29*) tiene la forma de la ecuación (*3.34*).

La técnica utilizada para resolver este problema se llama *variación de parámetros*. Se supone que la respuesta forzada de la ecuación (*3.29*) tiene la forma:

$$y_b(k) = \sum_{j=1}^{n} c_j(k)\, y_j(k)$$

en donde $y_1(k), \ldots, y_n(k)$ es un conjunto fundamental de soluciones, y $c_1(k), \ldots, c_n(k)$ es un conjunto de parámetros desconocidos dependientes del tiempo, los cuales van a determinarse. Puesto que $y_b(0) = 0$ para cualquier respuesta forzada de una ecuación de diferencia, entonces, $c_1(0) = 0, \ldots, c_n(0) = 0$. El parámetro $c_j(k+1)$ se escribe como $c_j(k+1) = c_j(k) + \Delta c_j(k)$. Así

$$y_b(k+1) = \sum_{j=1}^{n} c_j(k)\, y_j(k+1) + \left[\sum_{j=1}^{n} \Delta c_j(k)\, y_j(k+1) \right]$$

Los incrementos $\Delta c_1(k),\ldots, \Delta c_n(k)$ se escogen de tal manera que el término entre corchetes es cero. Este proceso se repite para $y_b(k+2)$ de tal modo que

$$y_b(k+2) = \sum_{j=1}^{n} c_j(k)\, y_j(k+2) + \left[\sum_{j=1}^{n} \Delta c_j(k)\, y_j(k+2) \right]$$

El término entre corchetes nuevamente se hace cero al escoger los incrementos $\Delta c_1(k),\ldots, \Delta c_n(k)$. Se generan expresiones similares para $y_b(k+3)$, $y_b(k+4),\ldots, y_b(k+n-1)$. Finalmente,

$$y_b(k+n) = \sum_{j=1}^{n} c_j(k)\, y_j(k+n) + \left[\sum_{j=1}^{n} \Delta c_j(k)\, y_j(k+n) \right]$$

En esta última expresión, el término entre corchetes no se hace cero. Ahora, la suma en la ecuación (*3.29*) es

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_b(k+i) = \sum_{j=1}^{n} c_j(k) \sum_{i=0}^{n} a_i y_j(k+i) + a_n \sum_{j=1}^{n} \Delta c_j(k)\, y_j(k+n) = u(k)$$

Puesto que cada elemento del conjunto fundamental es una respuesta libre, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y_j(k+i) = 0$$

para cada j. Se ha generado entonces un conjunto de n ecuaciones algebraicas lineales con n incógnitas:

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta c_j(k)\, y_j(k+1) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta c_j(k)\, y_j(k+2) = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta c_j(k)\, y_j(k+n) = \frac{u(k)}{a_n}$$

Ahora $\Delta c_j(k)$ puede escribirse como

$$\Delta c_j(k) = \frac{M_j(k)}{M(k)} \frac{u(k)}{a_n}$$

en donde $M(k)$ es el determinante

$$M(k) = \begin{vmatrix} y_1(k+1) & y_2(k+1) & \cdots & y_n(k+1) \\ y_1(k+2) & y_2(k+2) & \cdots & y_n(k+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(k+n) & y_2(k+n) & \cdots & y_n(k+n) \end{vmatrix}$$

$M_j(k)$ es el cofactor del último elemento en la j-ésima columna de este determinante. Entonces los parámetros $c_1(k),\ldots, c_n(k)$ están dados por

$$c_j(k) = \sum_{l=0}^{k-1} \Delta c_j(l) = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{M_j(l)}{M(l)} \frac{u(l)}{a_n}$$

Entonces la respuesta forzada se convierte

$$y_b(k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{M_j(l)}{M(l)} \frac{u(l)}{a_n} y_j(k)$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{M_j(l)}{a_n M(l)} y_j(k) \right] u(l)$$

Esta última ecuación está en la forma de una suma de convolución con la secuencia de ponderación

$$w(k-l) = \sum_{j=1}^{n} \frac{M_j(l)}{a_n M(l)} y_j(k)$$

Linealidad y superposición

3.33. Usando la definición de linealidad, definición 3.21, demuestre que cualquier ecuación diferencial de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y}{dt^i} = u$$

en donde y es la salida y u es la entrada, es lineal.

Sean u_1 y u_2 dos entradas arbitrarias, y sean y_1 y y_2 las salidas correspondientes. Entonces, con todas las condiciones iniciales iguales a cero,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y_1}{dt^i} = u_1 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y_2}{dt^i} = u_2$$

Ahora formamos

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 = c_1 \left[\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y_1}{dt^i} \right] + c_2 \left[\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i y_2}{dt^i} \right]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i (c_1 y_1)}{dt^i} + \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i (c_2 y_2)}{dt^i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \frac{d^i}{dt^i} (c_1 y_1 + c_2 y)$$

Puesto que esta ecuación es válida para cualquier c_1 y c_2, la ecuación es lineal.

3.34. Demuestre que un sistema descrito por la integral de convolución

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t,\tau)u(\tau)\,d\tau$$

es lineal, y es la salida y u es la entrada.

Sean u_1 y u_2 dos entradas arbitrarias, y sean

$$y_1 = \int_{-\infty}^{\infty} w(t,\tau)u_1(\tau)\,d\tau \qquad y_2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(t,\tau)u_2(\tau)\,d\tau$$

Ahora, sea $c_1u_1 + c_2u_2$ una tercera entrada, y formamos

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t,\tau)[c_1u_1(\tau) + c_2u_2(\tau)]\,d\tau = c_1\int_{-\infty}^{\infty} w(t,\tau)u_1(\tau)\,d\tau + c_2\int_{-\infty}^{\infty} w(t,\tau)u_2(\tau)\,d\tau$$
$$= c_1y_1 + c_2y_2$$

Ya que esta relación es válida para cualquier c_1 y c_2, la integral de convolución es una operación (o transformación) lineal.

3.35. Utilice el principio de superposición para determinar la salida y, en la figura 3-9.

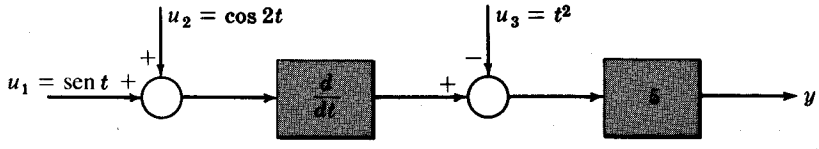


Figura 3-9

Para $u_2 = u_3 = 0$, $y_1 = 5(d/dt)(\text{sen}\, t) = 5\cos t$. Para $u_1 = u_3 = 0$, $y_2 = 5(d/dt)(\cos 2t) = -10\,\text{sen}\, 2t$. Para $u_1 = u_2 = 0$, $y_3 = -5t^2$. En consecuencia

$$y = y_1 + y_2 + y_3 = 5(\cos t - 2\,\text{sen}2t - t^2)$$

3.36. Un sistema lineal se describe mediante la siguiente función de ponderación

$$w(t,\tau) = e^{-|t-\tau|} \quad \text{para cualquier } t, \tau$$

Suponga que el sistema se estimula mediante una entrada

$$u(t) = t \quad \text{para cualquier } t$$

Encuentre la salida $y(t)$.

La salida está dada por la integral de convolución (ejemplo 3.38):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}\tau\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\tau\,d\tau + \int_{t}^{\infty} e^{(t-\tau)}\tau\,d\tau$$
$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\tau\,d\tau + e^{t}\int_{t}^{\infty} e^{-\tau}\tau\,d\tau$$
$$= e^{-t}\left[e^{\tau}(\tau-1)\Big|_{-\infty}^{t}\right] + e^{t}\left[e^{-\tau}(-\tau-1)\Big|_{t}^{\infty}\right] = 2t$$

Causalidad

3.37. Dos sistemas se definen por medio de las relaciones entre sus entradas y sus salidas como sigue:

Sistema 1: La entrada es $u(t)$, y en ese mismo instante la salida es
$$y(t) = u(t + T),\ T > 0.$$
Sistema 2: La entrada es $u(t)$, y en ese mismo instante la salida es
$$y(t) = u(t - T),\ T > 0.$$

¿Alguno de estos sistemas es causal?

En el sistema 1, la salida depende únicamente de la entrada T segundos en el futuro. Así que éste no es causal. Una operación de este tipo se llama **predicción.**

En el sistema 2, la salida depende únicamente de la entrada T segundos en el pasado. Este es un sistema causal. Una operación de este tipo se llama **retardo de tiempo.**

Problemas suplementarios

3.38. ¿Cuáles de los siguientes términos son de primer grado en la variable dependiente $y = y(t)$? *a)* t^2y, *b)* tan y, *c)* cos t, *d)* e^{-y}, *e)* te^{-t}.

3.39. Demuestre que un sistema descrito por la ecuación $y = mu + b$ en donde y es la salida, u la entrada y m y b son constantes diferentes de cero, no es lineal, de acuerdo con la definición 3.21.

3.40. Demuestre que cualquier ecuación diferencial de la forma
$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i(t)\frac{d^i u}{dt^i}$$
satisface la definición 3.21. (*Véanse* el ejemplo 3.37 y el problema 3.33).

3.41. Demuestre que las funciones cos t y sen t son linealmente independientes.

3.42. Demuestre que las funciones sen nt y sen kt, en las cuales n y k son enteros, son linealmente independientes si $n \neq k$.

3.43. Demuestre que las funciones t y t^2 constituyen un conjunto fundamental para la ecuación diferencial
$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + 2y = 0$$

3.44. Encuentre un conjunto fundamental para
$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 21\frac{dy}{dt} + 26y = u$$

Capítulo 4

La transformada de Laplace y la transformada *z*

4.1 Introducción

Varias técnicas de las usadas en la resolución de problemas en ingeniería se basan en el remplazo de funciones de una variable real (usualmente el tiempo o la distancia) por ciertas representaciones dependientes de la frecuencia o por funciones de una variable compleja que depende de la frecuencia. Un ejemplo típico es el uso de las series de Fourier para resolver ciertos problemas eléctricos. Uno de tales problemas consiste en encontrar la corriente en alguna parte de una red eléctrica lineal, en la cual el voltaje de entrada es una onda periódica o repetitiva. El voltaje periódico puede remplazarse por su representación en series de Fourier, y entonces puede determinarse la corriente producida por cada término de la serie. La corriente total es la suma de las corrientes individuales (superposición). A menudo esta técnica resulta en un ahorro sustancial de los esfuerzos de cómputo.

En este capítulo se presentan dos técnicas de transformación para el análisis de sistemas de control lineal muy importantes: la *transformada de Laplace* y la *transformada z*. La primera relaciona funciones de tiempo con funciones dependientes de la frecuencia de una variable compleja. La segunda relaciona secuencias de tiempo con un tipo diferente, pero relacionado, de funciones dependientes de la frecuencia. Aquí también se tratan las aplicaciones de estas transformaciones matemáticas para resolver ecuaciones lineales diferenciales y de diferencia con coeficientes constantes. Estos métodos juntos proporcionan la base de las técnicas de análisis y diseño que se desarrollan en los capítulos siguientes.

4.2 La transformada de Laplace

La transformada de Laplace se define de la siguiente manera:

Definición 4.1: Sea $f(t)$ una función real de una variable real t, definida para $t > 0$. Entonces

$$\mathcal{L}[f(t)] \equiv F(s) \equiv \lim_{\substack{T \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \int_{\epsilon}^{T} f(t) e^{-st}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt \qquad 0 < \epsilon < T$$

se llama **transformada de Laplace** de $f(t)$. s es una variable compleja definida por $s \equiv \sigma + j\omega$, en donde σ y ω son variables reales* y $j = \sqrt{-1}$.

Nótese que el límite inferior de la integral es $t = \epsilon > 0$. Esta definición del límite inferior algunas veces es útil al tratar funciones que son discontinuas en $t = 0$. Cuando se hace uso *explícito* de este límite, se abrevia en la forma $t = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \equiv 0^+$, como se muestra arriba en la integral de la derecha.

La variable real t siempre representa el *tiempo*.

* La parte real σ de una variable compleja s a menudo se escribe como Re(s) (la parte real de s) y la parte imaginaria ω como Im(s) (la parte imaginaria de s). Se colocan paréntesis alrededor de s solamente si existe la posibilidad de confusión.

Definición 4.2: Si $f(t)$ está definida y es de valor sencillo para $t > 0$, y $F(\sigma)$ es absolutamente convergente para algún número real σ_0, esto es,

$$\int_{0^+}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} |f(t)|e^{-\sigma_0 t}\,dt < +\infty \qquad 0 < \epsilon < T$$

entonces $f(t)$ es **transformable en Laplace** para $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$.

EJEMPLO 4.1. La función e^{-t} es transformable en Laplace puesto que

$$\int_{0^+}^{\infty} |e^{-t}|e^{-\sigma_0 t}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(1+\sigma_0)t}\,dt = \frac{1}{-(1+\sigma_0)} e^{-(1+\sigma_0)t}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{1+\sigma_0} < +\infty$$

si $1 + \sigma_0 > 0$ ó $\sigma_0 > -1$.

EJEMPLO 4.2. La transformada de Laplace de e^{-t} es

$$\mathscr{L}[e^{-t}] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-t}e^{-st}\,dt = \frac{-1}{(s+1)} e^{-(s+1)t}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+1} \qquad \text{para} \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

4.3 La inversa de la transformada de Laplace

La transformada de Laplace convierte un problema del dominio de la variable real tiempo en el dominio de la variable compleja s. Luego de obtenerse la solución al problema transformado, en términos de s, es necesario "invertir" esta transformada para obtener la solución en el dominio del tiempo. La transformación del dominio s en el dominio t se llama *inversa de la transformada de Laplace*.

Definición 4.3: Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de una función $f(t)$, para $t > 0$. La integral de contorno

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] \equiv f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}\,ds$$

en donde $j = \sqrt{-1}$ y $c > \sigma_0$ (σ_0 como se estableció en la definición 4.2), se denomina **inversa de la transformada de Laplace** de $F(s)$.

En la práctica rara vez se hace necesario efectuar la integral de contorno, dada en la definición 4.3. Para las aplicaciones de la transformada de Laplace en este libro, nunca será necesario. En la sección 4.8 se presenta una técnica simple para evaluar la inversa de la transformada en la mayor parte de los problemas de sistemas de control.

4.4 Algunas propiedades de la transformada de Laplace y de su inversa

La transformada de Laplace y su inversa tienen varias propiedades importantes que pueden usarse ventajosamente en la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Estas son:

1. La transformada de Laplace es una *transformación lineal* entre funciones definidas en el dominio t y funciones definidas en el dominio s. Esto es, si $F_1(s)$ y $F_2(s)$, son las transformadas de Laplace de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente, entonces $a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$ es la transformada de Laplace de $a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$ en donde a_1 y a_2 son constantes arbitrarias.
2. La inversa de la transformada de Laplace es una *transformación lineal* entre funciones definidas en el dominio s y funciones definidas en el dominio t. Esto es, si $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son las inversas de las transformadas de Laplace de $F_1(s)$ y $F_2(s)$, respectivamente, entonces $b_1f_1(t) + b_2f_2(t)$ es la inversa de la transformada de Laplace de $b_1F_1(s) + b_2F_2(s)$ en donde b_1 y b_2 son constantes arbitrarias.
3. Es la transformada de Laplace de la *derivada* df/dt de una función $f(t)$ cuya transformada de Laplace es $F(s)$.

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

en donde $f(0^+)$ es el valor inicial de $f(t)$, evaluada como el límite unilateral de $f(t)$ cuando t tiende a cero, a partir de valores positivos.

4. Es la transformada de Laplace de la integral $\int_0^t f(\tau)\,d\tau$ de una función $f(t)$ cuya transformada de Laplace es $F(s)$.

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

5. Es el valor inicial $f(0^+)$ de la función $f(t)$ cuya transformada de Laplace es $F(s)$.

$$f(0^+) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s) \qquad t > 0$$

Esta relación se llama *teorema del valor inicial*.

6. Es el valor final $f(\infty)$ de la función $f(t)$ cuya transformada de Laplace es $F(s)$.

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Si existe $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Esta relación se llama *teorema del valor final*.

7. La transformada de Laplace de una función $f(t/a)$ (*cambio de escala de tiempo*) es

$$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$$

en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$.

8. La inversa de la transformada de Laplace de la función $F(s/a)$ (*cambio de escala de frecuencia*) es

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right] = af(at)$$

en donde $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$.

9. La transformada de Laplace de la función $f(t-T)$ (*retardo de tiempo*), en donde $T>0$ y $f(t-T)=0$ para $t \le T$, es

$$\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$$

en donde $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$.

10. La transformada de Laplace de la función $e^{-at}f(t)$ está dada por

$$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

en donde $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ (*traslación compleja*).

11. La transformada de Laplace del *producto de dos funciones* $f_1(t)$ y $f_2(t)$ está dada por la *integral de convolución compleja*

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega)F_2(s-\omega)\,d\omega$$

en donde $F_1(s)=\mathscr{L}[f_1(t)]$ y $F_2(s)=\mathscr{L}[f_2(t)]$.

12. La inversa de la transformada de Laplace del *producto de dos transformadas* $F_1(s)$ y $F_2(s)$ está dada por las *integrales de convolución*

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_{0^+}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_{0^+}^{t} f_2(\tau)f_1(t-\tau)\,d\tau$$

en donde $\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]=f_1(t)$ y $\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]=f_2(t)$.

EJEMPLO 4.3. Las transformadas de Laplace de las funciones e^{-t} y e^{-2t} son $\mathscr{L}[e^{-t}] = 1/(s+1)$ y $\mathscr{L}[e^{-2t}] = 1/(s+2)$. Entonces, por la propiedad 1,

$$\mathscr{L}[3e^{-t}-e^{-2t}] = 3\mathscr{L}[e^{-t}] - \mathscr{L}[e^{-2t}] = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{2s+5}{s^2+3s+2}$$

EJEMPLO 4.4. Las inversas de las transformadas de Laplace de las funciones $1/(s+1)$ y $1/(s+3)$ son

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = e^{-t} \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = e^{-3t}$$

Entonces, por la propiedad 2,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1} - \frac{4}{s+3}\right] = 2\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - 4\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3}\right] = 2e^{-t} - 4e^{-3t}$$

EJEMPLO 4.5. Mediante la aplicación de la propiedad 3 puede determinarse la transformada de $(d/dt)(e^{-t})$. Puesto que $\mathscr{L}[e^{-t}] = 1/(s+1)$ y $\lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$, entonces

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}(e^{-t})\right] = s\left(\frac{1}{s+1}\right) - 1 = \frac{-1}{s+1}$$

EJEMPLO 4.6. La transformada de Laplace de $\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau$ puede determinarse por aplicación de la propiedad 4. Puesto que $\mathscr{L}[e^{-t}] = 1/(s) + 1)$, entonces

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau\right] = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s+1}\right) = \frac{1}{s(s+1)}$$

EJEMPLO 4.7. La transformada de Laplace de e^{-3t} es $\mathscr{L}[e^{-3t}] = 1/(s+3)$. El valor inicial de e^{-3t} puede determinarse mediante el teorema del valor inicial

$$\lim_{t\to 0} e^{-3t} = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{1}{s+3}\right) = 1$$

EJEMPLO 4.8. La transformada de Laplace de la función $(1 - e^{-t})$ es $1/s(s+1)$. El valor final de esta función puede determinarse mediante el teorema del valor final.

$$\lim_{t\to\infty} (1 - e^{-t}) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s(s+1)} = 1$$

EJEMPLO 4.9. La transformada de Laplace e^{-t} es $1/(s+1)$. Mediante la aplicación de la propiedad 7 (cambio en la escala de tiempo) puede determinarse la transformada de Laplace de e^{-3t}, en donde $a = \frac{1}{3}$:

$$\mathscr{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(\frac{1}{3}s+1)}\right] = \frac{1}{s+3}$$

EJEMPLO 4.10. La inversa de la transformada de $1/(s+1)$ es e^{-t}. La inversa de la transformada de $1/(\frac{1}{3}s+1)$ puede determinarse mediante la aplicación de la propiedad 8 (cambio en la escala de frecuencia):

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{\frac{1}{3}s+1}\right] = 3e^{-3t}$$

EJEMPLO 4.11. La transformada de Laplace de la función e^{-t} es $1/(s+1)$. La transformada de Laplace de la función definida como

$$f(t) = \begin{cases} e^{-(t-2)} & t > 2 \\ 0 & t \le 2 \end{cases}$$

puede determinarse mediante la propiedad 9 con $T = 2$:

$$\mathscr{L}[f(t)] = e^{-2s} \cdot \mathscr{L}[e^{-t}] = \frac{e^{-2s}}{s+1}$$

EJEMPLO 4.12. La transformada de Laplace de $\cos t$ es $s/(s^2+1)$. La transformada de Laplace de $e^{-2t}\cos t$ puede determinarse a partir de la propiedad 10 con $a = 2$:

$$\mathscr{L}[e^{-2t}\cos t] = \frac{s+2}{(s+2)^2+1} = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$$

EJEMPLO 4.13. La transformada de Laplace del producto $e^{-2t}\cos t$ puede determinarse mediante la aplicación de la propiedad 11 (convolución compleja). Es decir, puesto que $\mathscr{L}[e^{-2t}] = 1/(s+2)$ y $\mathscr{L}[\cos t] = s/(s^2+1)$, entonces

$$\mathscr{L}[e^{-2t}\cos t] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left(\frac{\omega}{\omega^2+1}\right)\left(\frac{1}{s-\omega+2}\right)d\omega = \frac{s+2}{s^2+4s+5}$$

Aquí no se presentan los detalles de esta integración de contorno porque son demasiado complicados (*véase* por ejemplo la referencia [1]) y no son necesarios. La transformada de Laplace de $e^{-2t}\cos t$ se determinó de manera muy simple al utilizar la propiedad 10, en el ejemplo 4.12. Sin embargo, hay muchos casos en tratamientos más avanzados de sistemas de control automático en los que puede usarse efectivamente la convolución compleja.

EJEMPLO 4.14. La inversa de la transformada de Laplace de la función $F(s) = s/(s + 1)(s^2 + 1)$ puede determinarse mediante la aplicación de la propiedad 12. Puesto que $\mathscr{L}^{-1}[1/(s + 1)] = e^{-t}$ y $\mathscr{L}^{-1}[s/(s_2 + 1)] = \cos t$, entonces

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{s}{s^2+1}\right)\right] = \int_{0^+}^{t} e^{-(t-\tau)} \cos\tau\, d\tau = e^{-t}\int_{0^+}^{t} e^{\tau}\cos\tau\, d\tau = \tfrac{1}{2}(\cos t + \operatorname{sen} t - e^{-t})$$

4.5 Tabla resumida de transformadas de Laplace

En la tabla 4.1 se presentan algunas transformadas de Laplace. No es completa pero, cuando esta tabla se usa junto con las propiedades de las transformadas de Laplace descritas en la sección 4.4 y las técnicas de expansión en fracciones parciales descritas en la sección 4.7, es apropiada para manejar todos los problemas de este libro. En el apéndice A se encuentra una tabla más completa de los pares de transformadas de Laplace.

TABLA 4.1

Función de tiempo		Transformada de Laplace
Impulso unitario	$\delta(t)$	1
Paso unitario	$\mathbf{1}(t)$	$\dfrac{1}{s}$
Rampa unitaria	t	$\dfrac{1}{s^2}$
Polinomio	t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
Exponencial	e^{-at}	$\dfrac{1}{s+a}$
Onda sinusoidal	$\operatorname{sen}\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Onda cosenoidal	$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
Onda sinusoidal amortiguada	$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
Onda cosenoidal amortiguada	$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

La tabla 4.1 puede utilizarse para encontrar las transformadas de Laplace y sus inversas. Para encontrar la transformada de Laplace de una función de tiempo que puede representarse por alguna combinación de las funciones elementales que se dan en la tabla 4.1, se escogen las transformadas apropiadas de la tabla y se combinan utilizando las propiedades de la sección 4.4.

EJEMPLO 4.15. La transformada de Laplace de la función $f(t) = e^{-4t} + \operatorname{sen}(t - 2) + t^2 e^{-2t}$ se determina como sigue. En la tabla se encuentra que las transformadas de e^{-4t}, sen t y t^2 son:

$$\mathscr{L}[e^{-4t}] = \frac{1}{s+4} \qquad \mathscr{L}[\text{sen}\,t] = \frac{1}{s^2+1} \qquad \mathscr{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$$

La aplicación de las propiedades 9 y 10 respectivamente, produce

$$\mathscr{L}[\text{sen}(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s^2+1} \qquad \mathscr{L}[t^2e^{-2t}] = \frac{2}{(s+2)^3}$$

Entonces la propiedad 1 (linealidad) produce

$$\mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{s+4} + \frac{e^{-2s}}{s^2+1} + \frac{2}{(s+2)^3}$$

Para encontrar la inversa de la transformada de una combinación de aquellas dadas en la tabla 4.1, se determinan las correspondientes funciones de tiempo (inversas de las transformadas) de la tabla y se combinan de manera apropiada utilizando las propiedades de la sección 4.4.

EJEMPLO 4.16. La inversa de la transformada de Laplace de $F(s) = [(s + 2)/s^2 + 4] \cdot e^{-s}$ puede determinarse como sigue. Escribimos de nuevo $F(s)$ como

$$F(s) = \frac{se^{-s}}{s^2+4} + \frac{2e^{-s}}{s^2+4}$$

Ahora

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] = \cos 2t \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = \text{sen}\,2t$$

La aplicación de la propiedad 9 para $t > 1$ produce

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{se^{-s}}{s^2+4}\right] = \cos 2(t-1) \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2e^{-s}}{s^2+4}\right] = \text{sen}\,2(t-1)$$

Entonces la propiedad 2 (linealidad) da

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \cos 2(t-1) + \text{sen}2(t-1) \qquad t > 1$$
$$= 0 \qquad t \leq 1$$

4.6 Aplicación de las transformadas de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

La aplicación de las transformadas de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes es de principal importancia en problemas de sistemas lineales de control. En esta sección tratamos dos clases de ecuaciones de interés general. La primera de ellas tiene la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = u \tag{4.1}$$

en donde y es la salida, u es la entrada, los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son constantes, y $a_n = 1$. Las condiciones iniciales para esta ecuación se escriben como

$$\left.\frac{d^k y}{dt^k}\right|_{t=0^+} \equiv y_0^k \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

en donde y_0^k son constantes. La transformada de Laplace de la ecuación (*4.1*) está dada por

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(s^iY(s)-\sum_{k=0}^{i-1}s^{i-1-k}y_0^k\right)\right]=U(s) \tag{4.2}$$

y la transformada de la salida es

$$Y(s)=\frac{U(s)}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}+\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}a_is^{i-1-k}y_0^k}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i} \tag{4.3}$$

Nótese que el lado derecho de la ecuación (*4.3*) es la suma de dos términos: uno dependiente únicamente de la transformada de la entrada, y otro que depende sólo de las condiciones iniciales. Además, nótese que el denominador de ambos términos en la ecuación (*4.3*), esto es,

$$\sum_{i=0}^{n}a_is^i=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_is+a_0$$

es el *polinomio característico* de la ecuación (*4.1*) (*véase* la sección 3.6).

La solución en el tiempo $y(t)$ de la ecuación (*4.1*) es la inversa de la transformada de Laplace de $Y(s)$, esto es,

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}\right]+\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1}a_is^{i-1-k}y_0^k}{\sum_{i=0}^{n}a_is^i}\right] \tag{4.4}$$

El primer término de la derecha es la *respuesta forzada*, y el segundo término es la *respuesta libre* del sistema, representado por la ecuación (*4.1*).

La sustitución directa en las ecuaciones (*4.2*), (*4.3*) y (*4.4*) produce la transformada de la ecuación diferencial, la solución de la transformada $Y(s)$ o la solución en el tiempo $y(t)$, respectivamente. Pero, a menudo es más fácil aplicar de manera directa las propiedades de la sección 4.4 para determinar estas cantidades, sobre todo cuando el orden de la ecuación diferencial es bajo.

EJEMPLO 4.17. La transformada de Laplace de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=\mathbf{1}(t)=\text{paso unitario}$$

con las condiciones iniciales $y(0^+)=-1$ y $(dy/dt)|_{t=0+}=2$ puede escribirse directamente a partir de la ecuación (*4.2*), identificando primero n, a_i y y_0^k: $n=2$, $y_0^0=-1$, $y_0^1=2$, $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=1$. La sustitución de estos valores en la ecuación (*4.2*), produce

$$2Y+3(sY+1)+1(s^2Y+s-2)=\frac{1}{s}\qquad\text{o}\qquad(s^2+3s+2)Y=\frac{-(s^2+s-1)}{s}$$

Debe tenerse en cuenta que cuando $i = 0$ en la ecuación (*4.2*), la suma en el interior de los corchetes, por definición es

$$\sum_{k=0}^{i-1}\Bigg|_{i=0} = \sum_{k=0}^{k=-1} = 0$$

La transformada de Laplace de la ecuación diferencial también puede determinarse de la siguiente manera. La transformada de d^2y/dt^2 está dada por

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0^+) - \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=0^+}$$

Esta ecuación es una consecuencia directa de la propiedad 3, sección 4.4 (*véase* el problema 4.17). Con esta información puede determinarse la transformada de la ecuación diferencial aplicando la propiedad 1 (linealidad) de la sección 4.4; esto es,

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y\right] = \mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] + \mathscr{L}\left[3\frac{dy}{dt}\right] + \mathscr{L}[2y] = (s^2 + 3s + 2)Y + s + 1 = \mathscr{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}$$

La transformada de la salida $Y(s)$ se determina reordenando la ecuación anterior, y es

$$Y(s) = \frac{-(s^2 + s - 1)}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

La solución de la salida en el tiempo $y(t)$ es la inversa de la transformada de $Y(s)$. Anteriormente, en las secciones 4.7 y 4.8 se presentó un método para determinar la inversa de la transformada de funciones como $Y(s)$.

Ahora, considere ecuaciones de coeficientes constantes de la forma:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^iy}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^iu}{dt^i} \tag{4.5}$$

en donde y es la salida, u es la entrada, $a_n = 1$ y $m \leq n$. La transformada de Laplace de la ecuación (*4.5*) está dada por

$$\sum_{i=0}^{n}\left[a_i\left(s^iY(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}y_0^k\right)\right] = \sum_{i=0}^{m}\left[b_i\left(s^iU(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k}u_0^k\right)\right] \tag{4.6}$$

en donde $u_0^k = (d^ku/dt^k)|_{t=0^+}$. La transformada de salida $Y(s)$ es

$$Y(s) = \left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_is^i}{\sum_{i=0}^{n} a_is^i}\right]U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} b_is^{i-1-k}u_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_is^i} + \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_is^{i-1-k}y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_is^i} \tag{4.7}$$

La solución en el tiempo $y(t)$ es la inversa de la transformada de Laplace de $Y(s)$:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_is^i}{\sum_{i=0}^{n} a_is^i}U(s) - \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{i-1} b_is^{i-1-k}u_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_is^i}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i-1} a_is^{i-1-k}y_0^k}{\sum_{i=0}^{n} a_is^i}\right] \tag{4.8}$$

El primer término de la derecha es la *respuesta forzada*, y el segundo término es la *respuesta libre* de un sistema representado por la ecuación (*4.5*).

Nótese que la transformada de Laplace $Y(s)$ de la salida $y(t)$ está formada por relaciones entre polinomios en la variable compleja s. Tales relaciones generalmente se llaman **funciones racionales (algebraicas)**. Si todas las condiciones iniciales de la ecuación (*4.8*) son cero y $U(s) = 1$, (*4.8*) da la *respuesta impulso unitario*. El denominador en cada término de (*4.8*) es el *polinomio característico* del sistema.

Para los problemas en los cuales no se especifican las condiciones iniciales en $y(t)$, sino en algún otro parámetro del sistema (tal como el voltaje inicial en un capacitor que no aparece en la salida), deben obtenerse los y_0^k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, correspondientes, utilizando la información disponible. Para los sistemas representados en la forma de la ecuación (*4.5*), es decir, que incluyen términos de derivada en u, el cálculo de y_0^k también dependerá de u_0^k. El problema 4.38 ilustra estos puntos.

La restricción $n \geq m$ de la ecuación (*4.5*) se basa en el hecho de que los sistemas reales tienen un efecto *suavizador* en su entrada. Por efecto suavizador quiere decirse que las variaciones en la entrada se hacen menos pronunciadas (por lo menos no más pronunciadas) por acción del sistema sobre la entrada. Un diferenciador acentúa las variaciones de la función, puesto que genera la pendiente de una función de tiempo. De otra parte, un integrador suma el área bajo la curva de una función de tiempo, en un intervalo determinado, y así promedia (suaviza) las variaciones de la función.

En la ecuación (*4.5*), la salida y está relacionada con la entrada u mediante una operación que incluye m derivaciones y n integraciones de la entrada. En consecuencia, para que haya un efecto suavizador (por lo menos que no haya acentuación de las variaciones) entre la entrada y la salida, debe haber más (al menos, igual número) integraciones que derivaciones; es decir, $n \geq m$.

EJEMPLO 4.18. Cierto sistema se describe mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \qquad y(0^+) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+} = 0$$

de la cual, en la figura 4-1 se representa gráficamente la entrada u. También se presentan las funciones correspondientes du/dt y

$$y(t) = \int_{0^+}^{t} \int_{0^+}^{\theta} \frac{du}{d\alpha}\, d\alpha\, d\theta = \int_{0^+}^{t} u(\theta)\, d\theta$$

en estas gráficas, nótese que la derivación de u acentúa las variaciones, mientras que la integración las suaviza.

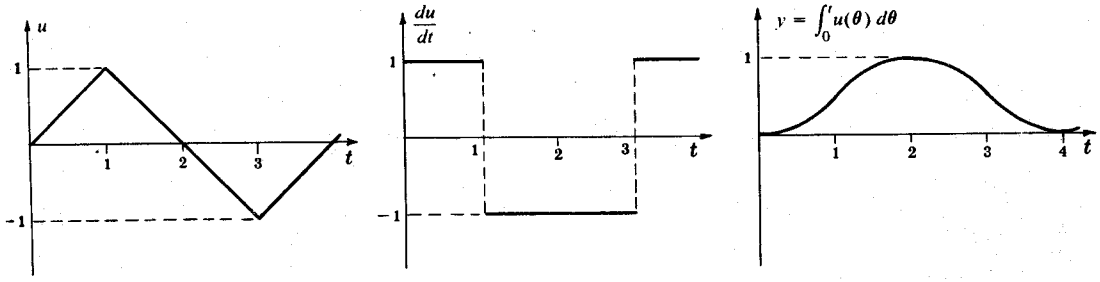


Figura 4-1

EJEMPLO 4.19. Considere un sistema descrito por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{du}{dt} + 3u$$

con las condiciones iniciales $y_0^0 = 1$, $y_0^1 = 0$. Si la entrada está dada por $u(t) = e^{-4t}$, entonces la transformada de Laplace $y(t)$ de la salida puede obtenerse por aplicación directa de la ecuación (*4.7*), identificando primero m, n, a_i, b_i y u_0^0: $n = 2, a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 1, m = 1$, $u_0^0 = \lim_{t \to 0} e^{-4t} = 1, b_0 = 3, b_1 = 1$. La sustitución de estos valores en la ecuación (*4.7*) produce

$$Y(s) = \left(\frac{s+3}{s^2+3s+2}\right)\left(\frac{1}{s+4}\right) + \frac{s+3}{s^2+3s+2} - \frac{1}{s^2+3s+2}$$

Esta transformada también puede obtenerse por aplicación directa de las propiedades 1 y 3, de la sección 4.4, a la ecuación diferencial, como se hizo en el ejemplo 4.17.

Las ecuaciones diferenciales lineales de matrices y vectores con coeficientes constantes, tratados en la sección 3.15, también pueden resolverse mediante las técnicas de transformada de Laplace, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.20. Considere la ecuación diferencial de vectores y matrices del problema 3.31:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u$$

en donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y con $u = \mathbf{1}(t)$, la función paso unitario. La transformada de Laplace de la forma de vectores y matrices de esta ecuación es

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(s) + \frac{1}{s}\mathbf{b}$$

en donde $\mathbf{X}(s)$ es la transformada de Laplace vectorial cuyos componentes son las transformadas de Laplace de los componentes de $\mathbf{x}(t)$. Esta puede escribirse de nuevo como

$$[sI - A]\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}(0) + \frac{1}{s}\mathbf{b}$$

en donde I es la matriz *identidad* o *unidad*. La transformada de Laplace del vector solución $\mathbf{x}(t)$ puede escribirse como

$$\mathbf{X}(s) = [sI - A]^{-1}\mathbf{x}(0) + \frac{1}{s}[sI - A]^{-1}\mathbf{b}$$

en donde $[\cdot]^{-1}$ representa el *inverso* de la matriz. Puesto que

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

entonces

$$[sI - A]^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

Sustituyendo $[sI - A]^{-1}$, $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{b}$ se obtiene

$$\mathbf{X}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s-1}{s^2} \\ -\dfrac{1}{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^3} \\ \dfrac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

en la cual el primer término es la transformada de Laplace de la *respuesta libre*, y el segundo es la transformada de Laplace de la *respuesta forzada*. Utilizando la tabla 4.1, pueden invertirse, término por término, las transformadas de Laplace de estos vectores, que proporcionan el vector solución:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(t) - t + t^2/2 \\ -\mathbf{1}(t) + t \end{bmatrix}$$

4.7 Expansiones en fracciones parciales

En la sección 4.6 se mostró que las transformadas de Laplace encontradas en la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes son funciones racionales de s (es decir, razones de polinomios en s). En esta sección se muestra una representación importante de las funciones racionales: la expansión en fracciones parciales. En la siguiente sección se muestra que esta representación simplifica de manera significativa la inversión de las transformadas de Laplace de una función racional.

Considere la función racional

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} \tag{4.9}$$

en donde $a_n = 1$ y $n \geq m$. Mediante el teorema fundamental del álgebra, la ecuación polinómica del denominador

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0$$

tiene n raíces. Algunas de estas raíces pueden ser repetidas.

EJEMPLO 4.21. El polinomio $s^3 + 5s^2 + 8s + 4$ tiene tres raíces: $-2, -2, -1$. -2 es una raíz repetida.

Suponga que la ecuación polinómica del denominador anterior tiene n_1 raíces iguales a $-p_1$, n_2 raíces iguales a $-p_2, \ldots,$ n_r raíces iguales a $-p_r$, en donde $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. Entonces

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \prod_{i=1}^{r} (s + p_i)^{n_i}$$

La función racional $F(s)$ puede escribirse como

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{r} (s+p_i)^{n_i}}$$

La representación de la **expansión en fracciones parciales** de la función racional $F(s)$ es

$$F(s) = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s+p_i)^k} \tag{4.10a}$$

en donde $b_n = 0$, a no ser que $m = n$. Los coeficientes c_{ik} están dados por

$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i-k)!} \frac{d^{n_i-k}}{ds^{n_i-k}} \left[(s+p_i)^{n_i} F(s)\right]\Big|_{s=-p_i} \tag{4.10b}$$

Los coeficientes particulares c_{i1}, $i = 1, 2, \ldots, r$ se denominan **residuos** de $F(s)$ en $-p_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Si ninguna de las raíces se repite, entonces

$$F(s) = b_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_{i1}}{s+p_i} \tag{4.11a}$$

en donde

$$c_{i1} = (s+p_i) F(s)\big|_{s=-p_i} \tag{4.11b}$$

EJEMPLO 4.22. Considere la función racional

$$F(s) = \frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}$$

La expansión en fracciones parciales de $F(s)$ es

$$F(s) = b_2 + \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{21}}{s+2}$$

El coeficiente de s^2 en el numerador es $b_2 = 1$. Los coeficientes c_{11} y c_{21} se determinan de la ecuación (*4.11b*) como

$$c_{11} = (s+1) F(s)\big|_{s=-1} = \frac{s^2+2s+2}{s+2}\bigg|_{s=-1} = 1$$

$$c_{21} = (s+2) F(s)\big|_{s=-2} = \frac{s^2+2s+2}{s+1}\bigg|_{s=-2} = -2$$

En consecuencia

$$F(s) = 1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

EJEMPLO 4.23. Considere la función racional

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

La expansión en fracciones parciales de $F(s)$ es

$$F(s) = b_3 + \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{12}}{(s+1)^2} + \frac{c_{21}}{s+2}$$

Los coeficientes b_3, c_{11}, c_{12}, c_{21} están dados por

$$b_3 = 0$$

$$c_{11} = \frac{d}{ds}(s+1)^2 F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds}\frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = -1$$

$$c_{12} = (s+1)^2 F(s)|_{s=-1} = \frac{1}{s+2}\Big|_{s=-1} = 1$$

$$c_{21} = (s+2)F(s)|_{s=-2} = 1$$

De esta manera

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}$$

4.8 Inversas de las transformadas utilizando expansiones en fracciones parciales

En la sección 4.6 se mostró que la solución a una ecuación diferencial lineal ordinaria con coeficientes constantes puede determinarse encontrando la inversa de la transformada de Laplace de una función racional. La forma general de esta operación puede escribirse usando la ecuación (*4.10*) como

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\sum_{i=0}^{m} b_i s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[b_n + \sum_{i=0}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(s+p_i)^k}\right] = b_n\delta(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i}\frac{c_{ik}}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-p_i t} \quad (4.12)$$

en donde $\delta(t)$ es la función impulso unitario, y $b_n = 0$ a no ser que $m = n$. Hacemos notar que el término del extremo derecho en la ecuación (*4.12*) es la forma general de la *respuesta impulso unitario* para la ecuación (*4.5*).

EJEMPLO 4.24. La inversa de la transformada de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 2}{(s+1)(s+2)}$$

está dada por

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[1 + \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2}\right] = \mathscr{L}^{-1}[1] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right] = \delta(t) + e^{-t} - 2e^{-2t}$$

que es la respuesta impulso unitario para la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2u}{dt^2} + 2\frac{du}{dt} + 2u$$

EJEMPLO 4.25. La inversa de la transformada de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

está dada por

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right] = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+2}\right]$$

$$= -\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = -e^{-t} + te^{-t} + e^{-2t}$$

4.9 La transformada *z*

La transformada z se utiliza para describir señales y componentes en sistemas de control discretos en el tiempo. Esta se define como sigue:

Definición 4.4: Digamos que $\{f(k)\}$ representa una secuencia de valores reales $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ..., o de manera equivalente $f(k)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$ Entonces

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} \equiv F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

se llama **transformada z** de $\{f(k)\}$. z es una *variable compleja definida* por $z = \mu + jv$, en donde μ y v son variables reales y $j \sqrt{-1}$.

Comentario 1: El k-ésimo término de la serie en esta definición siempre es el k-ésimo elemento de la secuencia que es z^{-k} veces la transformada z.

Comentario 2: A menudo, $\{f(k)\}$ se define para tiempos igualmente espaciados: $0, T, 2T, \ldots, kT \ldots$, en donde T es un intervalo de tiempo fijo. Algunas veces la secuencia resultante se escribe como $\{f(kT)\}$, o $f(kT)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, y $\mathcal{Z}\{f(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$, pero, usualmente se suprime la dependencia de T. Utilizamos los argumentos de la variable k y kT para las secuencias de tiempo de manera intercambiable, cuando no se presenta ambigüedad.

Comentario 3: De modo diferente algunos autores definen la transformada z como la transformación $z \equiv e^{sT}$, la cual se convierte en un simple cambio exponencial de variables entre la variable compleja $z = \mu + jv$ y la variable compleja $s = \sigma + j\omega$ en el dominio de la transformada de Laplace, en donde T es el periodo de muestreo de un sistema discreto en el tiempo. Esta definición implica una secuencia $\{f(k)\}$ o $\{f(kT)\}$, obtenida mediante un muestreo ideal (algunas veces llamado *muestreo de impulso*) de una señal continua $f(t)$ en tiempos espaciados uniformemente kT, $k = 1, 2, \ldots$ Entonces, $s = \ln z/T$, y nuestra definición anterior, es decir, $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$, se obtiene directamente del resultado del problema 4.39. Comenzando el Capítulo 6 se desarrollan relaciones adicionales entre sistemas continuos y sistemas discretos en el tiempo, de manera particular para sistemas con los dos tipos de elementos.

EJEMPLO 4.26. La serie $F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \ldots + z^{-k} + \ldots$, es la transformada z de la secuencia $f(k) = 1,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Si la tasa de incremento en los términos de la secuencia $\{f(k)\}$ no es mayor que la de alguna serie geométrica, a medida que k tiende a infinito, entonces se dice que $\{f(k)\}$ es de **orden exponencial**. En este caso, existe un número real r tal que

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

converge para $|z| > r$. A r se le llama **radio de convergencia** de la serie. Si r es finito, la secuencia $\{f(k)\}$ se llama **transformable en z**.

EJEMPLO 4.27. La serie del ejemplo 4.26 es convergente para $|z| > 1$, y puede escribirse en forma cerrada como la función

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \qquad \text{para} \quad |z| > 1$$

Si existe $F(z)$ para $|z| > r$, la integral y la derivada de $F(z)$, pueden evaluarse efectuando la operación, término por término, sobre la serie que la define. Además, si

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k} \qquad \text{para} \quad |z| > r_1$$

y

$$F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k) z^{-k} \qquad \text{para} \quad |z| > r_2$$

entonces

$$F_1(z) F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} f_1(k-i) f_2(i) \right) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} f_2(k-i) f_1(i) \right) z^{-k}$$

El término $\sum_{i=0}^{k} f_1(k-i) f_2(i)$ se llama **suma de convolución** de las secuencias $\{f_1(k)\}$ y $\{f_2(k)\}$ donde el radio de convergencia es el mayor de los dos radios de convergencia $F_1(z)$ y $F_2(z)$.

EJEMPLO 4.28. La derivada de la serie, en el ejemplo 4.26, es

$$\frac{dF}{dz} = -z^{-2} - 2z^{-3} - \cdots - kz^{-(k+1)} - \cdots$$

La integral indefinida es

$$\int F(z)\, dz = z + \ln z - z^{-1} + \cdots$$

EJEMPLO 4.29. La transformada z de la secuencia $f_2(k) = 2^k,\ k = 0,1,2,\ldots,$ es

$$F_2(z) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + \cdots$$

para $|z| > 2$. Si, $F_1(z)$ es la transformada z en el ejemplo 4.26, entonces

$$F_1(z) F_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} 1^{k-1} 2^i \right) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1} - 1) z^{-k} \qquad \text{para} \quad |z| > 2$$

La transformada z de la secuencia $f(k) = A^k$, $k = 0,1,2,\ldots$, en la cual A es cualquier número complejo finito, es

$$\mathcal{Z}\{A^k\} = 1 + Az^{-1} + A^2z^{-2} + \cdots$$
$$= \frac{1}{1 - Az^{-1}} = \frac{z}{z - A}$$

en donde el radio de convergencia es $r = |A|$. Eligiendo de manera adecuada A, pueden definirse los tipos de secuencias más comunes y sus transformadas z generadas de esta relación.

EJEMPLO 4.30. Para $A = e^{\alpha T}$, la secuencia $\{A^k\}$ es la exponencial muestreada 1, $e^{\alpha T}$, $e^{2\alpha T}$,... y la transformada z de esta secuencia es

$$\mathcal{Z}\{e^{\alpha kT}\} = \frac{1}{1 - e^{\alpha T}z^{-1}}$$

con un radio de convergencia $r = |e^{\alpha T}|$.

La transformada z tiene una inversa muy parecida a la inversa de la transformada de Laplace.

Definición 4.5: Sea C un círculo con centro en el origen del plano z, y con un radio mayor que el radio de convergencia de la transformada z, $F(z)$. Entonces

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] \equiv \{f(k)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_C F(z)z^{k-1}\,dz$$

es la **inversa de la transformada z** de $F(z)$.

En la práctica, rara vez es necesario realizar la integral de contorno de la definición 4.5. Para las aplicaciones de la transformada z en este libro, nunca será necesario. En lo que resta de esta sección las propiedades y técnicas son adecuadas para evaluar la inversa de la transformada de la mayor parte de los problemas de sistemas de control discretos en el tiempo.

En seguida se encuentran algunas **propiedades adicionales de la transformada z y de su inversa**, las cuales pueden utilizarse ventajosamente en los problemas de sistemas de control discretos en el tiempo.

1. La transformada z y su inversa son *transformaciones lineales* entre el dominio del tiempo y el dominio z. En consecuencia, si $\{f_1(k)\}$ y $F_1(z)$ son un par de transformadas, y si $\{f_2(k)\}$ y $F_2(z)$ son otro par, entonces $\{a_1f_1(k) + a_2f_2(k)\}$ y $a_1F_1(z) + a_2F_2(z)$ son un par de transformadas para cualquier a_1 y a_2.
2. Si $F(z)$ es la transformada z de la secuencia $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$,..., entonces
$$z^nF(z) - z^nf(0) - z^{n-1}f(1) - \cdots - zf(n-1)$$
es la transformada z de la secuencia $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$, ..., para $n > 1$. Nótese que el k-ésimo elemento de esta secuencia es $f(n+k)$.
3. El término inicial $f(0)$ de la secuencia $\{f(k)\}$, cuya transformada z es $F(z)$, es
$$f(0) = \lim_{z\to\infty}(1 - z^{-1})F(z) = F(\infty)$$
Esta relación se llama **teorema del valor inicial**

4. Asuma que la secuencia $\{f(k)\}$ tiene una transformada z, $F(z)$, con radio de convergencia ≤ 1. Entonces, si el siguiente límite existe, el valor final $f(\infty)$ de la secuencia está dado por

$$f(\infty) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

Esta relación se llama **teorema del valor final**.

5. La inversa de la transformada z de la función $F(z/a)$ (**cambio de escala de frecuencia**) es

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[F\left(\frac{z}{a}\right)\right] = a^k f(k) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

en donde $\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \{f(k)\}$.

6. Si $F(z)$ es la transformada z de la secuencia $f(0), f(1), f(2), \ldots$, entonces $z^{-1} F(z)$ es la transformada z de la secuencia desplazada en el tiempo $f(-1), f(0), f(1), \ldots$, en donde $f(-1) \equiv 0$. Esta relación se llama **teorema del desplazamiento**.

EJEMPLO 4.31. Las transformadas z de las secuencias $\{(\frac{1}{3})^k\}$ y $\{(\frac{1}{2})^k\}$ son $\mathcal{Z}\{(\frac{1}{3})^k\} = z/(z - \frac{1}{3})$, y $\mathcal{Z}\{(\frac{1}{2})^k\} = z/(z - \frac{1}{2})$. Entonces, por la propiedad 1,

$$\mathcal{Z}\left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} = \frac{3z}{z - \frac{1}{2}} - \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2z^2 - \frac{z}{2}}{z^2 - \frac{5z}{6} + \frac{1}{6}}$$

EJEMPLO 4.32. Las inversas de las transformadas z de las funciones $z/(z + \frac{1}{2})$ y $z/(z - \frac{1}{4})$ son

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z + \frac{1}{2}}\right] = \left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}, \qquad \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z - \frac{1}{4}}\right] = \left\{\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}$$

Entonces, por la propiedad 1,

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[2\frac{z}{z + \frac{1}{2}} - 4\frac{z}{z - \frac{1}{4}}\right] = 2\,\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z + \frac{1}{2}}\right] - 4\,\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z - \frac{1}{4}}\right] = \left\{2\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 4\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}$$

EJEMPLO 4.33. La transformada z de la secuencia $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, (\frac{1}{2})^k, \ldots$ es $z/(z - \frac{1}{2})$. Entonces, por la propiedad 2, la transformada z de la secuencia $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, (\frac{1}{2})^{k+2}, \ldots$ es

$$z^2\left(\frac{z}{z - \frac{1}{2}}\right) - z^2 - \frac{z}{2} = \frac{1}{4}\frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

EJEMPLO 4.34. La transformada z de $\{(\frac{1}{4})^k\}$ es $z/(z - \frac{1}{4})$. El valor inicial de $\{(\frac{1}{4})^k\}$ puede determinarse mediante el teorema de valor inicial como

$$\lim_{k \to 0}\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\} = \lim_{z \to \infty}(1 - z^{-1})\left(\frac{z}{z - \frac{1}{4}}\right) = 1$$

EJEMPLO 4.35. La transformada z de la secuencia $\{1-(\frac{1}{4})^k\}$ es $\frac{3}{4}z/(z^2-\frac{5z}{4}+\frac{1}{4})$. El valor final de esta secuencia puede determinarse mediante el teorema del valor final como

$$\lim_{k\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^k\right\}=\lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\left(\frac{\frac{3}{4}z}{z^2-\frac{5z}{4}+\frac{1}{4}}\right)=1$$

EJEMPLO 4.36. La inversa de la transformada z de $z/(z-\frac{1}{4})$ es $\{(\frac{1}{4})^k\}$. La inversa de $(\frac{z}{2})/(\frac{z}{2}-\frac{1}{4})$ es $\{2^k(\frac{1}{4})^k\}=\{(\frac{1}{2})^k\}$.

Para los tipos de problemas de control considerados en este libro, las transformadas z resultantes son funciones algebraicas racionales de z, como se ilustra a continuación, y hay dos métodos prácticos para invertirlas. El primero es una técnica numérica que genera una expansión en una serie de potencias por una división no abreviada.

Suponga que la transformada z tiene la forma:

$$F(z)=\frac{b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_1z+b_0}{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}$$

Fácilmente puede escribirse de nuevo en potencias de z^{-1} como

$$F(z)=\frac{b_n+b_{n-1}z^{-1}+\cdots+b_0z^{-n}}{a_n+a_{n-1}z^{-1}+\cdots+a_0z^{-n}}$$

multiplicando cada término por z^{-n}. Entonces, la división no abreviada del numerador entre el denominador, produce un polinomio en z^{-1} de la forma:

$$F(z)=\frac{b_n}{a_n}+\frac{1}{a_n}\left(b_{n-1}-\frac{b_na_{n-1}}{a_n}\right)z^{-1}+\cdots$$

EJEMPLO 4.37. La transformada z de $z/(z-\frac{1}{2})$ puede escribirse de nuevo como $1/(1-z^{-1/2})$, expresión que mediante una división no abreviada tiene la forma:

$$\frac{1}{1-z^{-1}/2}=1+\left(\frac{1}{2}\right)z^{-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^2z^{-2}+\cdots$$

Por el segundo método de inversión, $F(z)$ se expande primero en una forma de fracción parcial especial, y cada término se invierte utilizando las propiedades discutidas anteriormente.

En la tabla 4.2 se presentan algunos pares de transformadas z. Cuando esta tabla se utiliza junto con las propiedades de las transformadas z descritas antes, y se emplean las técnicas de expansión en fracciones parciales descritas en la sección 4.7, es suficiente para resolver todos los problemas de este libro. En el apéndice B se presenta una tabla más completa de transformadas z.

Tabla 4.2

k-ésimo término de la secuencia de tiempo	Transformada z
1 en k, 0 en cualquier otra parte (Secuencia delta de Kronecker)	z^{-k}
1 (Secuencia de paso unitario)	$\dfrac{z}{z-1}$
k (Secuencia de rampa unitaria)	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
A^k (Para números complejos A)	$\dfrac{z}{z-A}$
kA^k	$\dfrac{Az}{(z-A)^2}$
$\dfrac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}{(n-1)!}A^k$	$\dfrac{z^n}{(z-A)^n}$

El último par de transformadas, de la tabla 4.2, puede utilizarse para generar muchas transformadas útiles, eligiendo adecuadamente A y utilizando la propiedad 1.

Los ejemplos siguientes ilustran cómo pueden invertirse las transformadas z utilizando el método de expansión en fracciones parciales.

EJEMPLO 4.38. Para invertir la transformada z $F(z) = 1/(z+1)(z+2)$, conformamos la expansión en fracciones parciales de $F(z)/z$:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z(z+1)(z+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{-1}{z+1} + \frac{\frac{1}{2}}{z+2}$$

Entonces

$$F(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z+2}$$

que puede invertirse término por término, como

$$f(0) = 0$$

$$f(k) = -(-1)^k + \frac{1}{2}(-2)^k \quad \text{para todo } k \geq 1$$

EJEMPLO 4.39. Para invertir $F(z) = 1/(z+1)^2(z+2)$, tomamos la expansión en fracciones parciales de $F(z)/z$:

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2}}{z} + \frac{0}{z+1} + \frac{-1}{(z+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{z+2}$$

Entonces

$$F(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{(z+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{z}{z+2}$$

$$f(k) = -k(-1)^k - \frac{1}{2}(-2)^k \quad \text{para todo } k \geq 1 \quad \text{y} \quad f(0) = 0$$

EJEMPLO 4.40. Utilizando el último par de transformadas, de la tabla 4.2, puede generarse la transformada z de la secuencia $\{k^2/2\}$, teniendo en cuenta los siguientes pares de transformadas:

$$\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2!}\right\} \leftrightarrow \frac{z^3}{(z-1)^3}$$

$$\{k\} \leftrightarrow \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\{1\} \leftrightarrow \frac{z}{z-1}$$

Puesto que

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2!} = \frac{k^2}{2} + \frac{3}{2}k + 1$$

entonces, por la propiedad 1,

$$\mathcal{Z}\left\{\frac{k^2}{2}\right\} = \frac{z^3}{(z-1)^3} - \frac{3}{2}\frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} = \frac{z(z+1)/2}{(z-1)^3}$$

Las ecuaciones de diferencia de coeficientes constantes de n-simo orden pueden resolverse utilizando los métodos de las transformadas z mediante un procedimiento que es virtualmente el mismo empleado para resolver ecuaciones diferenciales por medio de las transformadas de Laplace. Esto se ilustra paso a paso en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.41. La ecuación de diferencia

$$x(k+2) + \frac{5}{6}x(k+1) + \frac{1}{6}x(k) = 1$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x(1) = 1$ se transforma en z aplicando las propiedades 1 y 2. Mediante la propiedad 1 (linealidad):

$$\mathcal{Z}\left\{x(k+2) + \frac{5}{6}x(k+1) + \frac{1}{6}x(k)\right\} = \mathcal{Z}\{x(k+2)\} + \frac{5}{6}\mathcal{Z}\{x(k+1)\} + \frac{1}{6}\cdot\mathcal{Z}\{x(k)\} = \mathcal{Z}\{1\}$$

Mediante la propiedad 2, si $\mathcal{Z}[x(k)] \equiv X(z)$, entonces

$$\mathcal{Z}\{x(k+1)\} = zX(z) - zx(0) = zX(z)$$
$$\mathcal{Z}\{x(k+2)\} = z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) = z^2X(z) - z$$

A partir de la tabla 4.2, vemos que la transformada z de la secuencia paso unitario es

$$\mathcal{Z}\{1\} = \frac{z}{z-1}$$

La sustitución directa de estas expresiones en la ecuación transformada produce entonces

$$\left(z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)X(z) - z = \frac{z}{z-1}$$

Así, la transformada z $X(z)$ de la secuencia solución $x(k)$ es

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} + \frac{z}{(z-1)\left(z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)} = X_a(z) + X_b(z)$$

Nótese que el primer término $X_a(z)$ resulta de las condiciones iniciales, y el segundo, $X_b(z)$, resulta de la secuencia de entrada. En consecuencia, el inverso del primer término es la *respuesta libre*, y el inverso del segundo es la *respuesta forzada*. El primero puede invertirse formando la expansión en fracciones parciales

$$\frac{X_a(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} = -\frac{6}{z + \frac{1}{2}} + \frac{6}{z + \frac{1}{3}}$$

De esto,

$$X_a(z) = -6\frac{z}{z + \frac{1}{2}} + 6\frac{z}{z + \frac{1}{3}}$$

y de la tabla 4.2, el inverso de $X_a(z)$ (la respuesta libre) es

$$x_a(k) = -6\left(-\frac{1}{2}\right)^k + 6\left(-\frac{1}{3}\right)^k \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

De modo similar, para encontrar la respuesta forzada se forma la siguiente expansión en fracciones parciales:

$$\frac{X_b(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{3}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{4}{z + \frac{1}{2}} + \frac{-\frac{9}{2}}{z + \frac{1}{3}}$$

Así

$$X_b(z) = \frac{\frac{1}{2}z}{z-1} + \frac{4z}{z + \frac{1}{2}} - \frac{\frac{9}{2}z}{z + \frac{1}{3}}$$

Entonces, de la tabla 4.2, la inversa de $X_b(z)$ (la respuesta forzada) es

$$x_b(k) = \frac{1}{2} + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{9}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

La respuesta total $x(k)$ es

$$x(k) \equiv x_a(k) + x_b(k) = \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

Las ecuaciones de diferencias lineales de vectores y matrices con coeficientes constantes, presentadas en la sección 3.17, también pueden resolverse mediante las técnicas de transformadas z, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.42. Considere la ecuación de diferencia del ejemplo 4.41, escrita en la forma de variables de estado (*véase* el ejemplo 3.36):

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -\frac{5}{6}x_2(k) - \frac{1}{6}x_1(k) + 1$$

con condiciones iniciales $x_1(0) = 0$ y $x_2(0) = 1$. En la forma de vectores y matrices, estas dos ecuaciones se escriben como

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

en donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{5}{6} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u(k) = 1$. La transformada z de la forma de vectores y matrices de la ecuación es

$$z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) = A\mathbf{X}(z) + \frac{z}{z-1}\mathbf{b}$$

en donde $\mathbf{X}(z)$ es la transformada z de un vector evaluado, cuyos componentes son las transformadas z de los componentes correspondientes del vector de estado $\mathbf{x}(k)$. Esta ecuación transformada puede escribirse de nuevo como

$$(zI - A)\mathbf{X}(z) = z\mathbf{x}(0) + \frac{z}{z-1}\mathbf{b}$$

en donde I es la matriz identidad o unidad. La transformada z del vector solución $\mathbf{x}(k)$ es

$$\mathbf{X}(z) = z(zI - A)^{-1}\mathbf{x}(0) + \frac{z}{z-1}(zI - A)^{-1}\mathbf{b}$$

en donde $(\cdot)^{-1}$ representa el *inverso* de la matriz. Puesto que

$$zI - A = \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{1}{6} & z + \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

entonces

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} \begin{bmatrix} z + \frac{5}{6} & 1 \\ -\frac{1}{6} & z \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en $(zI - A)^{-1}$, $\mathbf{x}(0)$ y $\mathbf{b}$, producen

$$\mathbf{X}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{z}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} \\ \dfrac{z^2}{z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{z}{(z-1)\left(z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)} \\ \dfrac{z^2}{(z-1)\left(z^2 + \frac{5}{6}z + \frac{1}{6}\right)} \end{bmatrix}$$

en donde, el primer término es la transformada z de la respuesta libre, y el segundo, la transformada de la respuesta forzada. Utilizando el método de expansión en fracciones parciales y la tabla 4.2, la inversa de esta transformada z es

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \\ \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^k \end{bmatrix} \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

4.10 Determinación de raíces de polinomios

Los resultados de las secciones 4.7, 4.8 y 4.9 indican que encontrar la solución de ecuaciones diferenciales y de diferencia lineales con coeficientes constantes mediante las técnicas de transformada, generalmente requiere la determinación de las raíces de ecuaciones polinómicas de la forma:

$$Q_n(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = 0$$

en donde $a_n = 1, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ son constantes reales, y s se remplaza por z para los polinomios de transformada z.

Las raíces de una ecuación polinómica de segundo orden $s^2 + a_1 s + a_0 = 0$ pueden obtenerse directamente de la fórmula de la ecuación cuadrática, y están dadas por

$$s_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \qquad s_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

Pero, para polinomios de orden superior, en general, tales expresiones analíticas no existen. Las que existen son muy complicadas. Afortunadamente, existen técnicas numéricas para determinar estas raíces.

Como una ayuda para el uso de tales técnicas numéricas, se dan las siguientes propiedades generales de $Q_n(s)$:

1. Si una raíz repetida de multiplicidad n_i se cuenta como n_i raíces, entonces $Q_n(s) = 0$ tiene exactamente n raíces (teorema fundamental del álgebra).
2. Si $Q_n(s)$ se divide por el factor $s + p$ hasta obtener un residuo constante, el residuo es $Q_n(-p)$.
3. $s + p$ es un factor de $Q_n(s)$ si y sólo si $Q_n(-p) = 0$ [$-p$ es una raíz de $Q_n(s) = 0$].
4. Si $\sigma + j\omega$ (con σ y ω reales) es una raíz de $Q_n(s) = 0$, entonces $\sigma - j\omega$ también es raíz de $Q_n(s) = 0$.
5. Si n es impar, $Q_n(s) = 0$ tiene por lo menos una raíz real.
6. El número de raíces reales positivas de $Q_n(s) = 0$ no puede exceder el número de variaciones de signo de los coeficientes del polinomio $Q_n(s)$, y el número de raíces negativas no puede exceder el número de variaciones de signo de los coeficientes de $Q_n(-s)$ (regla de los signos, de Descartes).

De las técnicas disponibles para la determinación iterativa de las raíces de una ecuación polinómica (o de modo equivalente, de los factores del polinomio), algunas permiten determinar sólo las raíces reales, y otras, las reales y las complejas. A continuación se presentan los dos tipos.

El método de Horner

Este método puede utilizarse para determinar las *raíces reales* de la ecuación polinómica $Q_n(s) = 0$. Los pasos a seguir son:

1. Evaluar $Q_n(s)$ para los valores enteros reales de s, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, hasta que para dos valores enteros consecutivos como k_0 y $k_0 + 1$, $Q_n(k_0)$ y $Q_n(k_0 + 1)$ tengan signos opuestos. Entre k_0 y $k_0 + 1$ se encuentra una raíz real. Sin perder generalidad, se supone que esta raíz es positiva. Se toma k_0 como la primera aproximación a la raíz. En los pasos restantes se obtienen correcciones a la misma.
2. Determinar una secuencia de polinomios $Q_n^l(s)$ utilizando la relación recursiva

$$Q_n^{l+1}(s) = Q_n^l\left(\frac{k_l}{10^l} + s\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i^{l+1} s^i \qquad l = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.13}$$

   en donde $Q_n^0(s) = Q_n(s)$, y los valores k_l, $l = 1, 2, \ldots$, se generan en el paso 3.
3. Determinar el entero k_l en cada iteración, evaluando $Q_n^1(s)$ para los valores reales de s dados por $s = k/10^l$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Para dos valores consecutivos de k, por ejemplo k_l y k_{l+1}, los valores de $Q_n(k_l/10^l)$ y $Q_n(k_{l+1}/10^l)$ tienen signos opuestos.
4. Repetir el procedimiento hasta que se alcance la exactitud deseada de la raíz. La aproximación de la raíz real para la N-sima iteración, está dada por

$$s_N = \sum_{l=0}^{N} \frac{k_l}{10^l} \tag{4.14}$$

   Cada iteración aumenta la exactitud de la aproximación en una cifra decimal.

El método de Newton

Este método puede determinar las *raíces reales* de la ecuación polinomial $Q_n(s) = 0$. Los pasos a seguir son:

1. Obtener una primera aproximación de una raíz, s_0, haciendo una suposición "razonable" o mediante una técnica como la del paso 1 del método de Horner.

2. Generar una secuencia de aproximaciones mejoradas hasta que se alcance la exactitud deseada, mediante la relación recursiva

$$s_{l+1} = s_l - \left. \frac{Q_n(s)}{\frac{d}{ds}[Q_n(s)]} \right|_{s=s_l}$$

que también puede escribirse como

$$s_{l+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} (i-1) a_i s_l^i}{\sum_{i=1}^{n} i a_i s_l^{i-1}} \qquad (4.15)$$

en donde $l = 0, 1, 2, \ldots$

Este método no proporciona una medida de la exactitud de la aproximación. En realidad, no hay ninguna garantía de que las aproximaciones converjan al valor correcto.

El método de Lin-Bairstow

Este método puede determinar *las raíces reales y las complejas* de la ecuación polinomial $Q_n(s) = 0$. Más exactamente, este método define los factores cuadráticos de $Q_n(s)$ a partir de los cuales se determinan dos raíces mediante la fórmula cuadrática. Por supuesto, las raíces pueden ser reales o complejas. Los pasos a seguir son:

1. Obtener una primera aproximación de un factor cuadrático

$$s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

de $Q_n(s) = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i$ mediante algún método, tal vez una suposición "razonable". En los pasos siguientes se consigue la corrección a esta aproximación.

2. Generar un conjunto de constantes $b_{n-2}, b_{n-3}, \ldots, b_0, b_{-1}, b_{-2}$ a partir de la relación recursiva en donde $b_n = b_{n-1} = 0$ e $i = n, n-1, \ldots, 1, 0$.

$$b_{i-2} = a_i - \alpha_1 b_{i-1} - \alpha_0 b_i$$

3. Generar un conjunto de constantes $c_{n-2}, c_{n-3}, \ldots, c_1, c_0$ a partir de la relación recursiva.

$$c_{i-1} = b_{i-1} - \alpha_1 c_i - \alpha_0 c_{i+1}$$

en donde $c_n = c_{n-1} = 0$ e $i = n, n-1, \ldots, 1$.

4. Resolver las dos ecuaciones simultáneas

$$c_0 \Delta\alpha_1 + c_1 \Delta\alpha_0 = b_{-1}$$
$$(-\alpha_1 c_0 - \alpha_0 c_1)\Delta\alpha_1 + c_0 \Delta\alpha_0 = b_{-2}$$

para $\Delta\alpha_1$ y $\Delta\alpha_0$. La nueva aproximación del factor cuadrático es

$$s^2 + (\alpha_1 + \Delta\alpha_1)s + (\alpha_0 + \Delta\alpha_0)$$

5. Repetir los pasos 1 al 4 para el factor cuadrático obtenido en el paso 4, hasta que las aproximaciones sucesivas se encuentren lo suficientemente cercanas.

Este método no proporciona una medida de la exactitud de la aproximación. En realidad, no hay ninguna garantía de que las aproximaciones converjan al valor correcto.

El método del lugar de las raíces

Este método puede utilizarse para determinar las raíces reales y las complejas de una ecuación polinomial $Q_n(s) = 0$. La técnica se estudiará en el Capítulo 13.

4.11 El plano complejo: diagramas de polos y ceros

Las funciones racionales $F(s)$ para los sistemas continuos pueden escribirse nuevamente como

$$F(s) = \frac{b_m \sum_{i=0}^{m} (b_i/b_m) s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i} = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=0}^{n} (s + p_i)}$$

en donde los términos $s + z_i$ son los factores del numerador polinomial, y los términos $s + p_i$ son los del denominador polinomial, con $a_n = 1$. Si s se remplaza por z, $F(z)$ representa una función del sistema para los sistemas discretos en el tiempo.

Definición 4.6: Aquellos valores de la variable compleja s, para los cuales $|F(s)|$ [el valor absoluto de $F(s)$] es cero, se denominan **ceros** de $F(s)$.

Definición 4.7: Aquellos valores de la variable compleja s, para los cuales $|F(s)|$ es infinito, se denominan polos de $F(s)$.

EJEMPLO 4.43. Sea $F(s)$ dada por

$$F(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6}$$

que puede reescribirse como

$$F(s) = \frac{2(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

$F(s)$ tiene *ceros finitos* en $s = -1$ y $s = 2$, y un *cero* en $s = \infty$. $F(s)$ tiene *polos finitos* en $s = -3$, $s = -1 - j$ y $s = -1 + j$.

Los **polos** y los **ceros** son números complejos determinados por dos variables reales, una que representa la parte real, y la otra, la parte imaginaria del número complejo. Entonces, un polo o un cero pueden representarse como puntos en el sistema de coordenadas rectangulares. La *abscisa* de este punto representa la parte real, y la *ordenada* la parte imaginaria. En el plano s la abscisa se llama **eje** σ, y la ordenada **eje** $j\omega$. En el plano z la abscisa se llama **eje** μ, y la ordenada **eje jv**. Los planos definidos por estos sistemas de coordenadas por lo general se llaman **plano complejo** (plano s o plano z). Aquella mitad del plano complejo en la cual $\mathrm{Re}(s) < 0$ o $\mathrm{Re}(z) < 0$ se llama **lado izquierdo del plano** s o **del plano** z (LIP), y aquella mitad en la que $\mathrm{Re}(s) > 0$ o $\mathrm{Re}(z) > 0$ se llama **lado derecho del plano** s o **del plano** z (LDP). La porción del plano z en la que $|z| < 1$ se llama (el interior del) **círculo unitario** en el plano z.

La posición de un polo en el plano complejo se nota simbólicamente mediante una equis ($\times$), y la posición de un cero, mediante un pequeño círculo ($\bigcirc$). El plano s que incluye las posiciones de los polos y los ceros finitos de $F(s)$ se denomina **diagrama de polos y ceros** de $F(s)$. Para el plano z, se tiene una descripción similar.

EJEMPLO 4.44. La función racional

$$F(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

tiene los polos finitos $s = -3$, $s = -1 - j$, y $s = -1 + j$, y los ceros finitos $s = -1$ y $s = 2$. En la figura 4-2 se muestra el diagrama de polos y ceros de $F(s)$.

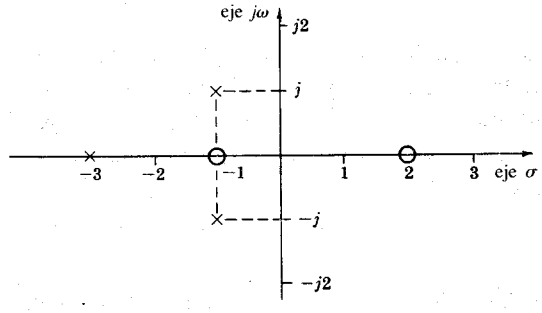


Figura 4-2

4.12 Evaluación gráfica de residuos*

Sea $F(s)$ una función racional escrita en su forma de factores como:

$$F(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)}$$

Puesto que $F(s)$ es una función compleja, puede escribirse en *forma polar* como

$$F(s) = |F(s)|e^{j\phi} = |F(s)| \angle \phi$$

en donde $|F(s)|$ es el valor absoluto de $F(s)$ y $\phi \equiv \arg F(s) = \tan^{-1}$ [Im $F(s)$/Re $F(s)$].

$F(s)$ además puede escribirse en términos de las formas polares de los factores $s + z_i$ y $s + p_i$ como

$$F(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^{m} |s + z_i|}{\prod_{i=1}^{n} |s + p_i|} \angle \left[\sum_{i=1}^{m} \phi_{iz} - \sum_{i=1}^{n} \phi_{ip} \right]$$

en donde $s + z = |s + z_i| \angle \phi_{iz}$ y $s + p_i = |s + p_i| \angle \phi_{ip}$.

Cada número complejo s, z_i, p_i, $s + z_i$ y $s + p_i$ puede representarse por un vector en el plano s. Si p es un número complejo general, el vector que lo representa tiene magnitud $|p|$ y dirección definida por el ángulo

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{\text{Im } p}{\text{Re } p}\right]$$

medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj a partir del eje σ positivo.

En la figura 4-3 se muestran un polo $-p_i$ y un cero $-z_i$ típicos, junto con una variable compleja general s. También se muestran las *sumas de vectores* $s + z_i$ y $s + p_i$. Nótese que el vector $s + z_i$ comienza en el cero $-z_i$ y termina en s, y el vector $s + p_i$ comienza en el polo $-p_i$ y termina en s.

* En esta sección, mientras se emplee s para representar la variable compleja no se intenta representar la variable de Laplace únicamente, sino más bien se hace referencia a una variable compleja en general, y la discusión se aplica tanto a las transformadas de Laplace como a las transformadas z.

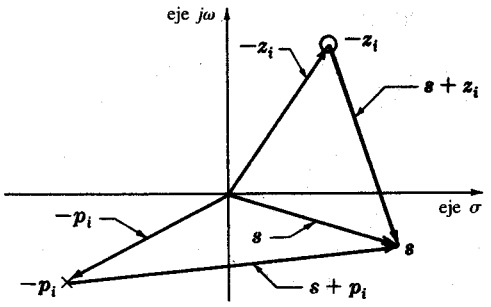


Figura 4-3

El *residuo* $c_{k1} \equiv c_k$ del polo $-p_k$ para los diferentes polos de la función racional $F(s)$, está dado por

$$c_k = (s+p_k)F(s)|_{s=-p_k} = \left. \frac{b_m(s+p_k)\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} \right|_{s=-p_k}$$

Estos residuos pueden determinarse mediante el siguiente procedimiento gráfico:

1. Dibujar el diagrama de polos y ceros de $(s + p_k)\ F(s)$.
2. Sobre este diagrama, dibujar los vectores comenzando en los polos y ceros de $(s + p_k)$ $F(s)$, y terminando en $-p_k$. Medir la magnitud (en la escala del diagrama de polos y ceros) de estos vectores y los ángulos correspondientes desde el eje real positivo en la dirección contraria al sentido del movimiento de las manecillas del reloj.
3. Obtener la magnitud $|c_k|$ del residuo c_k por medio del producto de b_m y las magnitudes de los vectores desde los ceros hasta $-p_k$, dividido entre el producto de las magnitudes de los vectores desde los polos hasta $-p_k$.
4. Determinar al ángulo ϕ_k del residuo c_k mediante la suma de los ángulos de los vectores desde los ceros hasta $-p_k$ menos la suma de los ángulos de los vectores desde los polos hasta $-p_k$. Esto es cierto para b_m positivo. Si b_m es negativo, se suman 180° a ese ángulo.

El residuo c_k en forma polar es

$$c_k = |c_k|e^{j\phi_k} = |c_k|\angle \phi_k$$

o en forma rectangular

$$c_k = c_k \cos\phi_k + j\, c_k \operatorname{sen} \phi_k$$

Esta técnica gráfica no es aplicable directamente para la evaluación de residuos de polos múltiples.

4.13 Sistemas de segundo orden

Como se indicó en la sección 3.14, muchos sistemas de control pueden describirse o aproximarse mediante la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 u$$

En la cual el coeficiente positivo ω_n se denomina **frecuencia natural no amortiguada**, y el coeficiente ζ es la **razón de amortiguación** del sistema.

La transformada de Laplace de $y(t)$, cuando las condiciones iniciales son cero, es

$$Y(s) = \left[\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\right]U(s)$$

en donde $U(s) = \mathscr{L}[u(t)]$. Los polos de la función $Y(s)/U(s) = \omega_n^2/(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ son

$$s = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Nótese que:

1. Si $\zeta > 1$, los dos polos son negativos y reales.
2. Si $\zeta = 1$, los polos son iguales, negativos y reales ($s = -\omega_n$).
3. Si $0 < \zeta < 1$, los polos son las conjugadas complejas con partes reales negativas ($s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$).
4. Si $\zeta = 0$, los polos son imaginarios y conjugadas complejas ($s = \pm j\omega_n$).
5. Si $\zeta < 0$, los polos se encuentran al lado derecho del plano s (LDP).

En este libro es de particular interés el caso 3, ya que representa un **sistema subamortiguado de segundo orden**, Los polos son conjugadas complejas con partes reales negativas localizadas en

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

o en

$$s = -\alpha \pm j\omega_d$$

en las cuales $1/\alpha \equiv 1/\zeta\omega_n$ se denomina **constante de tiempo** del sistema, y $\omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1 - \zeta_2}$, **frecuencia natural amortiguada** del sistema. Para un ω_n fijo, la figura 4-4 muestra la localización de estos polos en función de ζ, para $0 < \zeta < 1$. El lugar geométrico es un semicírculo de radio ω_n. El ángulo θ está relacionado con la razón de amortiguación por medio de $\theta = \cos^{-1}\zeta$.

No existe una descripción similar tan simple y útil para los sistemas de segundo orden que se representan mediante ecuaciones de diferencia.

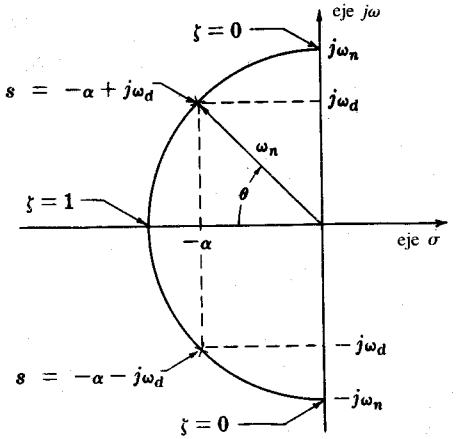


Figura 4-4

Problemas resueltos

Transformadas de Laplace a partir de su definición

4.1 Demuestre que la función paso unitario $\mathbf{1}(t)$ tiene transformada de Laplace, y determine su transformada.

La sustitución directa en la ecuación, de la definición 4.2, produce

$$\int_{0^+}^{\infty} |\mathbf{1}(t)| e^{-\sigma_0 t}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-\sigma_0 t}\, dt = -\frac{1}{\sigma_0} e^{-\sigma_0 t}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{\sigma_0} < +\infty$$

para $\sigma_0 > 0$. La transformada de Laplace está dada por la definición 4.1:

$$\mathscr{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_{0^+}^{\infty} \mathbf{1}(t)\, e^{-st}\, dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \text{para Re } s > 0$$

4.2 Demuestre que la función rampa unitaria t tiene transformada de Laplace, y determine su transformada.

La sustitución directa en la ecuación, de la definición 4.2, produce

$$\int_{0^+}^{\infty} |t| e^{-\sigma_0 t}\, dt = \frac{e^{-\sigma_0 t}}{\sigma_0^2}(-\sigma_0 t - 1)\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{\sigma_0^2} < +\infty$$

para $\sigma_0 > 0$. La transformada de Laplace está dada por la definición 4.1:

$$\mathscr{L}[t] = \int_{0^+}^{\infty} te^{-st}\, dt = \frac{e^{-st}}{s^2}(-st - 1)\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s^2} \qquad \text{para Re } s > 0$$

4.3 Demuestre que la función sen t tiene transformada de Laplace, y determine su transformada.

La integral $\int_{0^+}^{\infty} |\operatorname{sen} t| e^{-\sigma_0 t}\, dt$ puede evaluarse rescribiéndola sobre todos los semiciclos positivos de sen t como

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \operatorname{sen} t\, e^{-\sigma_0 t}\, dt = \frac{e^{-\sigma_0 n\pi}}{\sigma_0^2 + 1}\left[e^{-\sigma_0 \pi} + 1\right]$$

para n par, y para todos los semiciclos negativos de sen t como

$$-\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \operatorname{sen} t\, e^{-\sigma_0 t}\, dt = \frac{e^{-\sigma_0 n\pi}}{\sigma_0^2 + 1}\left[e^{-\sigma_0 \pi} + 1\right]$$

para n impar. Entonces

$$\int_{0^+}^{\infty} |\operatorname{sen} t| e^{-\sigma_0 t}\, dt = \frac{e^{-\sigma_0 \pi} + 1}{\sigma_0^2 + 1} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sigma_0 n\pi}$$

Para $e^{-\sigma_0 \pi} < 1$ ó $\sigma_0 > 0$ la suma converge y puede escribirse en forma cerrada como

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sigma_0 n\pi} = \frac{1}{1 - e^{-\sigma_0 \pi}}$$

Entonces

$$\int_{0^+}^{\infty} |\operatorname{sen} t| e^{-\sigma_0 t}\, dt = \left[\frac{1 + e^{-\sigma_0 \pi}}{1 - e^{-\sigma_0 \pi}}\right]\left(\frac{1}{\sigma_0^2 + 1}\right) < +\infty \qquad \text{para} \quad \sigma_0 > 0$$

Finalmente, $\mathscr{L}[\operatorname{sen} t] = \int_{0^+}^{\infty} \operatorname{sen} t\, e^{-st}\, dt = \dfrac{e^{-st}(-s \operatorname{sen} t - \cos t)}{s^2 + 1}\Big|_{0^+}^{\infty} = \dfrac{1}{s^2 + 1}$ para $\operatorname{Re} s > 0$

4.4 Demuestre que la transformada de Laplace de la función impulso unitario está dada por $\mathscr{L}[\delta(t)] = 1$.

La sustitución directa de la ecuación (*3.19*) en la ecuación de la definición 4.1 produce

$$\int_{0^+}^{\infty} \delta(t)\, e^{-st}\, dt = \int_{0^+}^{\infty} \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \Delta t)}{\Delta t}\right] e^{-st}\, dt$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left[\int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathbf{1}(t)}{\Delta t} e^{-st}\, dt - \int_{0^+}^{\infty} \frac{\mathbf{1}(t - \Delta t)}{\Delta t} e^{-st}\, dt\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-\Delta t s}}{s}\right]$$

en donde la transformada de Laplace de $\mathbf{1}(t)$ es $1/s$, como se demostró en el problema 4.1, y el segundo término se obtiene utilizando la propiedad 9. Ahora

$$e^{-\Delta t s} = 1 - \Delta t s + \frac{(\Delta t s)^2}{2!} - \frac{(\Delta t s)^3}{3!} + \cdots$$

(*véase* la referencia [1]). Así

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-\Delta t s}}{s}\right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\Delta t - \frac{(\Delta t)^2 s}{2!} + \frac{(\Delta t)^3 s^2}{3!} - \cdots\right] = 1$$

Propiedades de la transformada de Laplace y de su inversa

4.5. Demuestre que $\mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$, en donde $F_1(s) = \mathscr{L}[f_1(t)]$ y $F_2(s) = \mathscr{L}[f_2(t)]$ (propiedad 1).

Por definición

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] &= \int_{0^+}^{\infty} [a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] e^{-st}\, dt \\ &= \int_{0^+}^{\infty} a_1 f_1(t) e^{-st}\, dt + \int_{0^+}^{\infty} a_2 f_2(t) e^{-st}\, dt \\ &= a_1 \int_{0^+}^{\infty} f_1(t) e^{-st}\, dt + a_2 \int_{0^+}^{\infty} f_2(t) e^{-st}\, dt \\ &= a_1 \mathscr{L}[f_1(t)] + a_2 \mathscr{L}[f_2(t)] = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)\end{aligned}$$

4.6 Demuestre que $\mathscr{L}^{-1}[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$, en donde $\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)] = f_1(t)$ y $\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)] = f_2(t)$ (propiedad 2).

Por definición

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}[a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} [a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)] e^{st}\, ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} a_1 F_1(s) e^{st}\, ds + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} a_2 F_2(s) e^{st}\, ds \\ &= a_1 \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s) e^{st}\, ds\right] + a_2 \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(s) e^{st}\, ds\right] \\ &= a_1 \mathscr{L}^{-1}[F_1(s)] + a_2 \mathscr{L}^{-1}[F_2(s)] = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\end{aligned}$$

4.7 Demuestre que la transformada de Laplace de la derivada df/dt de una función $f(t)$ está dada por $\mathscr{L}[df/dt] = sF(s) - f(0^+)$, en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ (propiedad 3).

Por definición,

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \lim_{\substack{T \to \infty \\ \epsilon \to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt$$

Integrando por partes,

$$\lim_{\substack{T\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\,dt = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \left[f(t)\,e^{-st}\Big|_{\epsilon}^{T} + s\int_{\epsilon}^{T} f(t)\,e^{-st}\,dt \right] = -f(0^+) + sF(s)$$

en donde $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = f(0^+)$.

4.8 Demuestre que

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$$

en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ (Propiedad 4).

Por definición y con un cambio en el orden de las integraciones, tenemos

$$\mathscr{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \int_{0^+}^{\infty}\int_0^t f(\tau)\,d\tau\,e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} f(\tau)\int_{\tau}^{\infty} e^{-st}\,dt\,d\tau$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} f(\tau)\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{\tau}^{\infty}\right] d\tau = \int_{0^+}^{\infty} f(\tau)\frac{e^{-s\tau}}{s}\,d\tau = \frac{F(s)}{s}$$

4.9 Demuestre que $f(0^+) \equiv \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$, en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ (propiedad 5).

A partir del problema 4.7,

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\,dt$$

Ahora hacemos que $s \to \infty$, esto es,

$$\lim_{s\to\infty} [sF(s) - f(0^+)] = \lim_{s\to\infty} \left[\lim_{\substack{T\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\,dt \right]$$

Puesto que los procesos de límite pueden intercambiarse, tenemos

$$\lim_{s\to\infty} \left[\lim_{\substack{T\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\,dt \right] = \lim_{\substack{T\to\infty\\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} \left(\lim_{s\to\infty} e^{-st} \right) dt$$

Pero el $\lim_{s\to\infty} e^{-st} = 0$. En consecuencia el lado derecho de la ecuación es cero, y $\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0^+)$.

4.10 Demuestre que si $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existe, entonces $f(\infty) \equiv \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$, en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ (propiedad 6).

Del problema 4.7,

$$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+) = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt$$

Ahora, hacemos $s \to 0$, esto es,

$$\lim_{s\to 0}[sF(s) - f(0^+)] = \lim_{s\to 0}\left[\lim_{\substack{T\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt\right]$$

Puesto que los procesos de límite son intercambiables, tenemos

$$\lim_{s\to 0}\left[\lim_{\substack{T\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt} e^{-st}\, dt\right] = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt}\left(\lim_{s\to 0} e^{-st}\right) dt = \lim_{\substack{T\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \int_{\epsilon}^{T} \frac{df}{dt}\, dt = f(\infty) - f(0^+)$$

Sumando $f(0^+)$ a ambos lados de la última ecuación se produce $\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty)$ si existe el límite $f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t)$.

4.11. Demuestre que $\mathscr{L}[f(t/a)] = aF(as)$, en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ (propiedad 7).

Por definición $\mathscr{L}[f(t/a)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t/a)e^{-st}\, dt$. Haciendo el cambio de variable $\tau = t/a$,

$$\mathscr{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = a\int_{0^+}^{\infty} f(\tau)\, e^{-(as)\tau}\, d\tau = aF(as)$$

4.12. Demuestre que $\mathscr{L}^{-1}[F(s/a)] = af(at)$, en donde $f(t) = \mathscr{L}^{-1}[F(s)]$ (propiedad 8).

Por definición,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F\left(\frac{s}{a}\right) e^{st}\, ds$$

Haciendo el cambio de variable $\omega = s/a$,

$$\mathscr{L}^{-1}\left[F\left(\frac{s}{a}\right)\right] = \frac{a}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(\omega)\, e^{\omega(at)}\, d\omega = af(at)$$

4.13. Demuestre que $\mathscr{L}[f(t-T)] = e^{-sT}F(s)$, en donde $f(t-T) = 0\ t \leq T$ y $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ (propiedad 9).

Por definición,

$$\mathscr{L}[f(t-T)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t-T)\,e^{-st}\,dt = \int_{T}^{\infty} f(t-T)\,e^{-st}\,dt$$

Haciendo el cambio de variable $\theta = t - T$,

$$\mathscr{L}[f(t-T)] = \int_{0^+}^{\infty} f(\theta)\,e^{-s\theta}e^{-sT}\,d\theta = e^{-s}\,F(s)$$

4.14. Demuestre que $\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$, en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ (propiedad 10).

Por definición,

$$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-at}f(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{0^+}^{\infty} f(t)\,e^{-(s+a)t}\,dt = F(s+a)$$

4.15. Demuestre que

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega)\,F_2(s-\omega)\,d\omega$$

En donde $F_1(s) = \mathscr{L}[f_1(t)]$ y $F_2(s) = \mathscr{L}[f_2(t)]$ (propiedad 11).

Por definición,

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f_1(t)f_2(t)\,e^{-st}\,dt$$

Pero

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega)\,e^{\omega t}\,d\omega$$

En consecuencia

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{0^+}^{\infty}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega)\,e^{\omega t}\,d\omega\,f_2(t)\,e^{-st}\,dt$$

Intercambiando el orden de las integraciones se produce

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega)\int_{0^+}^{\infty} f_2(t)\,e^{-(s-\omega)t}\,dt\,d\omega$$

Puesto que $\int_{0^+}^{\infty} f_2(t)e^{-(s-\omega)t}\,dt = F_2(s-\omega)$,

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\omega)\,F_2(s-\omega)\,d\omega$$

4.16. Demuestre que

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_{0^+}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$$

en donde $f_1(t) = \mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]$ y $f_2(t) = \mathscr{L}^{-1}[F_2(s)]$ (propiedad 12).

Por definición,

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(s)\,F_2(s)\,e^{st}\,ds$$

Pero $F_1(s) = \int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau$. Por tanto

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau\,F_2(s)\,e^{st}\,ds$$

Intercambiando el orden de las integraciones se produce

$$\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_{0^+}^{\infty}\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(s)\,e^{s(t-\tau)}\,ds f_1(\tau)\,d\tau$$

Puesto que

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_2(s)\,e^{s(t-\tau)}\,ds = f_2(t-\tau)$$

entonces $\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_{0^+}^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_{0^+}^{t} f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,d\tau$

en donde la segunda igualdad es verdadera puesto que $f_2(t-\tau) = 0$ para $\tau \geq t$.

4.17. Demuestre que

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^i y}{dt^i}\right] = s^i Y(s) - \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} y_0^k$$

para $i > 0$, en donde $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ y $y_0^k = (d^k y/dt^k)|_{t=0^+}$

Este resultado puede demostrarse por inducción matemática. Para $i = 1$,

$$\mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0^+) = sY(s) - y_0^0$$

como se demostró en el problema 4.7. Ahora, suponemos que este resultado también es válido para $i = n - 1$, es decir

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right] = s^{n-1}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k}y_0^k$$

Entonces $\mathscr{L}[d^n y/dt^n$ se puede escribir como

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^n y}{dt^n}\right] = \mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)\right] = s\mathscr{L}\left[\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right] - \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^+}$$

$$= s\left(s^{n-1}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-2} s^{n-2-k}y_0^k\right) - y_0^{n-1} = s^n Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k}y_0^k$$

Para el caso especial en que $n = 2$, tenemos $\mathscr{L}[d^2y/dt^2] = s^2Y(s) - sy_0^0 - y_0^1$.

Transformadas de Laplace y sus inversas a partir de la tabla de pares de transformadas

4.18. Encuentre la transformada de Laplace de $f(t) = 2e^{-t}\cos 10t - t^4 + 6e^{-(t-10)}$ para $t > 0$.

De la tabla de pares de transformadas,

$$\mathscr{L}[e^{-t}\cos 10t] = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 10^2} \qquad \mathscr{L}[t^4] = \frac{4!}{s^5} \qquad \mathscr{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}$$

Utilizando la propiedad 9, $\mathscr{L}[e^{-(t-10)}] = e^{-10s}/(s+1)$. Utilizando la propiedad 1,

$$\mathscr{L}[f(t)] = 2\mathscr{L}[e^{-t}\cos 10t] - \mathscr{L}[t^4] + 6\mathscr{L}[e^{-(t-10)}] = \frac{2(s+1)}{s^2+2s+101} - \frac{24}{s^5} + \frac{6e^{-10s}}{s+1}$$

4.19. Encuentre la inversa de la transformada de Laplace de

$$F(s) = \frac{2e^{-0.5s}}{s^2 - 6s + 13} - \frac{s-1}{s^2 - 2s + 2}$$

para $t > 0$.

$$\frac{2}{s^2 - 6s + 13} = \frac{2}{(s-3)^2 + 2^2} \qquad \frac{s-1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

Las inversas de las transformadas se determinan directamente de la tabla 4.1, así

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^2 + 2^2}\right] = e^{3t}\operatorname{sen} 2t \qquad \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}\right] = e^t \cos t$$

Utilizando la propiedad 9, *y luego* la propiedad 2, el resultado es

$$f(t) = \begin{cases} -e^t \cos t & 0 < t \le 0.5 \\ e^{3(t-0.5)} \operatorname{sen} 2(t-0.5) - e^t \cos t & t > 0.5 \end{cases}$$

Transformadas de Laplace de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

4.20. Determine la transformada de la salida $Y(s)$ para la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 6y = \frac{d^2u}{dt^2} - u$$

en donde y = la salida, u = la entrada y las condiciones iniciales son

$$y(0^+) = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+} = 0 \qquad \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0^+} = 1$$

Utilizando la propiedad 3 o el resultado del problema 4.17, las transformadas de Laplace de los términos de la ecuación son como siguen:

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^3y}{dt^3}\right] = s^3Y(s) - s^2y(0^+) - s\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+} - \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0^+} = s^3Y(s) - 1$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2Y(s) - sy(0^+) - \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^+} = s^2Y(s)$$

$$\mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] = sY(s) - y(0^+) = sY(s) \qquad \mathscr{L}\left[\frac{d^2u}{dt^2}\right] = s^2U(s) - su(0^+) - \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0^+}$$

en donde $Y(s) = \mathscr{L}[y(t)]$ y $U(s) = \mathscr{L}[u(t)]$. La transformada de Laplace de la ecuación dada puede escribirse ahora como

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}\left[\frac{d^3y}{dt^3}\right] + 3\mathscr{L}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] - \mathscr{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + 6\mathscr{L}[y] \\ &\quad = s^3Y(s) - 1 + 3s^2Y(s) - sY(s) + 6Y(s) \\ &\quad = \mathscr{L}\left[\frac{d^2u}{dt^2}\right] - \mathscr{L}[u] = s^2U(s) - su(0^+) - \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0^+} - U(s) \end{aligned}$$

Resolviendo para $Y(s)$, obtenemos

$$Y(s) = \frac{(s^2-1)U(s)}{s^3 + 3s^2 - s + 6} - \frac{su(0^+) + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0^+}}{s^3 + 3s^2 - s + 6} + \frac{1}{s^3 + 3s^2 - s + 6}$$

4.21. ¿Qué parte de la solución del problema 4.20 es la transformada de la respuesta libre? ¿La respuesta forzada?

La transformada de la respuesta libre $Y_a(s)$ es aquella parte de la transformada de salida $Y(s)$ que no depende de la entrada $u(t)$, de sus derivadas o de su transformada; es decir,

$$Y_a(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 - s + 6}$$

La transformada de la respuesta forzada $Y_b(s)$ es aquella parte de $Y(s)$ que depende de $u(t)$, de su derivada y de su transformada; es decir,

$$Y_b(s) = \frac{(s^2 - 1)U(s)}{s^2 + 3s^2 - s + 6} - \frac{su(0^+) + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0^+}}{s^3 + 3s^2 - s + 6}$$

4.22. ¿Cuál es el polinomio característico para la ecuación diferencial de los problemas 4.20 y 4.21?

El polinomio característico es el denominador polinomial que es común a las transformadas de las respuestas libre y forzada (*véase* el problema 4.21), es decir, el polinomio $s^3 + 3s^2 - s + 6$.

4.23 Determine la transformada de la salida $Y(s)$ del sistema del problema 4.20 para una entrada $u(t) = 5 \text{ sen } t$.

De la tabla 4.1, $U(s) \equiv \mathscr{L}[u(t)] = \mathscr{L}[5 \text{ sen } t] = 5/(s^2 + 1)$.

Los valores iniciales de $u(t)$ y du/dt son $u(0^+) = \lim_{t \to 0} 5 \text{ sen } t = 0$, $(du/dt)|_{t=0^+} = \lim_{t \to 0} 5 \cos t = 5$.

Sustituyendo estos valores en la transformada de la salida $Y(s)$ dada en el problema 4.20.

$$Y(s) = \frac{s^2 - 9}{(s^3 + 3s^2 - s + 6)(s^2 + 1)}$$

Expansiones en fracciones parciales

4.24. Una función racional $F(s)$ puede representarse por

$$F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{n} b_i s^i}{\prod_{i=1}^{r} (s + p_i)^{n_i}} = b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s + p_i)^k} \qquad (4.10a)$$

en donde la segunda forma es la expansión en fracciones parciales de $F(s)$. Demuestre que las constantes c_{ik} están dadas por

$$c_{ik} = \frac{1}{(n_i - k)!} \frac{d^{n_i - k}}{ds^{n_i - k}} \left[(s + p_i)^{n_i} F(s) \right] \Big|_{s = -p_i} \tag{4.10b}$$

Sea $(s + p_i)$ el factor de interés y de forma

$$(s + p_j)^{n_j} F(s) = (s + p_j)^{n_j} b_n + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{(s + p_j)^{n_j} c_{ik}}{(s + p_i)^k}$$

Esta puede escribirse de nuevo como

$$(s + p_j)^{n_j} F(s) = (s + p_j)^{n_j} b_n + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{(s + p_j)^{n_j} c_{ik}}{(s + p_i)^k} + \sum_{i=j+1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{(s + p_j)^{n_j} c_{ik}}{(s + p_i)^k} + \sum_{k=1}^{n_j} (s + p_j)^{n_j - k} c_{jk}$$

Ahora

$$\frac{d^{n_j - l}}{ds^{n_j - l}} \left[(s + p_j)^{n_j} F(s) \right] \Big|_{s = -p_j}$$

Nótese que los tres primeros términos del lado derecho de $(s + p_j)^{n_j} F(s)$ tendrán el factor $s + p_j$ en el numerador aún después de derivarlos $n_j - l$ veces ($l = 1,2,\ldots, n_j$) de modo que se hacen cero cuando se evalúan en $s = -p_j$. Entonces

$$\frac{d^{n_j - l}}{ds^{n_j - l}} \left[(s + p_j)^{n_j} F(s) \right] \Big|_{s = -p_j} = \frac{d^{n_j - l}}{ds^{n_j - l}} \left[\sum_{k=1}^{n_j} (s + p_j)^{n_j - k} c_{jk} \right] \Big|_{s = -p_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{l} (n_j - k)(n_j - k - 1) \cdots (l - k + 1)(s + p_j)^{(-k + l)} c_{jk} \Big|_{s = -p_j}$$

Excepto por el término en la sumatoria para el que $k = l$, todos los demás son cero puesto que contienen a $(s + p_j)$ como factor. Entonces

$$\frac{d^{n_j - l}}{ds^{n_j - l}} \left[(s + p_j)^{n_j} F(s) \right] \Big|_{s = -p_j} = (n_j - l)(n_j - l - 1) \cdots (1) c_{jl}$$

o

$$c_{jl} = \frac{1}{(n_j - l)!} \frac{d^{n_j - l}}{ds^{n_j - l}} \left[(s + p_j)^{n_j} F(s) \right] \Big|_{s = -p_j}$$

4.25. Expanda $Y(s)$, del ejemplo 4.17, en fracciones parciales.

$Y(s)$ puede escribirse de nuevo con el denominador polinomial en forma factorizada como

$$Y(s) = \frac{-(s^2+s-1)}{s(s+1)(s+2)}$$

La expansión en fracciones parciales de $Y(s)$ es [*véase* la ecuación (*4.11*)]

$$Y(s) = b_3 + \frac{c_{11}}{s} + \frac{c_{21}}{s+1} + \frac{c_{31}}{s+2}$$

en donde $b_3 = 0$,

$$c_{11} = \left.\frac{-(s^2+s-1)}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \quad c_{21} = \left.\frac{-(s^2+s-1)}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -1 \quad c_{31} = \left.\frac{-(s^2+s-1)}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

Así
$$Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)}$$

4.26. Expanda $Y(s)$, del ejemplo 4.19, en fracciones parciales.

$Y(s)$ puede escribirse nuevamente con el denominador polinomial en forma factorizada como

$$Y(s) = \frac{s^2+9s+19}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

La expansión de $Y(s)$ en fracciones parciales es [*véase* la ecuación (*4.11*)]

$$Y(s) = b_3 + \frac{c_{11}}{s+1} + \frac{c_{21}}{s+2} + \frac{c_{31}}{s+4}$$

en donde $b_3 = 0$,

$$c_{11} = \left.\frac{s^2+9s+19}{(s+2)(s+4)}\right|_{s=-1} = \frac{11}{3} \qquad c_{21} = \left.\frac{s^2+9s+19}{(s+1)(s+4)}\right|_{s=-2} = -\frac{5}{2}$$

$$c_{31} = \left.\frac{s^2+9s+19}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=-4} = -\frac{1}{6}$$

Así
$$Y(s) = \frac{11}{3(s+1)} - \frac{5}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

Inversas de las transformadas de Laplace utilizando expansiones en fracciones parciales

4.27. Determine $y(t)$ para el sistema del ejemplo 4.17.

Del resultado del problema 4.25, la transformada de $y(t)$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}[y(t)] \equiv Y(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)}$$

En consecuencia

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = \frac{1}{2}[1 - 2e^{-t} - e^{-2t}] \qquad t > 0$$

4.28. Determine $y(t)$ para el sistema del ejemplo 4.19.

Del resultado del problema 4.26, la transformada de $y(t)$ puede escribirse como

$$\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \frac{11}{3(s+1)} - \frac{5}{2(s+2)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

En consecuencia

$$y(t) = \frac{11}{3}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

Raíces de los polinomios

4.29. Encuentre una aproximación de una raíz real de la ecuación polinomial

$$Q_3(s) = s^3 - 3s^2 + 4s - 5 = 0$$

con una exactitud de tres cifras significativas utilizando el *método de Horner*.

Mediante la regla de los signos, de Descartes, $Q_3(s)$ tiene tres variaciones en los signos de sus coeficientes (1 a -3, -3 a 4 y 4 a -5). Entonces puede haber tres raíces reales positivas. $Q_3(-s) = -s^3 - 3s^2 - 4s - 5$ no tiene cambios de signo; en consecuencia $Q_3(s)$ no tiene raíces reales negativas y sólo se necesita considerar los valores de s mayores que cero.

Paso 1 — Tenemos $Q_3(0) = -5, Q_3(1) = -3, Q_3(2) = -1, Q_3(3) = 7$. En consecuencia $k_0 = 2$ y la primera aproximación es $s_0 = k_0 = 2$.

Paso 2 — Se determina que $Q_3^1(s)$ es

$$Q_3^1(s) = Q_3^0(2+s) = (2+s)^3 - 3(2+s)^2 + 4(2+s) - 5 = s^3 + 3s^2 + 4s - 1$$

Paso 3 — $Q_3^1(0) = -1, Q_3^1(\frac{1}{10}) = -0.569, Q_3^1(\frac{2}{10}) = -0.072, Q_3^1(\frac{3}{10}) = 0.497$. De donde $k_1 = 0.2$ y $s_1 = k_0 + k_1 = 2.2$.

Ahora se repite el paso 2 para determinar $Q_3^2(s)$:

$$Q_3^2(s) = Q_3^1(0.2+s) = (0.2+s)^3 + 3(0.2+s)^2 + 4(0.2+s) - 1 = s^3 + 3.6s^2 + 5.32s - 0.072$$

Repitiendo el paso 3: $Q_3^2(0) = -0.072, Q_3^2(1/100) = -0.018, Q_3^2(2/100) = 0.036$. De donde $k_2 = 0.01$ y $s_2 = k_0 + k_1 + k_2 = 2.21$ que es una aproximación de la raíz con una exactitud de tres cifras significativas.

4.30. Encuentre una aproximación de una raíz real de la ecuación polinomial dada en el problema 4.29, utilizando el *método de Newton*. Efectúe cuatro iteraciones y compare el resultado con la solución obtenida en el problema 4.29.

La secuencia de aproximaciones se define haciendo $n = 3$, $a_3 = 1$, $a_2 = -3$, $a_1 = 4$ y $a_0 = -5$ en la relación recursiva del método de Newton [ecuación (*4.15*)]. El resultado es

$$s_{l+1} = \frac{2s_l^3 - 3s_l^2 + 5}{3s_l^2 - 6s_l + 4} \qquad l = 0, 1, 2, \ldots$$

Digamos que la primera suposición es $s_0 = 0$. Entonces

$$s_1 = \frac{5}{4} = 1.25 \qquad s_3 = \frac{2(3.55)^3 - 3(3.55)^2 + 5}{3(3.55)^2 - 6(3.55) + 4} = 2.76$$

$$s_2 = \frac{2(1.25)^3 - 3(1.25)^2 + 5}{3(1.25)^2 - 6(1.25) + 4} = 3.55 \qquad s_4 = \frac{2(2.76)^3 - 3(2.76)^2 + 5}{3(2.76)^2 - 6(2.76) + 4} = 2.35$$

La siguiente iteración produce $s_5 = 2.22$, y la secuencia converge.

4.31. Encuentre una aproximación de un factor cuadrático del polinomio

$$Q_3(s) = s^3 - 3s^2 + 4s - 5$$

de los problemas 4.29 y 4.30, utilizando el *método de Lin-Bairstow*. Realice dos iteraciones.

Paso 1 — Escoja el factor $s^2 - s + 2$ como primera aproximación.
Las constantes necesarias en el paso 2 son

$$\alpha_1 = -1, \alpha_0 = 2, n = 3, a_3 = 1, a_2 = -3, a_1 = 4, a_0 = -5.$$

Paso 2 — De la relación recursiva

$$b_{i-2} = a_i - \alpha_1 b_{i-1} - \alpha_0 b_i$$

$i = n, n-1, \ldots, 1, 0$, se forman las siguientes constantes:

$$b_1 = a_3 = 1 \qquad b_0 = a_2 + b_1 = -2$$

$$b_{-1} = a_1 + b_0 - 2b_1 = 0 \qquad b_{-2} = a_0 + b_{-1} - 2b_0 = -1$$

Paso 3 — De la relación recursiva

$$c_{i-1} = b_{i-1} - \alpha_1 c_i - \alpha_0 c_{i+1}$$

$i = n, n-1, \ldots, 1$, se determinan las siguientes constantes:

$$c_1 = b_1 = 1 \qquad c_0 = b_0 + c_1 = -1$$

Paso 4 — Las ecuaciones simultáneas

$$c_0\,\Delta\alpha_1 + c_1\,\Delta\alpha_0 = b_{-1}$$
$$(-\alpha_1 c_0 - \alpha_0 c_1)\,\Delta\alpha_1 + c_0\,\Delta\alpha_0 = b_{-2}$$

ahora pueden escribirse como

$$-\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_0 = 0$$
$$-3\Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_0 = -1$$

cuya solución es $\Delta\alpha_1 = \frac{1}{4}$, $\Delta\alpha_0 = \frac{1}{4}$, y la nueva aproximación del factor cuadrático es

$$s^2 - 0.75s + 2.25$$

Si se repiten los pasos 1 a 4 para $\alpha_1 = -0.75$, $\alpha_0 = 2{,}25$ la segunda iteración produce

$$s^2 - 0.7861s + 2.2583$$

Diagramas de polos y ceros

4.32. Determine todos los polos y ceros de $F(s) = (s^2 - 16)/(s^5 - 7s^4 - 30s^3)$.

Los polos finitos de $F(s)$ son las raíces del polinomio del denominador de la ecuación

$$s^5 - 7s^4 - 30s^3 = s^3(s+3)(s-10) = 0$$

En consecuencia $s = 0$, $s = -3$ y $s = 10$ son los polos finitos de $F(s)$. $s = 0$ es una raíz triple de la ecuación y se denomina **polo triple** de $F(s)$. Estos son los únicos valores de s para los cuales $|F(s)|$ es infinito, y son todos los polos de $F(s)$. Los ceros finitos de $F(s)$ son las raíces del polinomio del numerador de la ecuación

$$s^2 - 16 = (s-4)(s+4) = 0$$

En consecuencia $s = 4$ y $s = -4$ son los *ceros finitos* de $F(s)$. A medida que $|s| \to \infty$, $F(s) \cong 1/s^3 \to 0$. Entonces $F(s)$ tiene un cero triple en $s = \infty$.

4.33 Dibuje un diagrama de polos y ceros para la función del problema 4.32.

De la solución del problema 4.32, $F(s)$ tiene *ceros finitos* en $s = 4$ y $s = -4$, y **polos finitos** en $s = 0$ (un polo triple) $s = -3$ y $s = 10$. En la figura 4-5 se muestra el diagrama de polos y ceros.

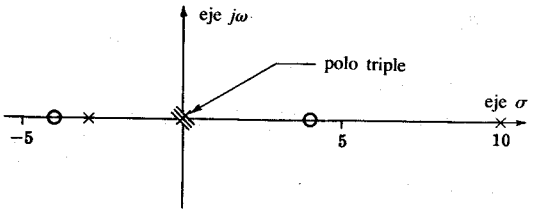


Figura 4-5

4.34. Utilizando la técnica gráfica evalúe los residuos de la función

$$F(s) = \frac{20}{(s+10)(s+1+j)(s+1-j)}$$

En la figura 4-6 se muestra el diagrama de polos y ceros de $F(s)$.

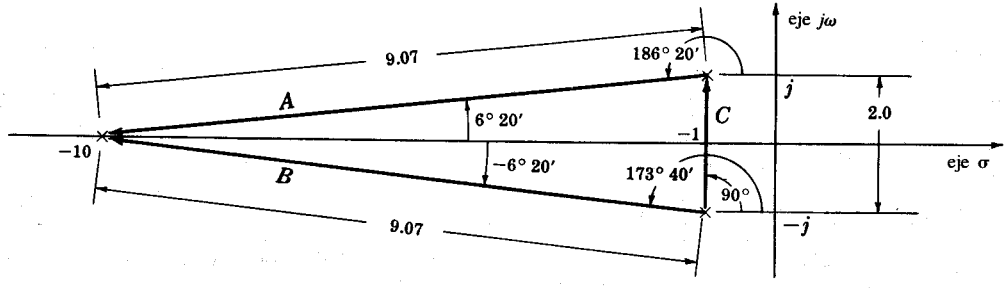


Figura 4-6

En este diagrama de polos y ceros se incluyen los vectores de desplazamiento entre los polos. Por ejemplo, A es el vector de desplazamiento del polo $s = -10$ en relación con el polo $s = -1 + j$. Entonces, resulta claro que $-A$ es el vector de desplazamiento del polo $s = -1 + j$ en relación con el polo $s = -10$.

La magnitud del residuo en el polo $s = -10$ es

$$|c_1| = \frac{20}{|A||B|} = \frac{20}{(9.07)(9.07)} = 0.243$$

El ángulo ϕ_1 del residuo en $s = -10$ es el negativo de la suma de los ángulos de A y B, esto es, $\phi_1 = -[186°20' + 173°40'] = -360°$. En consecuencia $c_1 = 0.243$.

La magnitud del residuo en el polo $s = -1 + j$ es

$$|c_2| = \frac{20}{|-A||C|} = \frac{20}{(9.07)(2)} = 1.102$$

El ángulo ϕ_2 del residuo en el polo $s = -1 + j$ es el negativo de la suma de los ángulos de $-A$ y C: $\phi_2 = -[6°20' + 90°] = -96°20'$. Por tanto $c_2 = 1.102\angle -96°20' = -0.128 - j1.095$.

La magnitud del residuo en el polo $s = -1 - j$ es

$$|c_3| = \frac{20}{|-B||-C|} = \frac{20}{(9.07)(2)} = 1.102$$

El ángulo ϕ_3 del residuo en el polo $s = -1 - j$ es el negativo de la suma de los ángulos de $-B$ y $-C$: $\phi_3 = -[-90° - 6°20'] = 96°20'$. En consecuencia $c_3 = 1.102 \angle 96°20' = -0.128 + j1.095$.

Nótese que los residuos c_2 y c_3 de los polos en conjugada compleja también son conjugadas complejas. Esto siempre es cierto para los residuos de polos en conjugada compleja.

Sistemas de segundo orden

4.35. Determine: *a*) la frecuencia natural no amortiguada ω_n, *b*) la razón de amortiguación ζ, *c*) la constante de tiempo τ, *d*) la frecuencia natural amortiguada ω_d, y *e*) la ecuación característica para el sistema de segundo orden dado por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 9y = 9u$$

Comparando esta ecuación con las definiciones de la sección 4.13, tenemos

a) $\omega_n^2 = 9$ o $\omega_n = 3$ rad/s

b) $2\zeta\omega_n = 5$ o $\zeta = \dfrac{5}{2\omega_n} = \dfrac{5}{6}$

c) $\tau = \dfrac{1}{\zeta\omega_n} = \dfrac{2}{5}$ s

d) $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 1.66$ rad/s

e) $s^2 + 5s + 9 = 0$

4.36. ¿Cómo y por qué el siguiente sistema puede aproximarse a uno de segundo orden?

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 12\frac{d^2y}{dt^2} + 22\frac{dy}{dt} + 20y = 20u$$

Cuando las condiciones iniciales sobre $y(t)$ y sus derivadas son cero, la transformada de la salida es

$$\mathcal{L}[y(t)] \equiv Y(s) = \frac{20}{s^3 + 12s^2 + 22s + 20}U(s)$$

en donde $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$. Esta puede escribirse de nuevo como

$$Y(s) = \frac{10}{41}\left(\frac{1}{s+10} - \frac{s}{s^2+2s+2}\right)U(s) + \frac{80}{41}\left(\frac{U(s)}{s^2+2s+2}\right)$$

El factor constante $\frac{80}{41}$ del segundo término es 8 veces el factor constante del primer término. La salida $y(t)$ estará dominada por la función de tiempo

$$\frac{80}{41}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{U(s)}{s^2+2s+2}\right]$$

La transformada de la salida $Y(s)$ puede aproximarse por este segundo término; esto es,

$$Y(s) \simeq \frac{80}{41}\left(\frac{U(s)}{s^2+2s+2}\right) \simeq \left(\frac{2}{s^2+2s+2}\right)U(s)$$

La aproximación de segundo orden es $d^2y/dt^2 + 2(dy/dt) + 2y = 2u$.

4.37. En el Capítulo 6 se mostrará que la salida $y(t)$ de un sistema causal lineal invariante en el tiempo con todas las condiciones iniciales iguales a cero, está relacionada con la entrada $u(t)$ en el dominio de la transformada de Laplace mediante la ecuación $Y(s) = P(s)U(s)$, en donde $P(s)$ se llama *función de transferencia* del sistema. Demuestre que $p(t)$, la transformada inversa de Laplace de $P(s)$, es igual a la *función de ponderación* $w(t)$ de un sistema descrito por la ecuación diferencial con coeficientes constantes

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = u$$

La respuesta forzada de un sistema descrito por la ecuación anterior está dada por la ecuación (*3.15*), con todos los $b_i = 0$ excepto $b_0 = 1$:

$$y(t) = \int_{0^+}^{t} w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

y $w(t-\tau)$ es la función de ponderación de la ecuación diferencial.

La inversa de la transformada de Laplace de $Y(s) = P(s)U(s)$ se determina fácilmente, a partir de la integral de convolución de la propiedad 12, como

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)] = \mathscr{L}^{-1}[P(s)U(s)] = \int_{0^+}^{t} p(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau$$

En consecuencia

$$\int_{0^+}^{t} w(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau = \int_{0^+}^{t} p(t-\tau)\,u(\tau)\,d\tau \quad \text{o} \quad w(t) = p(t)$$

Problemas misceláneos

4.38. Para la red *R-C* de la figura 4-7:

a) Encuentre una ecuación diferencial que relacione el voltaje de salida y el de entrada u

b) Haga que el voltaje inicial en el capacitor C sea $v_{c0} = 1$ voltio, con la polaridad como se muestra en la figura, y haga $u = 2e^{-t}$. Utilizando la técnica de transformada de Laplace encuentre y.

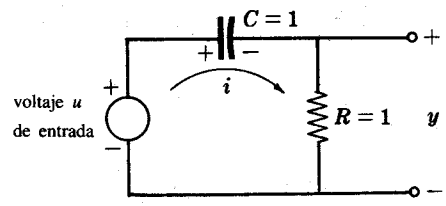


Figura 4-7

a) De la ley del voltaje de Kirchhoff

$$u = v_{c0} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + Ri = v_{c0} + \int_0^t i\,dt + i$$

Pero $y = Ri = i$. En consecuencia $u = v_{c0} + \int_0^t y\,dt + y$. Derivando ambos lados de esta ecuación integral se obtiene la ecuación diferencial $\dot{y} + y = \dot{u}$.

b) La transformada de Laplace de la ecuación diferencial encontrada en la parte *a*) es

$$sY(s) - y(0^+) + Y(s) = sU(s) - u(0^+)$$

en donde $U(s) = \mathscr{L}[2e^{-t}] = 2/(s+1)$ y $u(0^+) = \lim_{t\to 0} 2e^{-t} = 2$. Para hallar $y(0^+)$, se toman los límites a ambos lados de la ecuación original de voltaje:

$$u(0^+) = \lim_{t\to 0} u(t) = \lim_{t\to 0}\left[v_{c0} + \int_0^t y\,dt + y(t)\right] = v_{c0} + y(0^+)$$

En consecuencia $y(0^+) = u(0^+) - v_{c0} = 2 - 1 = 1$. La transformada de $y(t)$ entonces es

$$Y(s) = \frac{2s}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} = -\frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+1} = -\frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1}$$

Finalmente,

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[-\frac{2}{(s+1)^2}\right] + \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = -2te^{-t} + e^{-t}$$

4.39. Determine la transformada de Laplace de la salida del muestreador ideal descrito en el problema 3.5.

De la definición 4.1 y de la ecuación (*3.20*), la propiedad de muestreo del impulso unitario, tenemos

$$U^*(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}U^*(t)\,dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}\sum_{k=0}^{\infty} u(t)\,\delta(t-kT)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{0^+}^{\infty} e^{-st}u(t)\,\delta(t-kT)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT}u(kT)$$

4.40. Compare el resultado del problema 4.39 con la transformada z de la señal muestreada $u(kT)$, $k = 0, 1, 2,\ldots$

Por definición la transformada z de la señal muestreada es

$$U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k}$$

Este resultado se pudo haber obtenido directamente sustituyendo $z = e^{sT}$ en el resultado del problema 4.39.

4.41. Pruebe el teorema del desplazamiento (propiedad 6, sección 4.9).

Por definición,

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} \equiv F(z) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k}$$

Si definimos una nueva secuencia desplazada por $g(0) \equiv f(-1) = 0$ y $g(k) \equiv f(k-1)$, $k = 1, 2,\ldots$, entonces

$$\mathcal{Z}\{g(k)\} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} g(j)z^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} f(j-1)z^{-j}$$

(*véase* el comentario 1 que sigue a la definición 4.4). Ahora redefinamos a k como $k \equiv j - 1$ en la última ecuación. Entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{f(k-1)\} &= \sum_{k=-1}^{\infty} f(k)z^{-k-1} = z^{-1}\sum_{k=-1}^{\infty} f(k)z^{-k} \\ &= z^{-1}f(-1)z^{+1} + z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \\ &= z^0 \cdot 0 + z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} = z^{-1}F(z)\end{aligned}$$

Nótese que la aplicación repetida de este resultado da

$$Z[f(k-j)] = z^{-j}F(z)$$

Problemas suplementarios

4.42. Demuestre que $\mathscr{L}[-tf(t)] = dF(s)/ds$, en donde $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$.

4.43. Utilizando la integral de convolución encuentre la inversa de la transformada de $1/s(s) + 2)$.

4.44. Determine el valor final de la función $f(t)$ cuya transformada de Laplace es

$$F(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+3)(s+5)^2}$$

4.45. Determine el valor inicial de la función $f(t)$ cuya transformada de Laplace es

$$F(s) = \frac{4s}{s^3 + 2s^2 + 9s + 6}$$

4.46. Encuentre la expansión en fracciones parciales de la función $F(s) = 10/(s + 4)(s + 2)^3$.

4.47. Encuentre la inversa de la transformada de Laplace $f(t)$ de la función $F(s) = 10/(s) + 4)(s + 2)^3$.

4.48. Resuelva el problema 3.24 utilizando la técnica de la transformada de Laplace.

4.49. Utilizando la técnica de la transformada de Laplace, encuentre la respuesta forzada de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = 3\frac{du}{dt} + 2u$$

en donde $u(t) = e^{-3t}$, $t > 0$. Compare esta solución con la obtenida en el problema 3.26.

4.50. Usando la técnica de la transformada de Laplace, encuentre las respuestas transiente y en estado estacionario del sistema descrito por la ecuación diferencial $d^2y/dt^2 + 3(dy/dt) + 2y = 1$ con las condiciones iniciales $y(0^+)$ y $(dy/dt)|_{t=0^+} = 1$

4.51. Usando la técnica de la transformada de Laplace, encuentre la respuesta de impulso unitario del sistema descrito por la ecuación diferencial $d^3y/dt^3 + dy/dt = u$.

Respuestas a algunos problemas suplementarios

4.43. $\frac{1}{2}[1 - e^{-2t}]$

4.44. $\frac{2}{75}$

4.45. 0

4.46. $F(s) = \dfrac{5}{(s+2)^3} - \dfrac{5}{2(s+2)^2} + \dfrac{5}{4(s+2)} - \dfrac{5}{4(s+4)}$

4.47. $f(t) = \dfrac{5t^2e^{-2t}}{2} - \dfrac{5te^{-2t}}{2} + \dfrac{5e^{-2t}}{4} - \dfrac{5e^{-4t}}{4}$

4.49. $y_b(t) = 7e^{-2t} - 7e^{-3t} - 7te^{-2t}$

4.50. Respuesta transitoria $= 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-2t}$. Respuesta en estado estacionario $= \frac{1}{2}$.

4.51. $y_b(t) = 1 - \cos t$

Capítulo 5

Estabilidad

5.1 Definiciones de estabilidad

La estabilidad de un sistema continuo o discreto en el tiempo se determina por su respuesta a entradas o perturbaciones. Intuitivamente, un sistema estable es el que permanece en reposo a no ser que se estimule por una fuente externa, y regrese al reposo si se remueven todas las estimulaciones. La estabilidad puede definirse de manera precisa en términos de la respuesta impulso $y_\delta(t)$ de un sistema continuo, o de la respuesta delta de Kronecker $y_\delta(k)$ de un sistema discreto en el tiempo (*véanse* las secciones 3.13 y 3.16), como sigue:

***Definición 5.1a*:** Un sistema continuo (discreto en el tiempo) es **estable** si su respuesta impulso $y_\delta(t)$ (respuesta delta de Kronecker $y_\delta(k)$) tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito.

De otra manera, la definición de sistema estable puede basarse en la respuesta del sistema a **entradas acotadas**, esto es, entradas cuyas magnitudes son menores que algún valor finito en todo momento.

***Definición 5.1b*:** Un sistema continuo o discreto en el tiempo es **estable** si toda entrada acotada produce una salida acotada.

La consideración del *grado* de estabilidad de un sistema, a menudo proporciona valiosa información acerca de su comportamiento. Esto es, si es estable, ¿qué tan cerca está de ser inestable? Este es el concepto de **estabilidad relativa**. Usualmente, la estabilidad relativa se expresa en términos de alguna variación permisible de un parámetro particular del sistema, durante la cual el sistema permanece estable. En los capítulos posteriores se presentarán definiciones más precisas de los indicadores de estabilidad relativa. En el Capítulo 19 se trata la estabilidad de los sistemas no lineales.

5.2 Localización de las raíces características para sistemas continuos

Un resultado importante de los Capítulos 3 y 4 es que la respuesta impulso de un sistema continuo lineal invariable en el tiempo es una suma de funciones exponenciales en el tiempo, cuyos exponentes son las raíces de la ecuación característica del sistema (*véase* la ecuación *4.12*). *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable es que las partes reales de las raíces de la ecuación característica sean negativas*. Esto asegura que la respuesta de impulso disminuirá exponencialmente con el tiempo.

Si el sistema tiene algunas raíces con partes reales iguales a cero, pero no tiene ninguna con parte real positiva, se dice que es **estable marginalmente**. En este caso, la respuesta impulso no disminuye a cero, aunque está acotada, pero ciertas entradas producirán respuestas no acotadas. Entonces, los sistemas estables marginalmente son inestables.

EJEMPLO 5.1. El sistema descrito por la ecuación diferencial transformada en Laplace.

$$(s^2+1)Y(s) = U(s)$$

tiene la ecuación característica

$$s^2+1=0$$

Esta ecuación tiene dos raíces $\pm j$, pero al éstas tener partes reales iguales a cero, el sistema no es estable. Sin embargo es marginalmente estable, puesto que la ecuación no tiene raíces con partes reales positivas. En respuesta a la mayor parte de las entradas o perturbaciones, el sistema oscila con una salida acotada. Sin embargo, si la entrada es $u = \text{sen } t$, la salida contendrá un término de la forma $y = t \cos t$, que no es acotado.

5.3 Criterio de estabilidad de Routh

El criterio de estabilidad de Routh es un método para determinar la estabilidad de un sistema continuo, para sistemas con una ecuación característica de n-simo orden, de la forma:

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

El criterio se aplica utilizando una **tabla de Routh**, definida como sigue:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
$\cdot$	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
$\cdot$	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\cdot$	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$			

en donde a_n, a_{n-1},..., a_0, son los coeficientes de la ecuación característica y

$$b_1 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \qquad b_2 \equiv \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}} \qquad \text{etc.}$$

$$c_1 \equiv \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1} \qquad c_2 \equiv \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1}b_3}{b_1} \qquad \text{etc.}$$

La tabla se continúa horizontal y verticalmente hasta que sólo se obtengan ceros. Cualquier fila puede multiplicarse por una constante positiva antes de calcular la siguiente fila, sin alterar las propiedades de la tabla.

El criterio de Routh: *Todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas si y sólo si los elementos de la primera columna de la tabla de Routh tienen el mismo signo. De lo contrario, el número de raíces con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo.*

EJEMPLO 5.2.

$$s^3 + 6s^2 + 12s + 8 = 0$$

s^3	1	12	0
s^2	6	8	0
s^1	$\frac{64}{6}$	0	
s^0	8		

Puesto que no hay cambio en el signo de la primera columna de la tabla, todas las raíces de la ecuación tienen partes reales negativas.

A menudo es deseable determinar un rango de valores de un parámetro particular del sistema para el cual es estable el sistema. Esto puede lograrse escribiendo las desigualdades que aseguren que no hay cambio de signo en la primera columna de la tabla de Routh para el sistema. Estas desigualdades especifican entonces el rango de valores permisibles para el parámetro.

EJEMPLO 5.3.

$$s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$$

s^3	1	3	0
s^2	3	$1 + K$	0
s^1	$\frac{8 - K}{3}$	0	
s^0	$1 + K$		

Para que no haya cambios de signo en la primera columna, se hace necesario satisfacer las condiciones $8 - K > 0$, $1 + K > 0$. Así, la ecuación característica tiene raíces con partes reales negativas si $-1 < K < 8$, que es la solución simultánea de estas dos desigualdades.

Una fila de ceros para s^1 en la tabla de Routh indica que el polinomio tiene un par de raíces que satisfacen la **ecuación auxiliar**, formada como sigue:

$$As^2 + B = 0$$

en donde A y B son el primero y el segundo elementos de la fila s^2.

Para continuar la tabla, los ceros en la fila s^1 se remplazan con los coeficientes de la derivada de la ecuación auxiliar. La derivada de la ecuación auxiliar es

$$2As + 0 = 0$$

Los coeficientes $2A$ y 0 se colocan en la fila s^1, y la tabla se continúa como se describió antes.

EJEMPLO 5.4. En el ejemplo anterior, la fila s^1 es cero si $K = 8$. En este caso, la ecuación auxiliar es $3s^2 + 9 = 0$. En consecuencia dos de las raíces de la ecuación característica son $s = \pm j\sqrt{3}$.

5.4 Criterio de estabilidad de Hurwitz

El criterio de Hurwitz es otro método para determinar si todas las raíces de la ecuación característica de un sistema continuo tienen partes reales negativas. Este criterio se aplica utilizando los

determinantes formados a partir de los coeficientes de la ecuación característica. Se supone que el primer coeficiente, a_n, es positivo. Los determinantes Δ_i, $i = 1,2,\ldots, n-1$ se forman como los menores principales del determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & \begin{bmatrix} a_0 \text{ si } n \text{ es impar} \\ a_1 \text{ si } n \text{ es par} \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & \cdots & \begin{bmatrix} a_1 \text{ si } n \text{ es impar} \\ a_0 \text{ si } n \text{ es par} \end{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & & & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{vmatrix}$$

Entonces los determinantes se forman como sigue:

$$\Delta_1 = a_{n-1}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} + a_n a_{n-1}a_{n-5} - a_n a_{n-3}^2 - a_{n-4}a_{n-1}^2$$

y así sucesivamente hasta Δ_{n-1}.

El criterio de Hurwitz: *Todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas si y solo si* $\Delta_i > 0$, $i = 1,2,\ldots, n$.

EJEMPLO 5.5. Para $n = 3$,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_0 a_3, \qquad \Delta_1 = a_2$$

Entonces todas las raíces de la ecuación característica tendrán partes reales negativas si

$$a_2 > 0 \qquad a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0 \qquad a_2 a_1 a_0 - a_0^2 a_3 > 0$$

5.5 Criterio de estabilidad de fracciones continuas

Este criterio se aplica a la ecuación característica de un sistema continuo, formando una fracción continua a partir de las porciones impares y pares de la ecuación, de la siguiente manera. Hacemos

$$Q(s) \equiv a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$
$$Q_1(s) \equiv a_n s^n + a_{n-2}s^{n-2} \cdots$$
$$Q_2(s) \equiv a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-3}s^{n-3} \cdots$$

Forme la fracción Q_1/Q_2, y luego divida el numerador entre el denominador e invierta el residuo para formar una fracción continua como sigue:

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{a_n s}{a_{n-1}} + \frac{\left(a_{n-2} - \frac{a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}\right)s^{n-2} + \left(a_{n-4} - \frac{a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}\right)s^{n-4} + \cdots}{Q_2}$$

$$= h_1 s + \cfrac{1}{h_2 s + \cfrac{1}{h_3 s + \cfrac{1}{h_4 s + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{h_n s}}}}}$$

Si $h_1, h_2, \ldots, h_n$ son todos positivos, todas las raíces de $Q(s) = 0$ tienen partes reales negativas.

EJEMPLO 5.6.

$$Q(s) = s^3 + 6s^2 + 12s + 8$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^3 + 12s}{6s^2 + 8} = \frac{1}{6}s + \frac{\frac{32}{3}s}{6s^2 + 8}$$

$$= \frac{1}{6}s + \cfrac{1}{\frac{9}{16}s + \cfrac{1}{\frac{4}{3}s}}$$

Puesto que todos los coeficientes de s en la fracción continua son positivos, es decir, $h_1 = \frac{1}{6}$, $h_2 = \frac{9}{16}$, y $h_3 = \frac{4}{3}$, todas las raíces de la ecuación polinomial $Q(s) = 0$ tienen partes reales negativas.

5.6 Criterios de estabilidad para sistemas discretos en el tiempo

La estabilidad de sistemas discretos se determina mediante las raíces de la ecuación característica del sistema discreto

$$Q(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0 \qquad (5.1)$$

Sin embargo, en este caso la región de estabilidad se define mediante el *círculo unitario* $|z| = 1$ en el plano z. **Una condición suficiente y necesaria para la estabilidad del sistema es que todas las raíces de la ecuación característica tengan una magnitud menor que uno**, es decir, que se encuentren dentro del *círculo unitario*. Esto asegura que la respuesta delta de Kronecker disminuye con el tiempo.

Un criterio de estabilidad para sistemas discretos, similar al de Routh, se llama **prueba de Jury**. Para esta prueba, primero se organizan los coeficientes de la ecuación característica en el denominado *arreglo de Jury*:

fila						
1	a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
2	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
3	b_0	b_1	b_2	$\cdots$	b_{n-1}	
4	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	
5	c_0	c_1	c_2	$\cdots$	c_{n-2}	
6	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	$\cdots$	c_0	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			
$2n-5$	r_0	r_1	r_2	r_3		
$2n-4$	r_3	r_2	r_1	r_0		
$2n-3$	s_0	s_1	s_2			

en donde

$$b_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-k} \\ a_n & a_k \end{vmatrix} \qquad c_k = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-1-k} \\ b_{n-1} & b_k \end{vmatrix}$$

$$s_0 = \begin{vmatrix} r_0 & r_3 \\ r_3 & r_0 \end{vmatrix} \qquad s_1 = \begin{vmatrix} r_0 & r_2 \\ r_3 & r_1 \end{vmatrix} \qquad s_2 = \begin{vmatrix} r_0 & r_1 \\ r_3 & r_2 \end{vmatrix}$$

Las dos primeras filas se escriben utilizando los coeficientes de la ecuación característica, y las dos siguientes se calculan utilizando las relaciones de los determinantes que se mostraron antes. El proceso se continúa de modo que cada par subsiguiente de filas tenga una columna menos que el par anterior, hasta calcular la fila $2n - 3$, la cual sólo tiene tres miembros. Ahí se termina el arreglo.

La prueba de Jury: *Para que las raíces de* $Q(z) = 0$ *tengan magnitudes menores que uno, las condiciones suficientes y necesarias son:*

$$Q(1) > 0$$

$$Q(-1) \quad \begin{cases} > 0 & \text{para } n \text{ par} \\ < 0 & \text{para } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$|a_0| < a_n$$

$$|b_0| > |b_{n-1}|$$

$$|c_0| > |c_{n-2}|$$

$$\vdots$$

$$|r_0| > |r_3|$$

$$|s_0| > |s_2|$$

Nótese que si no se satisfacen las condiciones anteriores para $Q(1)$ o $Q(-1)$, el sistema es inestable, y no hay necesidad de construir el arreglo.

EJEMPLO 5.7. Para $Q(z) = 3z^4 + 2z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ (n par),

$$Q(1) = 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8 > 0$$
$$Q(-1) = 3 - 2 + 1 - 1 + 1 = 2 > 0$$

Debe completarse el arreglo de Jury como

fila					
1	1	1	1	2	3
2	3	2	1	1	1
3	−8	−5	−2	−1	
4	−1	−2	−5	−8	
5	63	38	11		

Las restantes condiciones restrictivas de la prueba son entonces

$$|a_0| = 1 < 3 = a_n$$
$$|b_0| = |-8| > |-1| = |b_{n-1}|$$
$$|c_0| = 63 > 11 = |c_{n-2}|$$

Puesto que se satisfacen todas las restricciones de la prueba de Jury, se concluye que todas las raíces de la ecuación característica están dentro del círculo unitario, y el sistema es estable.

La transformada w

La estabilidad de un sistema lineal discreto en el tiempo, expresada en el dominio z también puede determinarse utilizando los métodos del plano s desarrollados para los sistemas continuos (por ejemplo, Routh, Hurwitz). Las siguientes expresiones equivalentes representan la *transformación bilineal* de la variable compleja z en la nueva variable compleja w:

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \tag{5.2}$$

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \tag{5.3}$$

ella transforma el interior del círculo unitario en el plano z en la mitad izquierda del plano w. En consecuencia, puede determinarse la estabilidad de un sistema discreto en el tiempo con polinomio característico $Q(z)$, examinando las localizaciones de las raíces de

$$Q(w) = Q(z)\big|_{z=(1+w)/(1-w)} = 0$$

en el plano w, tratando w como s y utilizando las técnicas del plano s para establecer las propiedades de estabilidad. Esta transformación se desarrolla más extensamente en el Capítulo 10, y también se usa en los subsiguientes capítulos de análisis y diseño en el dominio de la frecuencia.

EJEMPLO 5.8. La ecuación polinomial

$$27z^3 + 27z^2 + 9z + 1 = 0$$

es la ecuación característica de un sistema discreto en el tiempo. Para verificar la existencia de raíces por fuera del círculo unitario $|z| = 1$, que significaría inestabilidad, hacemos

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}$$

la cual, después de cierta manipulación algebraica, conduce a la nueva ecuación característica en w.

$$w^3 + 6w^2 + 12w + 8 = 0$$

En el ejemplo 5.2 se encontró que esta ecuación solamente tiene raíces en la mitad izquierda del plano complejo. En consecuencia, el sistema original discreto en el tiempo es estable.

Problemas resueltos

Definiciones de estabilidad

5.1. A continuación se presentan las respuestas impulso de varios sistemas lineales continuos. En cada caso determine si la respuesta impulso representa un sistema estable o inestable

$$a)\ h(t) = e^{-t},\quad b)\ h(t) = te^{-t},\quad c)\ h(t) = 1,\quad d)\ h(t) = e^{-t}\operatorname{sen} 3t,\quad e)\ h(t) = \operatorname{sen}\omega t.$$

Si la respuesta impulso tiende a cero cuando el tiempo se aproxima a infinito, el sistema es estable. Como puede verse en la figura 5-1, las respuestas impulso *a*), *b*) y *d*) tienden a cero a medida que el tiempo tiende a infinito, por tanto representan sistemas *estables*. Puesto que las respuestas impulso *c*) y *e*) no tienden a cero, ellas representan sistemas *inestables*. (*Véase* figura 5.1 en la página siguiente).

5.2. Si se aplica una función paso unitario en la entrada de un sistema continuo y la salida permanece por debajo de cierto nivel durante todo el tiempo, ¿es estable el sistema?

El sistema no necesariamente es estable puesto que la salida debe ser acotada para toda entrada acotada. Una salida acotada a una entrada específica acotada no asegura estabilidad.

5.3. Si se aplica una función paso unitario a la entrada de un sistema continuo y la salida es de la forma $y = t$, ¿es estable o inestable el sistema?

El sistema es inestable puesto que una entrada acotada produce una salida no acotada.

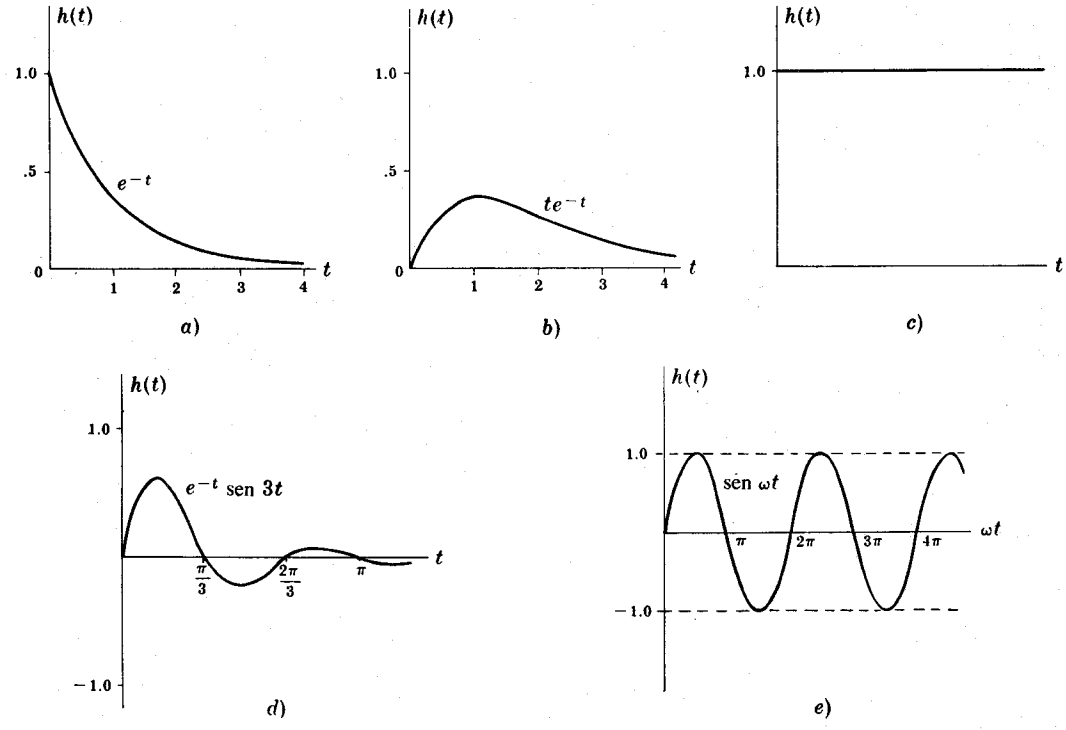


Figura 5-1

Localizaciones de las raíces características para sistemas continuos

5.4. A continuación se presentan las raíces de las ecuaciones características de varios sistemas. Determine en cada caso si el conjunto de raíces representa sistemas estables, marginalmente estables o inestables.

a)	$-1, -2$	*d*)	$-1+j, -1-j$	*g*)	$-6, -4, 7$
b)	$-1, +1$	*e*)	$-2+j, -2-j, 2j, -2j$	*h*)	$-2+3j, -2-3j, -2$
c)	$-3, -2, 0$	*f*)	$2, -1, -3$	*i*)	$-j, j, -1, 1$

Los conjuntos de raíces *a*), *d*) y *h*) representan sistemas estables puesto que todas las raíces tienen partes reales negativas. Los conjuntos de raíces *c*) y *e*) representan sistemas marginalmente estables puesto que todas las raíces tienen partes reales no positivas, es decir, son cero o negativas. Los conjuntos *b*), *f*), *g*) e *i*) representan sistemas inestables puesto que cada uno de ellos tiene por lo menos una raíz con parte real positiva.

5.5. Un sistema tiene polos en -1 y -5, y ceros en 1 y -2. ¿Es estable el sistema?

El sistema es estable puesto que los polos son las raíces de la ecuación característica del sistema (Capítulo 3) que tienen partes reales negativas. El hecho de que el sistema tenga un cero con una parte real positiva no afecta su estabilidad.

5.6. Determine si el sistema con la siguiente ecuación característica es estable:

$$(s+1)(s+2)(s-3)=0.$$

Esta ecuación característica tiene las raíces -1, -2 y 3, y en consecuencia representa un sistema inestable puesto que hay una raíz real positiva.

5.7. La ecuación diferencial de un integrador puede escribirse como sigue: $dy/dt = u$. Determine si un integrador es estable.

La ecuación característica de este sistema es $s = 0$. Puesto que la raíz no tiene parte real negativa, un integrador no es estable. Puesto que no tiene raíces con partes reales positivas, un integrador es marginalmente estable.

5.8. Determine una entrada acotada que produzca una salida no acotada de un integrador.

La entrada $u = 1$ producirá la salida $y = t$, que es no acotada.

Criterio de estabilidad de Routh

5.9. Determine si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable:

$$s^3+4s^2+8s+12=0$$

La tabla de Routh para este sistema es

s^3	1	8
s^2	4	12
s^1	5	0
s^0	12	

Puesto que no hay cambios de signo en la primera columna, todas las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas y el sistema es estable.

5.10. Determine si la siguiente ecuación característica tiene alguna raíz con parte real positiva:

$$s^4+s^3-s-1=0$$

Nótese que el coeficiente del término s^2 es cero. La tabla de Routh para esta ecuación es

s^4	1	0	-1
s^3	1	-1	0
s^2	1	-1	
s^1	0	0	
nueva s^1	2	0	
s^0	-1		

La presencia de ceros en la fila s_1 indica que la ecuación característica tiene dos raíces que satisfacen la ecuación auxiliar formada a partir de la fila s^2 como $s^2 - 1 = 0$. Las raíces de esta ecuación son $+1$ y -1.

La nueva fila s^1 se formó utilizando los coeficientes de la derivada de la ecuación auxiliar: $2s - 0 = 0$. Puesto que hay un cambio de signo, la ecuación característica tiene una raíz con una parte rea' positiva, la raíz en $+1$ determinada a partir de la ecuación auxiliar.

5.11. La ecuación característica de un sistema dado es:

$$s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$$

¿Qué restricciones deben imponérsele al parámetro K para asegurar que el sistema sea estable?

La tabla de Routh para este sistema es

s^4	1	11	K
s^3	6	6	0
s^2	10	K	0
s^1	$\frac{60 - 6K}{10}$	0	
s^0	K		

Para que el sistema sea estable, $60 - 6K > 0$, o $K < 10$ y $K > 0$. Así $0 < K < 10$.

5.12. Construya una tabla de Routh y determine el número de raíces con partes reales positivas para la ecuación

$$2s^3 + 4s^2 + 4s + 12 = 0$$

A continuación se presenta la tabla de Routh para esta ecuación. Aquí se ha dividido por 4 la fila s^2 antes de calcular la fila s^1. La fila s^1 se ha dividido entre 2 antes de calcular la fila s^0.

s^3	2	4
s^2	1	3
s^1	-1	0
s^0	3	

Puesto que hay dos cambios de signo en la primera columna de la tabla de Routh, la ecuación anterior tiene dos raíces con partes reales positivas.

Criterio de estabilidad de Hurwitz

5.13. Determine si la siguiente ecuación característica representa un sistema estable o uno inestable.

$$s^3 + 8s^2 + 14s + 24 = 0$$

Los determinantes de Hurwitz para este sistema son

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 24 & 0 \\ 1 & 14 & 0 \\ 0 & 8 & 24 \end{vmatrix} = 2112 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 1 & 14 \end{vmatrix} = 88 \qquad \Delta_1 = 8$$

Puesto que cada determinante es positivo, el sistema es estable. Nótese que se pudo haber utilizado la formulación general del ejemplo 5.5 para verificar la estabilidad en este caso, sustituyendo los valores apropiados de los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3.

5.14. ¿Para qué rango de valores de K es estable el sistema con la siguiente ecuación característica?

$$s^2 + Ks + 2K - 1 = 0$$

Los determinantes de Hurwitz para este sistema son

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} K & 0 \\ 1 & 2K-1 \end{vmatrix} = 2K^2 - K = K(2K-1) \qquad \Delta_1 = K$$

Para que estos determinantes sean positivos, es necesario que $K > 0$ y $2K - 1 > 0$. Por tanto el sistema es estable si $K > \frac{1}{2}$.

5.15. Un sistema está diseñado para que tenga un desempeño satisfactorio cuando un amplificador de ganancia particular $K = 2$. Determine cuánto puede variar K antes de que el sistema se vuelva inestable, si la ecuación característica es

$$s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 16 + 8K = 0$$

Sustituyendo los coeficientes de la ecuación dada en las condiciones generales de Hurwitz, del ejemplo 5.5, se obtienen las siguientes condiciones para la estabilidad:

$$4 + K > 0 \qquad (4 + K)6 - (16 + 8K) > 0 \qquad (4 + K)(6)(16 + 8K) - (16 + 8K)^2 > 0$$

Suponiendo que la ganancia K del amplificador no puede ser negativa, se satisface la primera condición. Las condiciones segunda y tercera se satisfacen si K es menor que 4. En consecuencia, con un valor de ganancia de diseño del amplificador de 2, el sistema podría tolerar el aumento de ganancia en un factor de 2 antes de hacerse inestable. La ganancia también podría reducirse a cero sin causar inestabilidad.

5.16. Determine las condiciones de Hurwitz para la estabilidad de la siguiente ecuación característica de cuarto orden, suponiendo que a_4 es positivo.

$$a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

Los determinantes de Hurwitz son

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_3\left(a_2a_1a_0 - a_3a_0^2\right) - a_1^2a_0a_4$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_4a_1$$

$$\Delta_1 = a_3$$

Entonces, las condiciones de estabilidad son

$$a_3 > 0 \quad a_3a_2 - a_4a_1 > 0 \qquad a_3a_2a_1 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 > 0 \qquad a_3\left(a_2a_1a_0 - a_3a_0^2\right) - a_1^2a_0a_4 > 0$$

5.17. ¿Es estable el sistema con la siguiente ecuación característica?

$$s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 9s + 12 = 0$$

Sustituyendo los valores apropiados para los coeficientes en las condiciones generales del problema 5.16, tenemos

$$3 > 0 \qquad 18 - 9 > 0 \qquad 162 - 108 - 81 \not> 0 \qquad 3(648 - 432) - 972 \not> 0$$

Puesto que no se satisfacen las dos últimas condiciones, el sistema es inestable.

Criterio de estabilidad de fracciones continuas

5.18. Repita el problema 5.9 empleando el criterio de estabilidad de fracciones continuas.

El polinomio $Q(s) = s^3 + 4s^2 + 8s + 12$ se divide en dos partes:

$$Q_1(s) = s^3 + 8s \qquad Q_2(s) = 4s^2 + 12$$

La fracción continua para $Q_1(s)/Q_2(s)$ es

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^3 + 8s}{4s^2 + 12} = \frac{1}{4}s + \frac{5s}{4s^2 + 12} = \frac{1}{4}s + \cfrac{1}{\frac{4}{5}s + \cfrac{1}{\frac{5}{12}s}}$$

Puesto que todos los coeficientes de s son positivos, el polinomio tiene todas sus raíces en la mitad izquierda del plano, y el sistema con la ecuación característica $Q(s) = 0$ es estable.

5.19. Determine los límites sobre el parámetro K para los cuales el sistema con la siguiente ecuación característica es estable:

$$s^3 + 14s^2 + 56s + K = 0$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^3 + 56s}{14s^2 + K} = \frac{1}{14}s + \frac{(56 - K/14)s}{14s^2 + K} = \frac{1}{14}s + \cfrac{1}{\left[\dfrac{14}{56 - K/14}\right]s + \cfrac{1}{\left[\dfrac{56 - K/14}{K}\right]s}}$$

Para que el sistema sea estable, deben satisfacerse las siguientes condiciones: $56 - K/14 > 0$ y $K > 0$, es decir, $0 < K < 784$.

5.20. Derive las condiciones para las cuales todas las raíces de un polinomio general de tercer orden tienen partes reales negativas.

Para $Q(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$,

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{a_3s^3 + a_1s}{a_2s^2 + a_0} = \frac{a_3}{a_2}s + \frac{[a_1 - a_3a_0/a_2]s}{a_2s^2 + a_0} = \frac{a_3}{a_2}s + \cfrac{1}{\left[\dfrac{a_2}{a_1 - a_3a_0/a_2}\right]s + \cfrac{1}{\left[\dfrac{a_1 - a_3a_0/a_2}{a_0}\right]s}}$$

Las condiciones para que todas las raíces de $Q(s)$ tengan partes reales negativas son

$$\frac{a_3}{a_2} > 0 \qquad \frac{a_2}{a_1 - a_3a_0/a_2} > 0 \qquad \frac{a_1 - a_3a_0/a_2}{a_0} > 0$$

Así, si a_3 es positivo, las condiciones necesarias son $a_2, a_1, a_0 > 0$ y $a_1a_2 - a_3a_0 > 0$. Nótese que si a_3 no es positivo, $Q(s)$ debe multiplicarse por -1 antes de verificar las condiciones anteriores.

5.21. ¿Es estable el sistema con la siguiente ecuación característica?

$$s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 32 = 0$$

$$\frac{Q_1(s)}{Q_2(s)} = \frac{s^4 + 8s^2 + 32}{4s^3 + 16s} = \frac{1}{4}s + \frac{4s^2 + 32}{4s^3 + 16s}$$

$$= \frac{1}{4}s + \frac{1}{s + \dfrac{-16s}{4s^2 + 32}} = \frac{1}{4}s + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{-\dfrac{1}{4}s + \cfrac{1}{-\frac{1}{2}s}}}$$

Puesto que no todos los coeficientes de s son positivos, el sistema es inestable.

Sistemas discretos en el tiempo

5.22. ¿Es estable el sistema con la siguiente ecuación característica?

$$Q(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 1 = 0$$

Aplicando la prueba de Jury, con $n = 4$ (par)

$$Q(1) = 1 + 2 + 3 + 1 + 1 = 8 > 0$$
$$Q(-1) = 1 - 2 + 3 - 1 + 1 = 2 > 0$$

El arreglo de Jury debe construirse como sigue:

Fila					
1	1	1	3	2	1
2	1	2	3	1	1
3	0	−1	0	1	
4	1	0	−1	0	
5	−1	1	0		

Las restricciones de la prueba de Jury son

$$|a_0| = 1 \not< 1 = a_n$$
$$|b_0| = 0 \not> 1 = |b_{n-1}|$$
$$|c_0| = |-1| > 0 = |c_{n-2}|$$

Puesto que no se satisfacen todas las restricciones, el sistema es inestable.

5.23. ¿Es estable el sistema con la siguiente ecuación característica?

$$Q(z) = 2z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 1 = 0$$

Aplicando la prueba de Jury con $n = 4$ par,

$$Q(1) = 2 + 2 + 3 + 1 + 1 = 9 > 0$$
$$Q(-1) = 2 - 2 + 3 - 1 + 1 = 3 > 0$$

El arreglo de Jury debe construirse como sigue:

fila					
1	1	1	3	2	2
2	2	2	3	1	1
3	3	3	2	0	
4	0	2	3	3	
5	9	7	0		

Las restricciones de la prueba son

$$|a_0| = 1 < 2 = a_n$$
$$|b_0| = 3 > 0 = |b_{n-1}|$$
$$|c_0| = 9 > 0 = |c_{n-2}|$$

Puesto que se satisfacen todas las restricciones, el sistema es estable.

5.24 ¿Es estable el sistema con la siguiente ecuación característica?

$$Q(z) = z^5 + 3z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$$

Aplicando la prueba de Jury con $n = 5$ (impar),

$$Q(1) = 1 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 13 > 0$$
$$Q(-1) = -1 + 3 - 3 + 3 - 2 + 1 = 1 > 0$$

Puesto que n es impar, $Q(-1)$ debe ser menor que cero para que el sistema sea estable. En consecuencia el sistema es inestable.

Problemas misceláneos

5.25. Si aparece un cero en la primera columna de la tabla de Routh, ¿el sistema es necesariamente inestable?

Estrictamente hablando, un cero en la primera columna debe interpretarse como carente de signo, es decir, ni positivo ni negativo. En consecuencia, todos los elementos de la primera columna no pueden tener el mismo signo si uno de ellos es cero, y el sistema es inestable. En algunos casos, un cero en la primera columna indica la presencia de dos raíces de igual magnitud pero de signo opuesto (*véase* el problema 5.10). En otros casos, esto indica la presencia de una o más raíces con partes reales cero. Así, una ecuación característica que tenga una o más raíces con parte real cero y ninguna raíz con parte real positiva, producirá una tabla de Routh en la cual todos los elementos de la primera columna no tienen el mismo signo y tampoco ningún cambio de signo.

5.26. Pruebe que un sistema continuo es inestable si cualquiera de los coeficientes de la ecuación característica es cero.

La ecuación característica puede escribirse en la forma

$$(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)\cdots(s-s_n)=0$$

en donde s_1, s_2, s_3, ..., s_n, son las raíces de la ecuación. Si se efectúa la multiplicación en esta ecuación, pueden obtenerse n ecuaciones nuevas que relacionan las raíces y los coeficientes de la ecuación característica en la forma usual. Así

$$a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \qquad \text{ó} \qquad s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}s^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} = 0$$

y las relaciones son

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -\sum_{i=1}^{n} s_i, \quad \frac{a_{n-2}}{a_n} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n} s_i s_j, \quad \frac{a_{n-3}}{a_n} = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} s_i s_j s_k, \ldots, \quad \frac{a_0}{a_n} = (-1)^n s_1 s_2 \cdots s_n$$

Los coeficientes a_{n-1}, a_{n-2},..., a_0 tienen todos el mismo signo que a_n, y son diferentes de cero si todas las raíces s_1, s_2,..., s_n tienen partes reales negativas. La única manera de que alguno de ellos sea cero es que una de las raíces o más tengan partes reales positivas o sean cero. En cualquiera de estos casos el sistema sería inestable.

5.27. Pruebe que un sistema continuo es inestable si todos los coeficientes de la ecuación característica no tienen el mismo signo.

De las relaciones presentadas en el problema 5.26, puede verse que los coeficientes a_{n-1}, a_{n-2},..., a_0 tienen el mismo signo que a_n si todas las raíces s_1, s_2,..., s_n tienen partes reales negativas. La única manera de que cualquiera de estos coeficientes difiera en signo de a_n es que una de las raíces o más tenga una parte real positiva. De este modo el sistema necesariamente es inestable si todos los coeficientes no tienen el mismo signo. Nótese que un sistema *no* es necesariamente estable si todos los coeficientes tienen el mismo signo.

5.28. Los criterios de estabilidad para los sistemas continuos, presentados en este capítulo ¿pueden aplicarse a sistemas continuos que contengan retardos de tiempo?

No, éstos no pueden aplicarse directamente porque los sistemas que tienen retrasos en el tiempo no poseen ecuaciones características de la forma requerida, es decir, polinomios finitos en s. Por ejemplo, la siguiente ecuación característica representa un sistema que contiene un retardo de tiempo:

$$s^2 + s + e^{-sT} = 0$$

Estrictamente hablando, esta ecuación tiene un número infinito de raíces. Sin embargo, en algunos casos puede emplearse una aproximación para e^{-sT} que dé una información útil, aunque no totalmente exacta, en relación con la estabilidad del sistema. Para ilustrar esto, remplacemos e^{-sT} en la ecuación anterior por los dos primeros términos de su expansión en la serie de Taylor. La ecuación entonces se hace

$$s^2 + s + 1 - sT = 0 \qquad o \qquad s^2 + (1 - T)s + 1 = 0$$

Ahora, puede aplicarse uno de los criterios de estabilidad de este capítulo a esta aproximación de la ecuación característica.

5.29. Determine un límite superior aproximado para el retardo de tiempo de modo que el sistema discutido en la solución del problema 5.28 sea estable.

Empleando la ecuación aproximada $s^2 + (1 - T)s + 1 = 0$, los determinantes de Hurwitz son $\Delta_1 = \Delta_2 = 1 - T$. Por tanto, para que el sistema sea estable el retardo de tiempo debe ser menor que 1.

Problemas suplementarios

5.30. Para cada polinomio característico, determine si éste representa un sistema estable o inestable.

a) $2s^4 + 8s^3 + 10s^2 + 10s + 20$ *c*) $s^5 + 6s^4 + 10s^2 + 5s + 24$ *e*) $s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 16$

b) $s^3 + 7s^2 + 7s + 46$ *d*) $s^3 - 2s^2 + 4s + 6$ *f*) $s^6 + 4s^4 + 8s^2 + 16$

5.31. ¿Para qué valores de K el polinomio $s^3 + (4 + K)s^2 + 6s + 12$ tiene raíces reales con partes negativas?

5.32. ¿Cuántas raíces con partes reales positivas tiene cada uno de los siguientes polinomios?

a) $s^3 + s^2 - s + 1$ *b*) $s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 2s + 1$ *c*) $s^3 + s^2 - 2$ *d*) $s^4 - s^2 - 2s + 2$

e) $s^3 + s^2 + s + 6$

5.33 ¿Para qué valores positivos de K, el polinomio $s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + K$ tiene raíces con partes reales iguales a cero? ¿Cuáles son esas raíces?

Respuestas a los problemas suplementarios

5.30. *b*) y *e*) representan sistemas estables; *a*), *c*), *d*) y *f*) representan sistemas inestables.

5.31. $K > -2$

5.32. *a*) 2, *b*) 0, *c*) 1, *d*) 2, *e*) 2

5.33. $K = 80$; $s = \pm j2$

Capítulo 6

Funciones de transferencia

6.1 Definición de función de transferencia de un sistema continuo

Como se mostró en los Capítulos 3 y 4, la respuesta de un sistema lineal invariable en el tiempo puede separarse en dos partes: la respuesta forzada y la respuesta libre. Esto es cierto para los sistemas continuos y para los discretos. Consideremos primero las funciones de transferencia continuas únicamente para sistemas de una sola entrada y una sola salida. La ecuación (*4.8*) ilustra con claridad esta división para la más general de las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes. La respuesta forzada incluye términos debidos a los valores iniciales u_0^k de la entrada, y la respuesta libre depende únicamente de las condiciones iniciales y_0^k de la salida. Si se mezclan los términos debidos a *todos* los valores iniciales, es decir, a u_0^k y a y_0^k, la ecuación (*4.8*) puede escribirse como

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right) U(s) + (\text{los términos debidos a } \textit{todos} \text{ los valores iniciales } u_0^k,\ y_0^k)\right]$$

o, en notación de la transformada, como

$$Y(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right) U(s) + (\text{los términos debidos a } \textit{todos} \text{ los valores iniciales } u_0^k,\ y_0^k)$$

La **función de transferencia** $P(s)$ de un sistema continuo se define como aquel factor en la ecuación de $Y(s)$ que multiplica la transformada de la entrada $U(s)$. Para el sistema descrito antes, la función de transferencia es

$$P(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i s^i \Big/ \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0}$$

el denominador es el polinomio característico, y la transformada de la respuesta puede escribirse nuevamente como

$$Y(s) = P(s)U(s) + (\text{los términos debidos a } \textit{todos} \text{ los valores iniciales } u_0^k,\ y_0^k)$$

Si la cantidad (los términos debidos a *todos* los valores iniciales u_0^k, y_0^k) es cero, la transformada de Laplace de la salida $Y(s)$ en respuesta a una entrada $U(s)$ está dada por

$$Y(s) = P(s)U(s)$$

Si el sistema está en reposo antes de la aplicación de la entrada, es decir, $d^k y/dt^k = 0, k = 0,1,\ldots, n-1$, para $t < 0$, entonces

$$(\text{los términos debidos a } \textit{todos} \text{ los valores iniciales } u_0^k,\ y_0^k) = 0$$

y la salida en función del tiempo $y(t)$ es simplemente la transformada inversa de $P(s)U(s)$.

Se hace énfasis en que no todas las funciones de transferencia son expresiones algebraicas racionales. Por ejemplo, la función de transferencia de un sistema continuo que incluye retardos de tiempo contiene términos de la forma e^{-sT} (por ejemplo el problema 5.28). La función de transferencia de un elemento que representa un retardo puro de tiempo es $P(s) = e^{-sT}$ en donde T es el retardo de tiempo en unidades de tiempo.

Puesto que la formación de la transformada de la salida $Y(s)$ es simplemente una multiplicación algebraica de $P(s)$ y $U(s)$, cuando (los términos debidos a *todos* los valores iniciales $u_0^k, y_0^k) = 0$, la multiplicación es conmutativa; es decir,

$$Y(s) = U(s)P(s) = P(s)U(s) \tag{6.1}$$

6.2 Propiedades de la función de transferencia de un sistema continuo

La función de transferencia de un sistema continuo tiene varias propiedades útiles:

1. Es la transformada de Laplace de su respuesta impulso $y_\delta(t)$, $t \geq 0$. Esto es, si la entrada en un sistema con función de transferencia $P(s)$ es un impulso, y todos sus valores iniciales son cero, la transformada de la salida es $P(s)$.
2. La función de transferencia del sistema puede determinarse a partir de la ecuación diferencial del sistema, tomando la transformada de Laplace e ignorando todos los términos provenientes de los valores iniciales. La función de transferencia $P(s)$, entonces, está dada por
3. La ecuación diferencial del sistema puede obtenerse a partir de la función de transferencia, remplazando la variable s por el operador diferencial D, definido como $D \equiv d/dt$.
4. La estabilidad de un sistema lineal invariable en el tiempo puede determinarse a partir de la ecuación característica (*véase* el Capítulo 5). El denominador de la función de transferencia del sistema es el *polinomio característico*. En consecuencia, para sistemas continuos, si todas las raíces del denominador tienen partes reales negativas, el sistema es estable.
5. Las raíces del denominador son los polos del sistema, y las del numerador son sus ceros (*véase* el Capítulo 4). La función de transferencia del sistema puede especificarse entonces como una constante, especificando los polos y ceros del sistema. Esta constante, usualmente representada por K, es el **factor de ganancia** del sistema. Como se describió en el Capítulo 4, sección 4.11, los polos y ceros del sistema pueden representarse de manera esquemática por medio de un diagrama de polos y ceros en el plano s.

6. Si la función de transferencia del sistema no tiene polos o ceros con partes reales positivas, el sistema es uno de **fase mínima.**

EJEMPLO 6.1. Considere el sistema con la ecuación diferencial $dy/dt + 2y = du/dt + u$.

La versión en transformada de Laplace de esta ecuación con todos sus valores iniciales iguales a cero es $(s + 2)Y(s) = (s + 1)U(s)$.

Entonces, la función de transferencia del sistema está dada por $P(s) = Y(s)/U(s) = (s + 1)/(s + 2)$.

EJEMPLO 6.2. Si $P(s) = (2s + 1)/(s^2 + s + 1)$, la ecuación diferencial del sistema es

$$y = \left[\frac{2D+1}{D^2+D+1}\right]u \quad \text{o} \quad D^2y + Dy + y = 2Du + u \quad \text{o} \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 2\frac{du}{dt} + u$$

EJEMPLO 6.3. La función de transferencia $P(s) = K(s + a)/(s + b)(s + c)$ puede especificarse dando la localización del cero $-a$, las localizaciones de los polos $-b$ y $-c$, y el factor de ganancia k.

6.3 Funciones de transferencia de compensadores y controladores de sistemas de control continuo

A continuación se presentan las funciones de transferencia de cuatro componentes comunes de los sistemas de control. En los problemas resueltos se presentan las mecanizaciones típicas de tres de estas funciones de control utilizando redes *R-C*.

EJEMPLO 6.4. La función de transferencia general de un **compensador por adelanto de un sistema continuo** es

$$P_{\text{Adelanto}}(s) = \frac{s+a}{s+b} \qquad b > a \tag{6.2}$$

Este compensador tiene un cero en $s = -a$ y un polo en $s = -b$.

EJEMPLO 6.5. La función de transferencia general de un **compensador por atraso de un sistema continuo** es

$$P_{\text{Atraso}}(s) = \frac{a(s+b)}{b(s+a)} \qquad b > a \tag{6.3}$$

Sin embargo, en este caso el cero está en $s = -b$ y el polo en $s = -a$. Se incluye el factor de ganancia a/b porque usualmente se mecaniza de este modo (problema 6.13).

EJEMPLO 6.6. La función de transferencia general de un **compensador por atraso-adelanto de un sistema continuo** es

$$P_{\text{AA}}(s) = \frac{(s+a_1)(s+b_2)}{(s+b_1)(s+a_2)} \qquad b_1 > a_1,\ b_2 > a_2 \tag{6.4}$$

Este compensador tiene dos ceros y dos polos. Usualmente se impone la restricción $a_1 b_2 = b_1 a_2$ por consideraciones de mecanización (problema 6.14).

EJEMPLO 6.7. La función de transferencia del **controlador PID**, del ejemplo 2.14, es

$$P_{\text{PID}}(s) \equiv \frac{U_{\text{PID}}(s)}{E(s)} = K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s} \tag{6.5}$$

Este controlador tiene dos ceros y un polo. Es similar al compensador por atraso-adelanto del ejemplo anterior, excepto que el polo más pequeño se encuentra en el origen (un integrador) y no tiene el segundo polo. Típicamente esto se mecaniza en un computador analógico o digital.

6.4 Respuesta de tiempo de sistemas continuos

La transformada de Laplace de la respuesta de un sistema continuo a una entrada específica está dada por

$$Y(s) = P(s)U(s)$$

cuando todas las condiciones iniciales son cero. La transformada inversa $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[P(s)U(s)]$ es entonces la respuesta de tiempo, y $y(t)$ puede determinarse encontrando los polos de $P(s)U(s)$ y evaluando los residuos en estos polos (cuando no hay polos múltiples). En consecuencia $y(t)$ depende tanto de los polos y ceros de la función de transferencia como de los polos y ceros de la entrada.

Los residuos pueden determinarse gráficamente a partir del *diagrama de polos y ceros* de $Y(s)$, construido a partir del mismo diagrama de $P(s)$, simplemente sumando los polos y ceros de $U(s)$. La evaluación gráfica de los residuos puede efectuarse como se describió en el Capítulo 4, sección 4.12.

6.5 Respuesta de frecuencia del sistema continuo

La respuesta en estado estacionario de un sistema continuo a entradas sinusoidales puede determinarse a partir de la función de transferencia del sistema. Para el caso especial de una entrada paso de amplitud A, llamada a menudo **entrada en c.c.**, la transformada de Laplace de la salida en el sistema está dada por

$$Y(s) = P(s)\frac{A}{s}$$

Si el sistema es estable, la respuesta en estado estacionario es una función paso de amplitud $AP(0)$, puesto que éste es el residuo en el polo de la entrada. La amplitud de la señal de entrada se multiplica entonces por $P(0)$ para determinar la amplitud de la salida. Entonces, $P(0)$ es la **ganancia en c.c.** del sistema.

Nótese que para un sistema inestable, tal como un integrador ($P(s) = 1/s$), no siempre existe una respuesta en estado estacionario. Si la entrada en un integrador es una función paso, la salida es una rampa, la cual es no acotada (*véanse* los problemas 5.7 y 5.8). Por esta razón, algunas veces se dice que los integradores tienen una ganancia en c.c. infinita.

La respuesta en estado estacionario de un sistema estable a una entrada $u = A$ sen ωt está dada por

$$y_{EE} = A|P(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi)$$

en donde $|P(j\omega)|$ = magnitud de $P(j\omega)$, ϕ = arg $P(j\omega)$, y el número complejo $P(j\omega)$ se determina a partir de $P(s)$, remplazando s por $j\omega$ (*véase* el problema 6.20). La salida en el sistema tiene la misma frecuencia que la entrada, y puede obtenerse multiplicando la magnitud de la entrada por $|P(j\omega)|$ y desplazando el ángulo de fase de la entrada por el arg $P(j\omega)$. La magnitud $|P(j\omega)|$ y el ángulo arg $P(j\omega)$ para todo ω, definen juntos la **respuesta de frecuencia del sistema.** La magnitud de $|P(j\omega)|$ es la *ganancia* del sistema para entradas sinusoidales de frecuencia ω.

La respuesta de frecuencia del sistema puede determinarse gráficamente en el plano s a partir del diagrama de polos y ceros de $P(s)$ del mismo modo que la determinación gráfica de residuos. Sin embargo, en este caso, la magnitud y el ángulo de fase de $P(s)$ se calculan en un punto sobre el eje $j\omega$, midiendo las magnitudes y los ángulos de los vectores dibujados desde los polos y ceros de $P(s)$ al punto en el eje $j\omega$.

EJEMPLO 6.8. Considere el sistema con función de transferencia

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Con referencia a la figura 6-1, la magnitud y el ángulo de $P(j\omega)$ para $\omega = 1$ se calculan en el plano s como sigue. La magnitud de $P(j\,1)$ es

$$|P(j1)| = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = 0.316$$

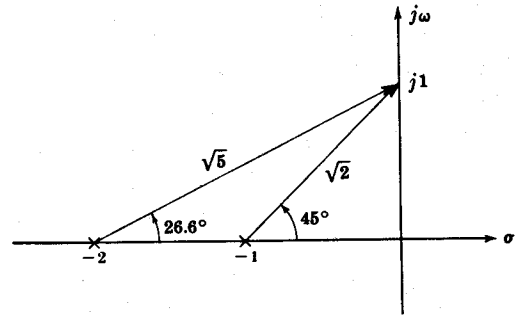


Figura 6-1

y el ángulo es

$$\arg P(j1) = -26.6° - 45° = -71.6°$$

EJEMPLO 6.9. La respuesta de frecuencia del sistema usualmente se representa mediante dos gráficas (*véase* la figura 6-2): una de $|P(j\omega)|$ en función de ω y una de arg $P(j\omega)$ en función de ω. Para la función de transferencia del ejemplo 6.8, $P(s) = 1/(s+1)(s+2)$, estas gráficas se determinan fácilmente representando los valores de $|P(j\omega)|$ y del arg $P(j\omega)$ para diferentes valores de ω, como se muestra a continuación.

ω	0	0.5	1.0	2.0	4.0	8.0
$\|P(j\omega)\|$	0.5	0.433	0.316	0.158	0.054	0.015
arg $P(j\omega)$	0	$-40.6°$	$-71.6°$	$-108.5°$	$-139.4°$	$-158.9°$

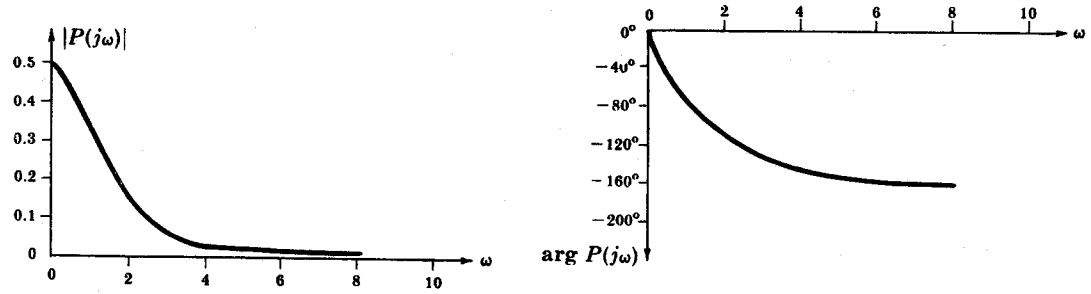


Figura 6-2

6.6 Funciones de transferencia, de sistemas discretos en el tiempo, compensadores y respuestas de tiempo

La función de transferencia $P(z)$ para un sistema discreto en el tiempo se define como el factor en la ecuación de la transformada de la salida $Y(z)$ que multiplica la transformada de la entrada $U(z)$. Si todos los términos debidos a las condiciones iniciales son cero, entonces la respuesta del sistema a una entrada $U(z)$ está dada por: $Y(z) = P(z)U(z)$ en el dominio z, y $\{y(k)\} = \mathcal{Z}^{-1}[P(z)U(z)]$ en el dominio del tiempo.

La función de transferencia de un sistema discreto en el tiempo tiene las siguientes propiedades:

1. $P(z)$ es la transformada z de su respuesta delta de Kronecker $y_\delta(k)$, $k = 0,1,\ldots$
2. La ecuación de diferencia del sistema puede obtenerse a partir de $P(z)$, remplazando la variable z por el operador de desplazamiento Z definido para dos enteros cualesquiera k y n como

$$Z^n[y(k)] = y(k+n) \tag{6.6}$$

3. El denominador de $P(z)$ es el *polinomio característico* del sistema. En consecuencia, si todas las raíces del denominador se encuentran dentro del círculo unitario del plano z, el sistema es estable.
4. Las raíces del denominador de $P(z)$ son los polos del sistema, y las del numerador son sus ceros. $P(z)$ puede definirse especificando los polos y ceros del sistema y el factor de ganancia K:

$$P(z) = \frac{K(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)} \tag{6.7}$$

Los polos y ceros del sistema pueden representarse esquemáticamente mediante un diagrama de polos y ceros en el plano z. El diagrama de polos y ceros de la respuesta de salida puede construirse a partir del mismo diagrama de $P(z)$ incluyendo los polos y ceros de la entrada $U(z)$.

5. El orden del polinomio del denominador de la función de transferencia de un sistema causal (realizable físicamente) discreto en el tiempo debe ser mayor que o igual al orden del polinomio del numerador.
6. La respuesta en estado estacionario de un sistema discreto en el tiempo a una entrada paso unitario se llama **ganancia en c.c.** y se determina mediante el teorema del valor final (sección 4.9):

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}P(z)\frac{z}{z-1}\right] = P(1) \tag{6.8}$$

EJEMPLO 6.10. Considere un sistema discreto en el tiempo caracterizado por la ecuación de diferencia

$$y(k+2) + 1.1y(k+1) + 0.3y(k) = u(k+2) + 0.2u(k+1)$$

La versión en transformada z de esta ecuación, con todas sus condiciones iniciales iguales a cero, es

$$(z^2 + 1.1z + 0.3)Y(z) = (z^2 + 0.2z)U(z)$$

La función de transferencia está dada por

$$P(z) = \frac{z(z+0.2)}{z^2+1.1z+0.3} = \frac{z(z+0.2)}{(z+0.5)(z+0.6)}$$

Este sistema tiene un cero en -0.2 y dos polos en -0.5 y en -0.6. Puesto que los polos se encuentran dentro del círculo unitario, el sistema es estable. La ganancia en c.c. es

$$P(1) = \frac{1(1.2)}{(1.5)(1.6)} = 0.5$$

EJEMPLO 6.11. La función de transferencia general de un **compensador digital por adelanto** es

$$P_{\text{Adelanto}}(z) = \frac{K_{\text{Adelanto}}(z-z_c)}{z-p_c} \qquad z_c > p_c \tag{6.9}$$

Este compensador tiene un cero en $z = z_c$ y un polo en $z = p_c$. Su ganancia en estado estacionario es

$$P_{\text{Adelanto}}(1) = \frac{K_{\text{Adelanto}}(1-z_c)}{1-p_c} \tag{6.10}$$

El factor de ganancia K_{Adelanto} se incluye en la función de transferencia para ajustar su ganancia para un ω dado a un valor deseado. Por ejemplo, en el problema 12.13, se escoge K_{Adelanto} para dar una ganancia en estado estacionario de P_{Adelanto} (en $\omega = 0$) igual a la de su contraparte analógica.

EJEMPLO 6.12. La función de transferencia general de un **compensador digital por atraso** es

$$P_{\text{Atraso}}(z) = \frac{(1-p_c)(z-z_c)}{(1-z_c)(z-p_c)} \qquad z_c < p_c \tag{6.11}$$

Este compensador tiene un cero en $z = z_c$ y un polo en $z = p_c$. Se incluye el factor de ganancia $(1 - p_c)/(1 - z_c)$ de tal modo que la ganancia en bajas frecuencias o en estado estacionario $P_{\text{Atraso}}(1) = 1$, de manera análoga al compensador por atraso continuo en el tiempo.

EJEMPLO 6.13. Los compensadores digitales por adelanto y atraso pueden diseñarse directamente a partir de especificaciones en el dominio s utilizando las transformadas entre los dominios s y z definidos mediante $z = e^{sT}$. Esto significa que los polos y ceros de

$$P_{\text{Adelanto}}(s) = \frac{s+a}{s+b} \qquad \text{y} \qquad P_{\text{Atraso}} = \frac{a(s+b)}{b(s+a)}$$

pueden representarse de acuerdo con $z = e^{sT}$. Para el compensador por adelanto, el cero en $s = -a$ se transforma en el cero en $z = z_c \equiv e^{-aT}$, y el polo en $s = -b$ se transforma en el polo en $z = p_c \equiv e^{-bT}$. Esto nos da

$$P'_{\text{Adelanto}}(z) = \frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}} \tag{6.12}$$

De modo similar,

$$P'_{\text{Atraso}}(z) = \left(\frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}}\right)\left(\frac{z-e^{-bT}}{z-e^{-aT}}\right) \tag{6.13}$$

Nótese que $P'_{\text{Atraso}}(1) = 1$.

Esta transformación es solamente una de las muchas posibles para los compensadores digitales por adelanto y atraso, o cualquier tipo de compensadores para ese propósito. En los problemas del 12.13 al 12.15 se ilustra otra variante de compensadores por adelanto.

En el ejemplo 12.7 se presenta la manera como puede utilizarse la ecuación (*6.13*) en sus aplicaciones.

6.7 Respuesta de frecuencia de sistemas discretos en el tiempo

La respuesta en estado estacionario a una secuencia de entrada $\{u(k) = A \text{ sen } \omega kT\}$ de un sistema estable discreto en el tiempo, con función de transferencia $P(z)$, está dada por

$$y_{EE} = A\left|P(e^{j\omega T})\right|\text{sen}(\omega kT + \phi) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.14}$$

en donde $|P(e^{j\omega T})|$ es la magnitud de $P(e^{j\omega T})$, $\phi = \arg P(e^{j\omega T})$, y la función compleja $P(e^{j\omega T})$ se determina a partir de $P(z)$ remplazando z por $e^{j\omega T}$ (*véase* el problema 6.40). La salida en el sistema es una secuencia de muestras de una sinusoide con la misma frecuencia que la sinusoide de entrada. La secuencia de salida se obtiene multiplicando la magnitud A de la entrada por $|P(e^{j\omega T})|$ y desplazando el ángulo de fase de la entrada en $\arg P(e^{j\omega T})$. Para cualquier ω la magnitud $|P(e^{j\omega T})|$ y el ángulo de fase $\arg P(e^{j\omega T})$ definen juntos la **función de respuesta de frecuencia para un sistema discreto en el tiempo.** La magnitud $|P(e^{j\omega T})|$ es la **ganancia** del sistema para entradas sinusoidales con frecuencia angular ω.

Una función de respuesta de frecuencia de un sistema discreto en el tiempo puede determinarse en el plano z a partir de un diagrama de polos y ceros de $P(z)$ del mismo modo como se hizo el cálculo gráfico de los residuos (sección 4.12). Sin embargo, en este caso, la magnitud y el ángulo de fase se calculan en el círculo $e^{j\omega T}$ (el círculo unitario), midiendo la magnitud y el ángulo de los vectores dibujados desde los polos y ceros de P al punto en el círculo unitario. Puesto que $P(e^{j\omega T})$ es periódica en ω, con un periodo $2\pi/T$, la función de frecuencia sólo necesita determinarse sobre el intervalo de frecuencia angular $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$. También, puesto que la función magnitud de ω es par, y el ángulo de fase ω es función impar, los cálculos reales solamente necesitan efectuarse sobre la mitad del intervalo de frecuencia angular, es decir $0 \leq \omega \leq \pi/T$.

6.8 Combinación de elementos continuos y discretos en el tiempo

Hasta aquí, la transformada z se ha utilizado principalmente para describir sistemas y elementos que operan sobre señales discretas en el tiempo y producen sólo señales discretas en el tiempo, y la transformada de Laplace se ha utilizado únicamente para sistemas y elementos continuos en el tiempo, con señales de entrada y salida continuas en el tiempo. Sin embargo, muchos sistemas de control contienen ambos tipos de elementos. Aquí se desarrollan algunas de las relaciones importantes entre las transformadas z y las transformadas de Laplace, para facilitar el análisis y el diseño de sistemas mixtos (continuos/discretos).

Las señales discretas provienen del muestreo de señales continuas en el tiempo o de la salida de un sistema de componentes inherentemente discretos en el tiempo, tales como los computadores digitales. Si una señal $y(t)$ continua en el tiempo, con transformada de Laplace $Y(s)$ se muestrea uniformemente, con un periodo T, la secuencia resultante de muestras $y(kT)$, $k = 0,1,2,\ldots$, puede escribirse como

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{skT}\,ds \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

en donde $c > \sigma_0$ (*véase* la definición 4.3). La transformada z de esta secuencia es $Y^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k}$ (definición 4.4), la cual, como se demuestra en el problema 6.41, puede escribirse como

$$Y^*(z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)\left(\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}\right)ds \qquad (6.15)$$

para la región de convergencia $|z| > e^{cT}$. Esta relación entre la transformada de Laplace y la transformada z puede evaluarse mediante la aplicación de la ley de integración de Cauchy [1]. Sin embargo, en la práctica, usualmente no es necesario utilizar este método de análisis complejo.

La función $y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]$ continua en el tiempo puede determinarse a partir de $Y(s)$ y una tabla de transformadas de Laplace, remplazando luego la variable t por kT, produciendo el k-ésimo elemento de la secuencia deseada:

$$y(kT) = \mathscr{L}^{-1}[Y(s)]\big|_{t=kT}$$

Entonces la transformada z de la secuencia $y(kT)$, $k = 0,1,2,\ldots$, se genera refiriéndose a una tabla de transformadas z, lo cual produce el resultado deseado:

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y(kT)\} = \mathcal{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]\big|_{t=kT}\right\} \tag{6.16}$$

Así, en la ecuación (*6.16*), las operaciones simbólicas $\mathscr{L}^{-1}$ y $\mathcal{Z}$ representan directamente una búsqueda en la tabla, y $|_{t=kT}$ genera la secuencia que va a transformarse en z.

En la figura 6.3 se presenta una combinación común de elementos y señales discretos y continuos en el tiempo

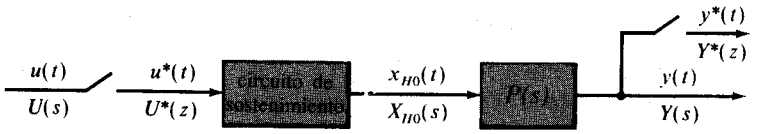


Figura 6.3

Si el circuito de sostenimiento es de *orden cero*, la función de transferencia discreta en el tiempo de $U^*(z)$ a $Y^*(z)$, como se demuestra en el problema 6.42, está dada por

$$\frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = (1 - z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}\frac{P(s)}{s}\bigg|_{t=kT}\right\} \tag{6.17}$$

En la práctica, puede que el muestreador que genera $y^*(t)$ en la figura 6-3 no exista en la salida. Sin embargo, algunas veces es conveniente suponer que existe uno en ese punto para propósitos de análisis (por ejemplo, *véase* el problema 10.13). Cuando se hace esto, a menudo este muestreador se llama **muestreador ficticio.**

Si la entrada y la salida en un sistema como el que se muestra en la figura 6-3, son señales continuas en el tiempo, y en seguida se muestrea la entrada, entonces la ecuación (*6.17*) genera una función de transferencia discreta en el tiempo, la cual relaciona la entrada en los tiempos de muestreo T, $2T,\ldots$, con la salida en los mismos tiempos de muestreo. Sin embargo, esta función *no* relaciona las señales de entrada y de salida en los tiempos τ, *entre* los tiempos de muestreo, esto es, para $kT < \tau < (k + 1)T$, $k = 0,1,2,\ldots$

EJEMPLO 6.14. En la figura 6-3, si el circuito de sostenimiento es de orden cero y $P(s) = 1/(s + 1)$, a partir de la ecuación (*6.17*), la función de transferencia discreta en el tiempo del subsistema de elementos mezclados es

$$\frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right)\Big|_{t=kT}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\Big|_{t=kT}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\left(\mathbf{1}(t)-e^{-t}\right)\Big|_{t=kT}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}(kT)-e^{-kT}\right\}$$

$$= (1-z^{-1})\left[\mathcal{Z}\left\{\mathbf{1}(kT)\right\}-\mathcal{Z}\left\{e^{-kT}\right\}\right]$$

$$= (1-z^{-1})\left[\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right]$$

$$= \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z}{z-1}\right)\left[\frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}\right]$$

$$= \frac{1-e^{-T}}{z-e^{-T}}$$

Problemas resueltos

Definiciones de funciones de transferencia

6.1. ¿Cuál es la función de transferencia en un sistema en el cual la entrada y la salida están relacionadas mediante la siguiente ecuación diferencial?

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y = u + \frac{du}{dt}$$

Tomando la transformada de Laplace de esta ecuación, ignorando los términos debidos a las condiciones iniciales, obtenemos

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = U(s) + sU(s)$$

Esta ecuación puede escribirse como

$$Y(s) = \left[\frac{s+1}{s^2+3s+2}\right]U(s)$$

La función de transferencia de este sistema está dada entonces por

$$P(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+2}$$

6.2. Un sistema particular que contiene un retraso de tiempo tiene la ecuación diferencial $(d/dt)y(t) + y(t) = u(t - T)$. Encuentre su función de transferencia.

La transformada de Laplace de la ecuación diferencial, ignorando los términos debidos a las condiciones iniciales, es $sY(s) + Y(s) = e^{-sT}U(s)$. $Y(s)$ y $U(s)$ están relacionadas mediante la siguiente función de s, la cual es la función de transferencia del sistema.

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-sT}}{s+1}$$

6.3. La posición y de un objeto en movimiento de masa constante M está relacionada con la fuerza f aplicada al objeto mediante la ecuación diferencial $M(d^2y/dt^2) = f$. Determine la función de transferencia que relaciona la posición con la fuerza aplicada.

Tomando la transformada de Laplace de la ecuación diferencial obtenemos $Ms^2Y(s) = F(s)$. La función de transferencia que relaciona $Y(s)$ con $F(s)$ es entonces $P(s) = Y(s)/F(s) = 1/Ms^2$.

6.4. Un motor conectado a una carga con inercia J y una fricción viscosa B produce un torque proporcional a la corriente de entrada i. Si la ecuación diferencial, para el motor y la carga, es $J(d^2\theta/dt^2) + B(d\theta/dt) = Ki$, determine la función de transferencia entre la corriente de entrada i y la posición θ del eje.

La versión en transformada de Laplace de la ecuación diferencial es $(Js^2 + Bs)\Theta(s) = KI(s)$ y la función de transferencia requerida es $P(s) = \Theta(s)/I(s) = K/s(Js + B)$.

Propiedades de las funciones de transferencia

6.5. Se aplica un impulso a la entrada en un sistema continuo y se observa que la salida es la función de tiempo e^{-2t}. Encuentre su función de transferencia.

La función de transferencia es $P(s) = Y(s)/U(s)$ y $U(s) = 1$ para $u(t) = \delta(t)$. Entonces

$$P(s) = Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

6.6. La respuesta impulso en cierto sistema continuo es la señal sinusoidal sen t. Determine la función de transferencia y la ecuación diferencial.

La función de transferencia del sistema es la transformada de Laplace de su respuesta impulso, $P(s) = 1/(s^2 + 1)$. Entonces $P(D) = y/u = 1/(D^2 + 1)$, $D^2y + y = u$ ó $d^2y/dt^2 + y = u$.

6.7. La respuesta paso de un sistema dado es $y = 1 - \frac{7}{3}e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$. ¿Cuál es su función de transferencia?

Puesto que la derivada de un paso es un impulso (*véase* la definición 3.17), la respuesta impulso para este sistema es $p(t) = dy/dt = \frac{7}{3}e^{-t} - 3e^{-2t} + \frac{2}{3}e^{-4t}$

La transformada de Laplace de $p(t)$ es la función de transferencia deseada. Así

$$P(s) = \frac{\frac{7}{3}}{s+1} + \frac{-3}{s+2} + \frac{\frac{2}{3}}{s+4} = \frac{s+8}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

Nótese que una solución alterna habría sido calcular la transformada de Laplace de y y luego multiplicarla por s para determinar $P(s)$, ya que una multiplicación por s en el dominio de s equivale a su derivación en el dominio del tiempo.

6.8. Determine si la función de transferencia $P(s) = (2s + 1)/(s^2 + s + 1)$ representa un sistema estable o uno inestable.

La ecuación característica del sistema se obtiene igualando a cero el polinomio del denominador, esto es $s^2 + s + 1 = 0$. La ecuación característica puede probarse utilizando uno de los criterios de estabilidad descritos en el Capítulo 5. La tabla de Routh para este sistema está dada por

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 1 \\ s^1 & 1 & \\ s^0 & 1 & \end{array}$$

Puesto que no hay cambios de signo en la primera columna, el sistema es estable.

6.9. ¿La función de transferencia $P(s) = (s + 4)/(s + 1)(s + 2)(s - 1)$ representa un sistema estable o uno inestable?

La estabilidad del sistema se determina mediante las raíces del polinomio del denominador, esto es, los polos del sistema. Aquí el denominador se encuentra en forma factorizada, y los polos se localizan en $s = -1, -2, +1$. Puesto que hay un polo con parte real positiva, el sistema es inestable.

6.10. ¿Cuál es la función de transferencia de un sistema con un factor de ganancia de 2 y el diagrama de polos y ceros en el plano s que se muestra en la figura 6-4?

La función de transferencia tiene un cero en -1 y polos en -2 y en el origen. En consecuencia esta función es $P(s) = 2(s + 1)/s(s + 2)$.

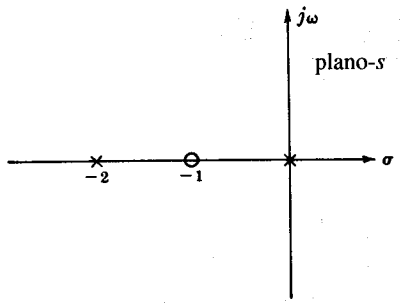


Figura 6-4

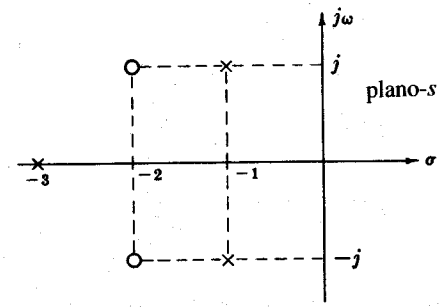


Figura 6-5

6.11. Determine la función de transferencia de un sistema con un factor de ganancia de 3 y el diagrama de polos y ceros que se muestra en la figura 6-5.

La función de transferencia tiene ceros en $-2 \pm j$ y polos en -3 y en $-1 \pm j$. Entonces esta función es $P(s) = 3(s+2+j)(s+2-j)/(s+3)(s+1+j)(s+1-j)$.

Funciones de transferencia de componentes de sistemas de control continuos

6.12. En la figura 6-6 se muestra una red *R-C* como mecanización de un compensador por adelanto. Encuentre su función de transferencia.

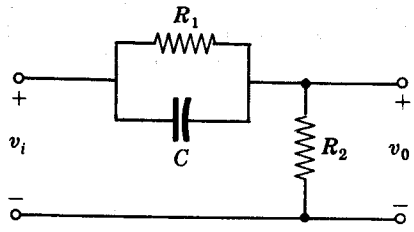


Figura 6-6

Suponiendo que el circuito no está cargado, es decir, que no fluye corriente a través de sus terminales de salida, la ley de corriente de Kirchhoff para el nodo de salida produce

$$C\frac{d}{dt}(v_i - v_0) + \frac{1}{R_1}(v_i - v_0) = \frac{1}{R_2}v_0$$

La transformada de Laplace de esta ecuación (con condiciones iniciales cero) es

$$Cs[V_i(s) - V_0(s)] + \frac{1}{R_1}[V_i(s) - V_0(s)] = \frac{1}{R_2}V_0(s)$$

La función de transferencia es

$$P_{\text{Adelanto}} = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{Cs + 1/R_1}{Cs + 1/R_1 + 1/R_2} = \frac{s+a}{s+b}$$

en donde $a = 1/R_1C$ y $b = 1/R_1C + 1/R_2C$.

6.13. Determine la función de transferencia de la red *R-C* como mecanización del compensador por atraso que se muestra en la figura 6-7.

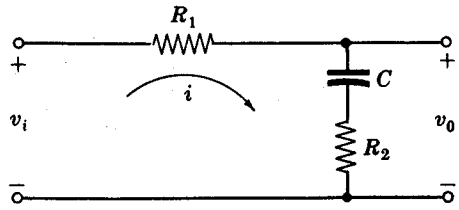


Figura 6-7

La ley de voltaje de Kirchhoff para la malla produce la ecuación

$$iR_1 + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + iR_2 = v_i$$

cuya transformada de Laplace es

$$\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I(s) = V_i(s)$$

El voltaje de salida está dado por

$$V_0(s) = \left(R_2 + \frac{1}{Cs}\right) I(s)$$

Entonces, la función de transferencia de la red por atraso es

$$P_{\text{Atraso}} = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} = \frac{a(s+b)}{b(s+a)} \quad \text{en donde } a = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \qquad b = \frac{1}{R_2 C}$$

6.14. Encuentre la función de transferencia de la red *R-C* como mecanización del compensador por adelanto-atraso que se muestra en la figura 6-8.

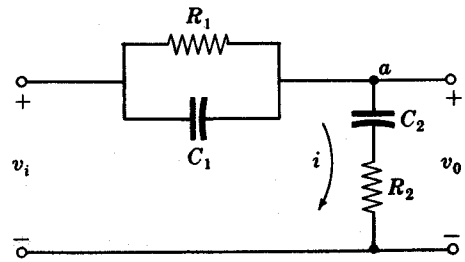


Figura 6-8

Igualando las corrientes en el nodo de salida a se obtiene

$$\frac{1}{R_1}(v_i - v_0) + C_1\frac{d}{dt}(v_i - v_0) = i$$

El voltaje v_0 y la corriente i se relacionan mediante

$$\frac{1}{C_2}\int_0^t i\,dt + iR_2 = v_0$$

Tomando la transformada de Laplace de estas dos ecuaciones (con condiciones iniciales cero) y eliminando $I(s)$ se obtiene la ecuación

$$\left(\frac{1}{R_1} + C_1 s\right)[V_i(s) - V_0(s)] = \frac{V_0(s)}{1/sC_2 + R_2}$$

Entonces la función de transferencia de la red es

$$P_{AA} = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{\left(s + \dfrac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \dfrac{1}{R_2C_2}\right)}{s^2 + \left(\dfrac{1}{R_2C_2} + \dfrac{1}{R_2C_1} + \dfrac{1}{R_1C_1}\right)s + \dfrac{1}{R_1C_1R_2C_2}} = \frac{(s+a_1)(s+b_2)}{(s+b_1)(s+a_2)}$$

en donde

$$a_1 = \frac{1}{R_1C_1} \qquad b_1a_2 = a_1b_2 \qquad b_1 + a_2 = a_1 + b_2 + \frac{1}{R_2C_1} \qquad b_2 = \frac{1}{R_2C_2}$$

6.15. Encuentre la función de transferencia de la red de atraso *simple* que se muestra en la figura 6-9.

Esta red es un caso especial de la red de compensación por atraso del problema 6-13, con R_2 igual a cero. En consecuencia la función de transferencia está dada por

$$P(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1/Cs}{R + 1/Cs} = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

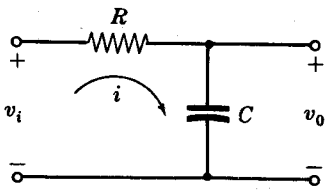


Figura 6-9

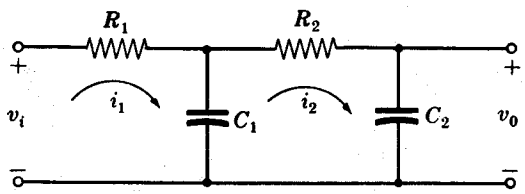


Figura 6-10

6.16. Determine la función de transferencia de dos redes de atraso simple conectadas en serie, como se muestra en la figura 6-10

Las ecuaciones de las dos mallas son

$$R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int_0^t (i_1 - i_2)\,dt = v_i$$

$$R_2 i_2 + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2\,dt + \frac{1}{C_1}\int_0^t (i_2 - i_1)\,dt = 0$$

Utilizando la transformación de Laplace y resolviendo las ecuaciones de las dos mallas para $I_2(s)$, obtenemos

$$I_2(s) = \frac{C_2 s V_i(s)}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$$

El voltaje de salida está dado por $v_0 = (1/C_2)\int_0^t i_2\,dt$. Así que

$$\frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$$

Respuesta de tiempo de sistemas continuos

6.17. ¿Cuál es la respuesta paso unitario de un sistema continuo cuya función de transferencia tiene un cero en -1, un polo en -2 y un factor de ganancia de 2?

La transformada de Laplace de la salida está dada por $Y(s) = P(s)U(s)$. Aquí

$$P(s) = \frac{2(s+1)}{s+2} \qquad U(s) = \frac{1}{s} \qquad Y(s) = \frac{2(s+1)}{s(s+2)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}$$

Evaluando la transformada inversa de la expansión en fracciones parciales de $Y(s)$ se obtiene $y(t) = 1 + e^{-2t}$

6.18. Evalúe gráficamente la respuesta paso unitario de un sistema continuo cuya función de transferencia está dada por

$$P(s) = \frac{(s+2)}{(s+0.5)(s+4)}$$

El diagrama de polos y ceros se obtiene sumando los polos y los ceros de la entrada al diagrama de polos y ceros de la función de transferencia. El diagrama de polos y ceros de la salida tiene entonces polos en 0, −0,5 y −4, y un cero en −2, como se muestra en la figura 6-11.

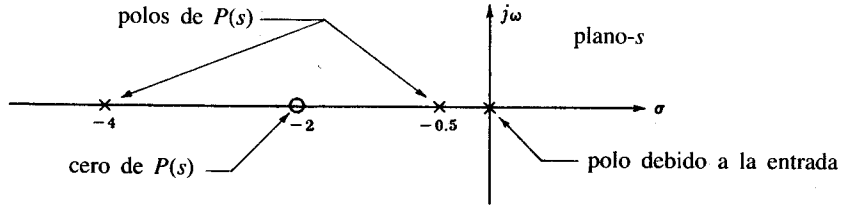


Figura 6-11

El residuo para el polo en el origen es

$$|R_1| = \frac{2}{0.5(4)} = 1 \qquad \arg R_1 = 0°$$

Para el polo en −0.5,

$$|R_2| = \frac{1.5}{0.5(3.5)} = 0.857 \qquad \arg R_2 = -180^c$$

Para el polo en −4,

$$|R_3| = \frac{2}{4(3.5)} = 0.143 \qquad \arg R_3 = -180°$$

La respuesta de tiempo es entonces $y(t) = R_1 + R_2e^{-0.5t} + R_3e^{-4t} = 1 - 0.857e^{-0.5t} - 0.143e^{-4t}$.

6.19. Evalúe la respuesta paso unitario del sistema del problema 6.11.

La transformada de Laplace de la salida en el sistema es

$$Y(s) = P(s)U(s) = \frac{3(s+2+j)(s+2-j)}{s(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

Al expandir $Y(s)$ en fracciones parciales se obtiene

$$Y(s) = \frac{R_1}{s} + \frac{R_2}{s+3} + \frac{R_3}{s+1+j} + \frac{R_4}{s+1-j}$$

en donde

$$R_1 = \frac{3(2+j)(2-j)}{3(1+j)(1-j)} = \frac{5}{2} \qquad R_3 = \frac{3(1)(1-2j)}{(-1-j)(2-j)(-2j)} = \frac{-3}{20}(7+j)$$

$$R_2 = \frac{3(-1+j)(-1-j)}{-3(-2+j)(-2-j)} = \frac{-2}{5} \qquad R_4 = \frac{3(1+2j)(1)}{(2+j)(-1+j)(2j)} = \frac{-3}{20}(7-j)$$

Evaluando la transformada inversa de Laplace,

$$y = \frac{5}{2} - \frac{2}{5}e^{-3t} - \frac{3\sqrt{2}}{4}e^{-t}[e^{-j(t+\theta)} + e^{j(t+\theta)}] = \frac{5}{2} - \frac{2}{5}e^{-3t} - \frac{3\sqrt{2}}{2}e^{-t}\cos(t+\theta)$$

en donde $\theta = -\tan^{-1}[\frac{1}{7}] = -8.13°$.

Respuesta de frecuencia de sistemas continuos

6.20. Demuestre que la salida en estado estacionario en un sistema estable con función de transferencia $P(s)$ y entrada $u = A\text{sen}\omega t$ está dada por

$$y_{EE} = A|P(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{en donde } \phi = \arg P(j\omega)$$

La transformada de Laplace de la salida es $Y(s) = P(s)U(s) = P(s)[A\omega/(s^2+\omega^2)]$.

Cuando esta transformada se expande en fracciones parciales, habrá términos debidos a los polos de $P(s)$ y dos términos debidos a los polos de la entrada ($s = \pm j\omega$). Puesto que el sistema es estable, todas las funciones de tiempo resultantes de los polos de $P(s)$ tienden a cero cuando el tiempo tiende a infinito. Así, la salida en estado estacionario contiene únicamente las funciones de tiempo que resultan de los términos en la expansión en fracciones parciales debidas a los polos de la entrada. La transformada de Laplace de la salida en estado estacionario es entonces

$$Y_{EE}(s) = \frac{AP(j\omega)}{2j(s-j\omega)} + \frac{AP(-j\omega)}{-2j(s+j\omega)}$$

La transformada inversa de esta ecuación es

$$y_{EE} = A|P(j\omega)|\left[\frac{e^{j\phi}e^{j\omega t} - e^{-j\phi}e^{-j\omega t}}{2j}\right] = A|P(j\omega)|\text{sen}(\omega t + \phi) \quad \text{en donde } \phi = \arg P(j\omega)$$

6.21. Encuentre la *ganancia en c.c.* de cada uno de los sistemas representados por las siguientes funciones de transferencia:

$$a)\ P(s) = \frac{1}{s+1} \qquad b)\ P(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)} \qquad c)\ P(s) = \frac{(s+8)}{(s+2)(s+4)}$$

La ganancia en *c.c.* está dada por $P(0)$. Entonces *a)* $P(0) = 1$, *b)* $P(0) = 5$ *c)* $P(0) = 1$.

6.22. Evalúe la ganancia y el desplazamiento de fase de $P(s) = 2/(s + 2)$ para $\omega = 1, 2$ y 10.

La ganancia de $P(s)$ está dada por $|P(j\omega)| = 2/\sqrt{\omega^2 + 4}$. Para $\omega = 1$, $|P(j\,1)| = 2/\sqrt{5} = 0.894$; para $\omega = 2$, $|P(j\,2)| = 2/\sqrt{8} = 0.707$; para $\omega = 10$, $|P(j\,10)| = 2/\sqrt{104} = 0.196$.

El desplazamiento de fase de la función de transferencia es el ángulo de fase de $P(j\omega)$, $\arg P(j\omega) = -\tan^{-1}\omega/2$. Para $\omega = 1$, $\arg P(j\,1) = -\tan^{-1}\frac{1}{2} = -26.6°$; para $\omega = 2$, $\arg P(j\,2) = -\tan^{-1}1 = -45°$; para $\omega = 10$, $\arg P(j\,10) = -\tan^{-1}5 = -78.7°$.

6.23. Esboce los diagramas de $|P(j\omega)|$ y de $\arg P(j\omega)$ en función de la frecuencia para la función de transferencia del problema 6.22.

Adicional a los valores calculados en el problema 6.22 para $|P(j\omega)|$ y para $\arg P(j\omega)$, también serán útiles los valores para $\omega = 0$: $|P(j0)| = 2/2 = 1$, $\arg P(j0) = -\tan^{-1} 0 = 0$.

A medida que ω se hace grande $|P(j\omega)|$ se aproxima asintóticamente a cero mientras que $\arg P(j\omega)$ tiende asintóticamente a $-90°$. En la figura 6-12 se presentan las gráficas de la respuesta de frecuencia de $P(s)$.

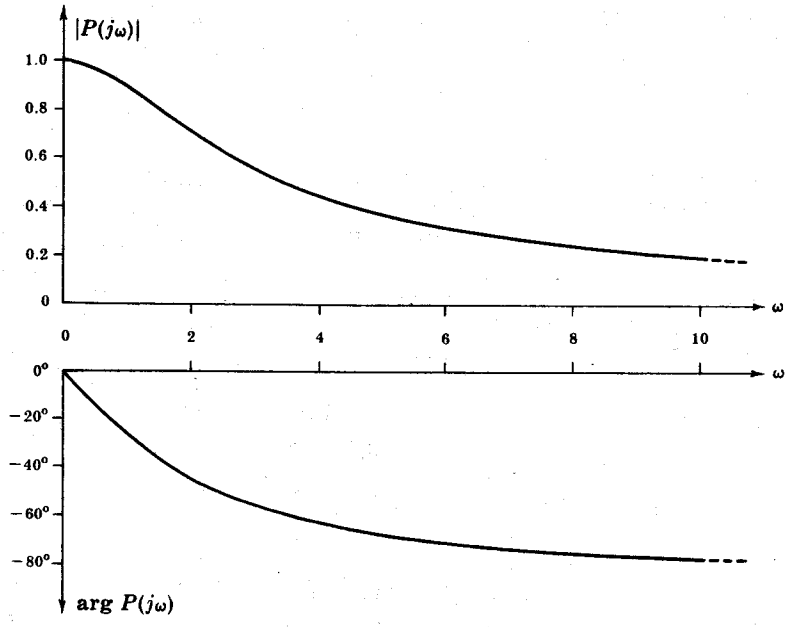


Figura 6-12

Funciones de transferencia y respuestas de tiempo de sistemas discretos en el tiempo

6.24. La respuesta delta de Kronecker de un sistema discreto en el tiempo está dada por $y_\delta(k) = 1$ para todo $k \geq 0$. ¿Cuál es su función de transferencia?

La función de transferencia es la transformada z de la respuesta delta de Kronecker, como se da en el ejemplo 4.26:

$$P(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

Para determinar una representación de polos y ceros de $P(z)$, notamos que

$$zP(z) - z = P(z)$$

o

$$(z-1)P(z) = z$$

de modo que

$$P(z) = \frac{z}{z-1}$$

De otra manera, nótese que la respuesta delta de Kronecker es la secuencia paso unitario que tiene la transformada z

$$P(z) = \frac{z}{z-1}$$

(*véase* la tabla 4.2).

6.25. La respuesta delta de Kronecker en un sistema discreto particular está dada por $y_\delta(k) = (0.5)^k$ para $k \geq 0$. ¿Cuál es su función de transferencia?

La respuesta delta de Kronecker de un sistema con un solo polo y ningún cero no tiene salida en $k = 0$ y su forma indica la presencia de un polo sencillo en 0.5.

$$\frac{1}{z-0.5} = z^{-1} + 0.5z^{-2} + 0.25z^{-3} + \cdots + (0.5)^{n-1}z^{-n} + \cdots$$

En consecuencia, la función de transferencia debe tener un cero en el numerador para que la secuencia de salida avance un intervalo de muestra. Esto es,

$$P(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

6.26. Para un sistema cuya función de transferencia es

$$P(z) = \frac{z-0.1}{z^2+0.3z+0.2}$$

¿Cuál es la ecuación de diferencia?

Remplazando a z^n por Z^n, obtenemos

$$P(Z) = \frac{Z-0.1}{Z^2+0.3Z+0.2}$$

Entonces

$$y(k) = P(Z)u(k) = \frac{(Z-0.1)u(k)}{Z^2+0.3Z+0.2} = \frac{u(k+1)-0.1u(k)}{Z^2+0.3Z+0.2}$$

y por multiplicación cruzada

$$y(k+2)+0.3y(k+1)+0.2y(k)=u(k+1)-0.1u(k)$$

6.27. ¿Cuál es la función de transferencia en un sistema discreto con un factor de ganancia de 2, ceros en 0.2 y -0.5, y polos en 0.5, 0.6 y -0.4? ¿Es estable?

La función de transferencia es

$$P(z)=\frac{2(z-0.2)(z+0.5)}{(z-0.5)(z-0.6)(z+0.4)}$$

Puesto que todos los polos se encuentran dentro del círculo unitario, el sistema es estable.

Problemas misceláneos

6.28. En la figura 6-13 se muestra el esquema de un *motor de c.c. (de corriente continua)*. L y R representan la inductancia y la resistencia del circuito de la armadura del motor, y el voltaje v_b representa la f.e.m. (fuerza electromotriz) generada, la cual es proporcional a la velocidad del eje $d\theta/dt$. El torque T generado por el motor es proporcional a la corriente i en la armadura. La inercia J representa la inercia combinada de la armadura del motor y de la carga, y B es la fricción viscosa total que actúa sobre el eje de salida. Determine la función de transferencia entre el voltaje de entrada V y la posición angular Θ del eje de salida.

Circuito de la armadura del motor **Carga inercial**

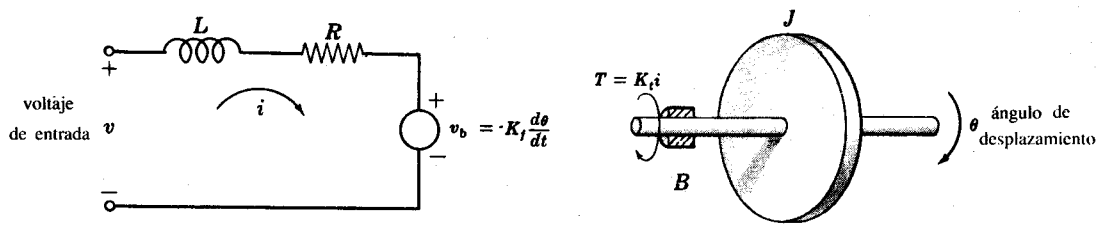


Figura 6-13

Las ecuaciones diferenciales del circuito de la armadura del motor y de la carga inercial son

$$Ri+L\frac{di}{dt}=v-K_f\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{y} \qquad K_t i=J\frac{d^2\theta}{dt^2}+B\frac{d\theta}{dt}$$

Tomando la transformada de Laplace de cada ecuación e ignorando las condiciones iniciales,

$$(R+sL)I=V-K_f s\Theta \qquad \text{y} \qquad K_t I=(Js^2+Bs)\Theta$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas para la función de transferencia entre V y Θ, tenemos

$$\frac{\Theta}{V} = \frac{K_t}{(Js^2 + Bs)(Ls + R) + K_t K_f s} = \frac{K_t/JL}{s\left[s^2 + (B/J + R/L)s + BR/JL + K_t K_f/JL\right]}$$

6.29. La f.e.m. generada por el circuito de la armadura de una máquina de c.c. es proporcional a la velocidad angular del eje, como se anotó en el problema anterior. Este principio se utiliza en el *tacómetro de c.c.* cuyo esquema se muestra en la figura 6-14, en donde la armadura v_b genera el voltaje v_b, tiene inductancia L y resistencia R_a, y v_0 es el voltaje de salida. Si K_f es la constante de proporcionalidad entre v_b y la velocidad $d\theta/dt$ del eje, esto es, $v_b = K_f(d\theta/dt)$, determine la función de transferencia entre la posición Θ del eje y el voltaje de salida V_0. La carga de salida está representada por una resistencia R_L y $R_L + R_a \equiv R$.

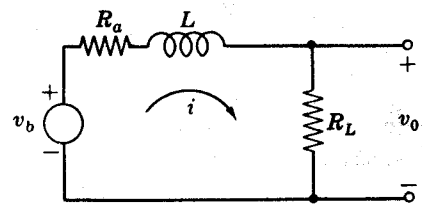


Figura 6-14

La ecuación transformada de Laplace que representa el tacómetro es $I(R + sL) = K_f s\Theta$. El voltaje de salida está dado por

$$V_0 = IR_L = \frac{R_L K_f s\Theta}{R + sL}$$

Entonces, la función de transferencia del tacómetro de c.c. es

$$\frac{V_0}{\Theta} = \frac{R_L K_f}{L}\left(\frac{s}{s + R/L}\right)$$

6.30. En la figura 6-15 se muestra un *acelerómetro* mecánico simple. La posición y de la masa M con respecto a la caja del acelerómetro es proporcional a la aceleración de la caja. ¿Cuál es la función de transferencia entre la aceleración de entrada A ($a = d^2x/dt^2$) y la salida Y?

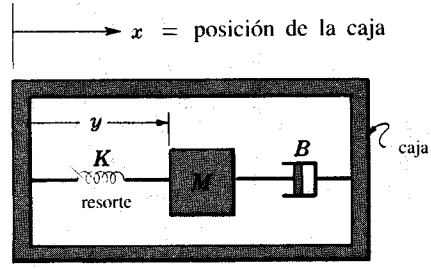


Figura 6-15

Igualando la suma de las fuerzas que actúan sobre la masa M a su aceleración inercial, obtenemos

$$-B\frac{dy}{dt} - Ky = M\frac{d^2}{dt^2}(y - x)$$

o

$$M\frac{d^2y}{dt^2} + B\frac{dy}{dt} + Ky = M\frac{d^2x}{dt^2} = Ma$$

en donde a es la aceleración de entrada. La condición inicial cero de la ecuación transformada es

$$(Ms^2 + Bs + K)Y = MA$$

Entonces, la función de transferencia del acelerómetro es

$$\frac{Y}{A} = \frac{1}{s^2 + (B/M)s + K/M}$$

6.31. Una ecuación diferencial que describe la operación dinámica del *giróscopo de un grado de libertad*, que se muestra en la figura 6-16, es

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + K\theta = H\omega$$

en la cual ω es la velocidad angular del giróscopo alrededor del eje de entrada, θ es la posición angular del eje de giro, la salida medida del giróscopo. H es el momento angular almacenado en la rueda giratoria, J es la inercia de la rueda alrededor del eje de salida, B es el coeficiente de fricción viscosa alrededor del eje de salida, y K es la constante de recuperación del resorte que se encuentra unido al eje de giro.

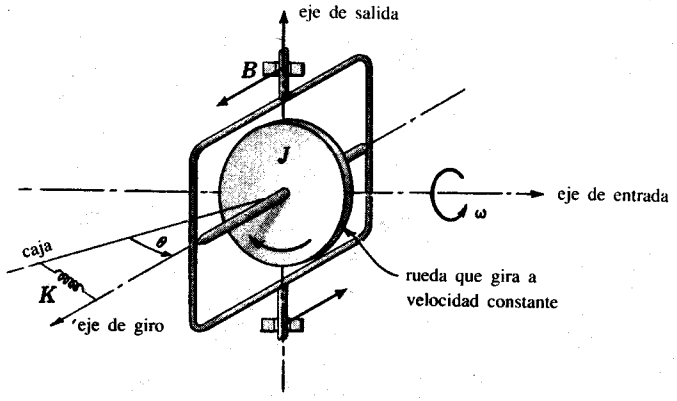


Figura 6-16

a) Determine la función de transferencia que relaciona las transformadas de Laplace de ω y θ, y demuestre que la salida en estado estacionario es proporcional a la magnitud de una entrada de tasa constante. Este tipo de giróscopo se llama *giro-derivador*.

b) Determine la función de transferencia entre ω y θ cuando se ha removido el resorte de restauración ($K = 0$). Puesto que aquí la salida es proporcional a la integral de la tasa de entrada, este tipo de giróscopo se llama *giro-integrador*.

a) La transformada con condición inicial cero de la ecuación diferencial del giróscopo es

$$(Js^2 + Bs + K)\Theta = H\Omega$$

en donde Θ y Ω son las transformadas de Laplace de θ y ω, respectivamente. En consecuencia, la función de transferencia que relaciona Θ y Ω es

$$\frac{\Theta}{\Omega} = \frac{H}{(Js^2 + Bs + K)}$$

Para una entrada de tasa constante o una entrada de c.c. ω_k, la magnitud de la salida en estado estacionario θ_{EE} puede obtenerse multiplicando la entrada por la ganancia en c.c. de la función de transferencia, que en este caso es H/K. Así, la salida en estado estacionario es proporcional a la magnitud de la tasa de entrada, esto es, $\theta_{EE} = (H/K)\omega_K$.

b) Igualando K a cero en la función de transferencia de *a*) se obtiene $\Theta/\Omega = H/s(Js + B)$. Esta función de transferencia tiene ahora un polo en el origen, de tal modo que la integración se obtiene entre la entrada Ω y la salida Θ. Entonces la salida es proporcional a la integral de la tasa de entrada o, lo que es equivalente, al ángulo de entrada.

6.32. Una ecuación diferencial que se aproxima a la dinámica rotacional de un vehículo rígido que se mueve en la atmósfera es

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} - NL\theta = T$$

en donde θ es el ángulo de orientación del vehículo, J es su inercia, N es el coeficiente de fuerza normal. L es la distancia del centro de gravedad al centro de presión, y T es cualquier torque aplicado (*véase* la figura 6-17). Determine la función de transferencia entre un torque aplicado y el ángulo de orientación del vehículo.

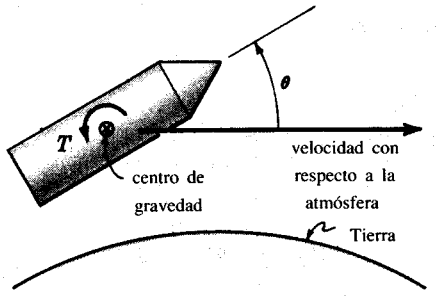


Figura 6-17

La ecuación diferencial transformada del sistema con condición inicial cero es

$$(Js^2 - NL)\Theta = T$$

La función de transferencia deseada es

$$\frac{\Theta}{T} = \frac{1}{Js^2 - NL} = \frac{1/J}{s^2 - NL/J}$$

Nótese que si NL es positivo (centro de presión adelantado con respecto al centro de gravedad del vehículo), el sistema es *inestable* porque hay un polo en la mitad derecha del plano en $s = \sqrt{NL/J}$. Si NL es negativo, los polos son imaginarios y el sistema es *oscilante* (estable marginalmente). Sin embargo, en la realidad se encuentran presentes los términos de amortiguamiento aerodinámico que no se incluyen en la ecuación diferencial y que amortiguan cualquier oscilación de la función.

6.33. Los receptores de presión, llamados *barorreceptores*, miden los cambios en la presión de la sangre arterial, como se describió en el problema 2.14. Allí se muestran como un bloque en la trayectoria de retroalimentación del diagrama de bloques propuesto para la solución de tal problema. La frecuencia $b(t)$ a la que se mueven las señales (potenciales de acción) a lo largo de los nervios vago y glosofaríngeo desde los barorreceptores al centro vasomotor (CVM) en el cerebro, es proporcional a la presión arterial p de la sangre más la tasa temporal de cambio de la presión sanguínea. Determine la forma de la función de transferencia para los barorreceptores.

A partir de la descripción dada antes, la ecuación para b es

$$b = k_1 p + k_2 \frac{dp}{dt}$$

en donde k_1 y k_2 son constantes y p es la presión sanguínea [no debe confundirse aquí a p con la notación $p(t)$, la transformada inversa de Laplace de $P(s)$, que se introdujo en este capítulo como representación general para una función de transferencia]. La transformada de Laplace de la ecuación anterior con condiciones iniciales cero, es

$$B = k_1 P + k_2 sP = P(k_1 + k_2 s)$$

La función de transferencia de los barorreceptores es entonces $B/P = k_1 + k_2 s$. De nuevo recordamos al lector que P representa la transformada de la presión sanguínea arterial en este problema.

6.34. Considere la función de transferencia C_k/R_k para el sistema biológico descrito en el problema 3.4*a*) mediante las ecuaciones

$$c_k(t) = r_k(t) - \sum_{i=1}^{n} a_{k-i} c_i(t - \Delta t)$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Explique cómo puede calcularse C_k/R_k.

Tomando las transformadas de Laplace de las ecuaciones anteriores e ignorando las condiciones iniciales, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$C_k = R_k - \sum_{i=1}^{n} a_{k-i} C_i e^{-s\Delta t}$$

para $k = 1, 2, \ldots, n$. Si se escribieran todas las n ecuaciones anteriores, tendríamos n ecuaciones con n incógnitas (C_k para $k = 1, 2\ldots, n$). La solución general para cualquier C_k en términos de las entradas R_k, pueden determinarse utilizando las técnicas corrientes de resolución de ecuaciones simultáneas. Digamos que D representa el determinante de la matriz de coeficientes:

$$D \equiv \begin{vmatrix} 1 + a_0 e^{-s\Delta t} & a_{-1} e^{-s\Delta t} & \cdots & a_{1-n} e^{-s\Delta t} \\ a_1 e^{-s\Delta t} & 1 + a_0 e^{-s\Delta t} & \cdots & a_{2-n} e^{-s\Delta t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} e^{-s\Delta t} & \cdots & a_1 e^{-s\Delta t} & 1 + a_0 e^{-s\Delta t} \end{vmatrix}$$

Entonces, en general,

$$C_k = \frac{D_k}{D}$$

en donde D_k es el determinante de la matriz de coeficientes, en el cual se remplaza la k-ésima columna por

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{matrix}$$

Entonces, la función de transferencia $C_k)R_k$ se determina igualando a cero todas las entradas excepto R_k, calculando C_k con la fórmula anterior y dividiendo a C_k entre R_k.

6.35. ¿La función de transferencia en el dominio s puede determinarse para el muestreador ideal descrito en los problemas 3.5 y 4.39? ¿Por qué?

No. A partir de los resultados del problema 4.39, la transformada de la salida $U(s)$ del muestreador ideal es

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} u(kT)$$

No es posible factorizar la transformada $U(s)$ de la señal de entrada $u(t)$ aplicada al muestreador porque el muestreador no es un elemento invariable en el tiempo del sistema. En consecuencia, ésta no puede describirse mediante una función de transferencia ordinaria.

6.36. Con base en los desarrollos del muestreador y de la función de sostenimiento de orden cero, dados en los problemas 3.5, 3.6, 3.7 y 4.39, diseñe una idealización de la función de transferencia del sistema de sostenimiento de orden cero.

En el problema 3.7, los impulsos en $m_{IT}(t)$ remplazan los pulsos de corriente modulada por $m_s(t)$ en el problema 3.6. Entonces, por la propiedad de muestreo del impulso unitario, ecuación (*3.20*), la integral de cada impulso es el valor de $u(t)$ en el instante de muestreo kT, $k = 0,1,\ldots$, etc. Entonces, es lógico remplazar el capacitor (y el resistor) en el circuito de sostenimiento aproximado del problema 3.6 por un integrador que tiene la transformada de Laplace $1/s$. Para completar el diseño, la salida del circuito de sostenimiento debe ser igual a u en cada tiempo de muestreo, no $u - y_{H0}$; en consecuencia, necesitamos una función que restaure automáticamente a cero el integrador después de cada periodo de muestreo. La función de transferencia de tal dispositivo está dada por la función de transferencia del "pulso":

$$P_{H0}(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT})$$

Entonces, podemos escribir la transformada de la salida del dispositivo de sostenimiento ideal como

$$Y_{H0}(s) = P_{H0}(s)U^*(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-sT}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sT}u(kT)$$

6.37. ¿Se puede determinar la función de transferencia en el dominio s de la combinación: muestreador ideal y dispositivo de sostenimiento ideal de orden cero del problema anterior? ¿Por qué?

No. Es imposible factorizar la transformada $U(s)$ de $u(t)$ aplicada al muestreador. De nuevo, el muestreador no es un dispositivo invariable en el tiempo.

6.38. En el problema 3.6 se describió el circuito de atraso simple de la figura 6-3 con un interruptor S en la línea de entrada, como un muestreador y circuito de sostenimiento de orden cero aproximado y se idealizó en el problema 6.36. ¿Por qué se trata de ese caso y bajo qué circunstancias?

En el problema 6.15 se demostró que la función de transferencia del atraso simple es

$$P(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC}$$

Si $RC \ll 1$, $P(s)$ puede aproximarse como $P(s) \approx 1$ y el capacitor sostiene idealmente la salida constante hasta el siguiente momento de muestreo.

6.39. Demuestre que el orden del polinomio del denominador debe ser igual a o mayor que el orden del polinomio de su numerador (propiedad 6, sección 6.6), para que una función racional $P(z)$ sea una función de transferencia de un sistema discreto en el tiempo y *causal*.

En la sección 3.16 vimos que un sistema discreto en el tiempo es causal si su secuencia de ponderación $w(k) = 0$ para $k < 0$. Hagamos que $P(z)$, la función de transferencia del sistema, tenga la forma

$$P(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

en donde $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$. La secuencia de ponderación $w(k)$ puede generarse invirtiendo $P(z)$, empleando la técnica de división no abreviada de la sección 4.9.

Dividimos primero el numerador y el denominador de $P(z)$ por z^m, formando así

$$P(z) = \frac{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \cdots + b_0 z^{-m}}{a_n z^{n-m} + a_{n-1} z^{n-m-1} + \cdots + a_0 z^{-m}}$$

Dividiendo el numerador de $P(z)$ entre su denominador, entonces da

$$P(z) = \left(\frac{b_m}{a_n}\right) z^{m-n} + \left(b_{m-1} - \frac{b_m a_{n-1}}{a_n}\right) z^{m-n-1} + \cdots$$

El coeficiente de z^{-k} en esta expansión de $P(z)$ es $w(k)$ y vemos que $w(k) = 0$ para $k < n - m$ y

$$w(n-m) = \frac{b_m}{a_n} \neq 0$$

Para que haya causalidad, $w(k) = 0$ para $k < 0$, entonces $n - m \geq 0$ y $n \geq m$.

6.40. Demuestre que la respuesta en estado estacionario de un sistema estable, discreto en el tiempo, a una secuencia de entrada $u(k) = \text{sen } \omega kT$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, está dada por

$$y_{EE} = A\left|P(e^{j\omega T})\right|\text{sen}(\omega kT + \phi) \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{6.14}$$

en donde $P(z)$ es la función de transferencia del sistema.

Puesto que el sistema es lineal, si este resultado es cierto para $A = 1$, entonces también es cierto para valores arbitrarios de A. Para simplificar los argumentos se utiliza una entrada $u'(k) = e^{j\omega kT}$, $k = 0,1,2,\ldots$ Teniendo en cuenta que

$$u'(k) = e^{j\omega kT} = \cos \omega kT + j \,\text{sen}\, \omega kT$$

la respuesta del sistema a $\{u'(k)\}$ es una combinación compleja de las respuestas a $\{\cos \omega kT\}$ y $\{\text{sen } \omega kT\}$ en donde la parte imaginaria es la respuesta a $\{\text{sen } \omega kT\}$. De la tabla 4.2, la transformada z de $\{e^{j\omega T}$ es

$$\frac{z}{z - e^{j\omega T}}$$

Así, la transformada z de la salida del sistema $Y'(z)$ es

$$Y'(z) = P(z)\frac{z}{z - e^{j\omega T}}$$

Para invertir $Y'(z)$, formamos la expansión en fracciones parciales de

$$\frac{Y'(z)}{z} = P(z)\frac{1}{z - e^{j\omega T}}$$

Esta expansión consta de los términos debidos a los polos de $P(z)$ y un término debido al polo en $z = e^{j\omega T}$. Entonces

$$Y'(z) = z\left[\sum \text{términos debidos a los polos de } P(z) + \frac{P(e^{j\omega T})}{z - e^{j\omega T}}\right]$$

y

$$\{y'(k)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left[z\sum \text{términos debidos a los polos de } P(z)\right] + \{P(e^{j\omega T})e^{j\omega kT}\}$$

Puesto que el sistema es estable, el primer término desaparece cuando k se hace grande y

$$y_{EE} = P(e^{j\omega T})e^{j\omega kT} = |P(e^{j\omega T})|e^{j(\omega kT+\phi)}$$
$$= |P(e^{j\omega T})|[\cos(\omega kT + \phi) + j\,\text{sen}(\omega kT + \phi)] \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

en donde $\phi = \arg P(e^{j\omega T})$. La respuesta en estado estacionario a la entrada sen ωkT es la parte imaginaria de y_{EE}, o

$$y_{EE} = |P(e^{j\omega T})|\,\text{sen}(\omega kT + \phi) \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

6.41. Demuestre que si una función continua en el tiempo $y(t)$ con transformada de Laplace $Y(s)$ se muestrea uniformemente con un periodo T, la transformada z de la secuencia resultante de muestras $Y^*(z)$ está relacionada con $Y(s)$ por medio de la ecuación (*6.15*).

De la definición 4.3:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st}\,ds$$

en donde $c > \sigma_0$. El muestreo uniforme de $y(t)$ genera las muestras $y(kT)$, $k = 0,1,2,\ldots$ Entonces

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{skT}\,ds \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

La transformada z de esta secuencia es

$$Y^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{skT}\,ds$$

y después de intercambiar la integración y la suma,

$$Y^*(z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)\sum_{k=0}^{\infty} e^{skT}z^{-k}\,ds$$

Ahora

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{skT}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{sT}z^{-1}\right)^k$$

es una serie geométrica que converge si $|e^{sT}z^{-1}| < 1$. En este caso,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{sT}z^{-1}\right)^k = \frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}$$

La desigualdad $|e^{sT}z^{-1}| < 1$ implica que $|z| > |e^{sT}|$. Al hacer la integral de contorno $|e^{sT}| = |e^{(c+j\omega)T}| = e^{cT}$

Así la serie converge para $|z| > e^{cT}$. En consecuencia

$$Y^*(z) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)\frac{1}{1-e^{sT}z^{-1}}\,ds$$

para $|z| > e^{cT}$, que es la ecuación (*6.15*).

6.42. Demuestre que si el circuito de sostenimiento de la figura 6-3 es de orden cero, la ecuación (*6.17*) da la ecuación de la función de transferencia discreta en el tiempo.

Hagamos $p(t) = \mathscr{L}^{-1}[P(s)]$. Entonces, usando la integral de convolución (definición 3.23), la salida de $P(s)$ se puede escribir como

$$y(t) = \int_0^t p(t-\tau)\,x_{H0}(\tau)\,d\tau$$

Puesto que $x_{H0}(t)$ es la salida del dispositivo de sostenimiento de orden cero, ésta es constante sobre cada intervalo de muestreo. Así, $y(t)$ se puede escribir como:

$$y(t) = \int_0^T p(t-\tau)\,x(0)\,d\tau + \int_T^{2T} p(t-\tau)\,x(1)\,d\tau + \cdots$$

$$+ \int_{(j-2)T}^{(j-1)T} p(t-\tau)\,x[(j-2)T]\,d\tau + \int_{(j-1)T}^{t} p(t-\tau)\,x[(j-1)T]\,d\tau$$

en donde $(j-1)T \le t \le jT$. Ahora

$$y(jT) = \sum_{i=0}^{j-1}\left(\int_{iT}^{(i+1)T} p(jT-\tau)\,d\tau\right)x(iT)$$

Haciendo $\theta \equiv jT - \tau$, la integral se puede escribir como

$$\int_{iT}^{(i+1)T} p(jT-\tau)\,d\tau = \int_{(j-i-1)T}^{(j-i)T} p(\theta)\,d\theta$$

en donde $i = 0,1,2,3,\ldots, j-1$. Ahora, al definir $h(t) \equiv \int_0^t p(\theta)\,d\theta$ y $k = j-1$ ó $j = k+1$, se produce

$$\int_{(j-i-1)T}^{(j-i)T} p(\theta)\,d\theta = \int_0^{(j-i)T} p(\theta)\,d\theta - \int_0^{(j-i-1)T} p(\theta)\,d\theta = \int_0^{(k-i+1)T} p(\theta)\,d\theta - \int_0^{(k-i)T} p(\theta)\,d\theta$$

$$= h[(k-i+1)T] - h[(k-i)T]$$

En consecuencia, podemos escribir

$$y[(k+1)T] = \sum_{i=0}^{k} h[(k-i+1)T]x(iT) - \sum_{i=0}^{k} h[(k-i)T]x(iT)$$

Al utilizar la relación entre la suma de convolución y el producto de las transformadas z en la sección 4.9, el teorema del desplazamiento (propiedad 6, sección 4.9) y la definición de la transformada z, entonces la transformada z de la última ecuación es

$$zY^*(z) = zH^*(z)\,X^*(z) - H^*(z)\,X^*(z)$$

en donde $Y^*(z)$ es la transformada z de la secuencia $y(kT)$, $k = 0,1,2,\ldots, H^*(z)$ es la transformada de $\int_0^{kT} p(\theta)d\theta$, $k = 0,1,2,\ldots$, y $X^*(z)$ es la transformada z de $x(kT)$, $k = 0,1,2,\ldots$ Al reordenar términos se obtiene

$$\frac{Y^*(z)}{X^*(z)} = (1-z^{-1})\,H^*(z)$$

Entonces, puesto que $h(t) = \int_0^t p(\theta)\,d\theta$, $\mathscr{L}[h(t)] = P(s)/s$ y

$$\frac{Y^*(z)}{X^*(z)} = (1-z^{-1})\,\mathscr{Z}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{P(s)}{s}\right)\Bigg|_{t=kT}\right\}$$

6.43. Compare la solución del problema 6.42 con la del problema 6.37. ¿Cuál es la diferencia fundamental en el problema 6.42 que permite el uso de los métodos del dominio de la frecuencia lineal en él?

La presencia de un muestreador en la salida de $P(s)$ permite el uso de funciones de transferencia en el dominio z para la combinación del muestreador, el dispositivo de sostenimiento de orden cero y $P(s)$.

Problemas suplementarios

6.44. Determine la función de transferencia de la red *R-C* que se muestra en la figura 6.18.

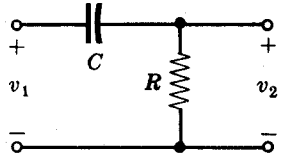


Figura 6-18

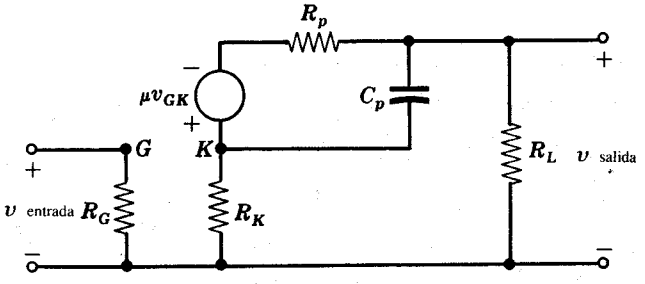


Figura 6-19

6.45. En la figura 6-19 se muestra un circuito equivalente de un amplificador electrónico. ¿Cuál es su función de transferencia?

6.46. Encuentre la función de transferencia de un sistema que tiene una respuesta impulso $p(t) = e^{-t}(1 - \text{sen } t)$.

6.47. A un sistema con una función de transferencia $P(s) = 2/s(s + 2)$ se aplica una entrada sinusoidal $x = 2 \text{ sen } 2t$. Determine la salida en estado estacionario y_{EE}.

6.48. Encuentre la respuesta al paso de un sistema que tiene la función de transferencia $P(s) = 4/(s^2 - 1)(s^2 + 1)$.

6.49. Determine cuáles de las siguientes funciones de transferencia representan sistemas estables y cuáles representan sistemas inestables:

$$a)\ P(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s^2+4)} \qquad c)\ P(s) = \frac{(s+2)(s-2)}{(s+1)(s-1)(s+4)}$$

$$b)\ P(s) = \frac{(s-1)}{(s+2)(s+4)} \qquad d)\ P(s) = \frac{6}{(s^2+s+1)(s+1)^2}$$

$$e)\ P(s) = \frac{5(s+10)}{(s+5)(s^2-s+10)}$$

6.50. Use el teorema de valor final (Capítulo 4) para demostrar que el valor en estado estacionario de una salida de un sistema estable, en respuesta a una entrada paso unitario, es igual a la ganancia en c.c. del sistema.

6.51. Determine la función de transferencia de dos de las redes presentadas en el problema 6.44 conectadas en cascada (en serie).

6.52. Examine la literatura de las funciones de transferencia de los giróscopos de dos y tres grados de libertad y compárelas con la del giróscopo de un grado de libertad descrito en el problema 6.31.

6.53. Determine la respuesta rampa de un sistema que tiene la función de transferencia $P(s) = (s + 1)/(s + 2)$.

6.54. Demuestre que si un sistema está descrito por

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i u}{dt^i}$$

para $m \leq n$ está en reposo antes de la aplicación de la entrada, esto es, $d^k y/dt^k = 0, k = 0, 1, \ldots, n-1$, para $t < 0$, entonces (los términos debidos a *todos* los valores iniciales $u_0^k,\ y_0^k$) $= 0$. (*Sugerencia*: Integre n veces la ecuación diferencial desde $0^- \equiv \lim_{\epsilon \to 0,\ \epsilon < 0} \epsilon$ hasta t y luego haga $t \to 0^+$.

6.55. Determine la respuesta de frecuencia del dispositivo de sostenimiento ideal de orden cero (SOC) con la función de transferencia dada en el problema 6.36 y haga un esquema de las características de ganancia y fase.

6.56. En la definición 2.13 y en el ejemplo 2.9 se explicó un **sostenimiento de orden cero**, el cual mantiene la **pendiente** de la función definida por los dos últimos valores de la salida del muestreador, hasta el siguiente instante de muestreo. Determine la función de transferencia discreta en el tiempo de $U^*(z)$ a $Y^*(z)$ para el subsistema de la figura 6-3, con un elemento de sostenimiento de primer orden.

Respuestas a los problemas suplementarios

6.44. $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{s}{s + 1/RC}$

6.45. $\dfrac{V_{\text{salida}}}{V_{\text{entrada}}} = \dfrac{-\mu R_L}{(R_k + R_L) R_p C_p s + (\mu + 1) R_k + R_p + R_L}$

6.46. $P(s) = \dfrac{s^2 + s + 1}{(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$

6.47. $y_{EE} = 0.707 \operatorname{sen}(2t - 135°)$

6.48. $y = -4 + e^{-t} + e^{t} + 2\cos t$

6.49. *b*) y *d*) representan sistemas estables; *a*), *c*) y *e*) representan sistemas inestables.

6.51. $$\frac{V_2}{V_1} = \frac{s^2}{s^2 + (3/RC)s + 1/R^2C^2}$$

6.53. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t$

6.55. $$P(j\omega) = \left[\frac{T\,\text{sen}(\omega T/2)}{\omega T/2}\right] e^{-j\omega T/2}$$

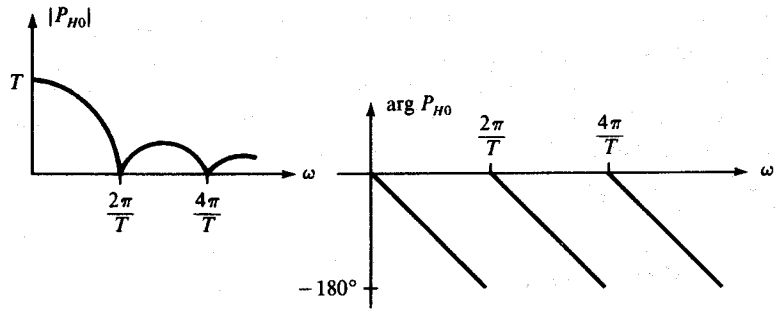


Figura P6-55

6.56. $$\frac{Y^*(z)}{U^*(z)} = (1 - z^{-1})^2 \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s} + \frac{1}{T}\frac{G(s)}{s^2}\right)\Bigg|_{t=kT}\right\}$$

Capítulo 7

Algebra de los diagramas de bloques y funciones de transferencia de los sistemas

7.1 Introducción

Se destaca en los Capítulos 1 y 2 que los diagramas de bloques son una forma gráfica y abreviada de representar un sistema físico, por medio de la ilustración de las relaciones funcionales entre sus componentes. Esta última característica permite la evaluación de las contribuciones de los elementos individuales al desempeño total del sistema.

En este capítulo investigamos primero más detalladamente estas relaciones, utilizando los conceptos de dominio de frecuencia y función de transferencia desarrollados en los capítulos precedentes. Luego desarrollamos métodos para reducir diagramas de bloques complicados a formas más manejables, de tal manera que se puedan utilizar para predecir el desempeño global de un sistema.

7.2 Revisión de fundamentos

En general, un diagrama de bloques consiste en una configuración específica de cuatro tipos de elementos: bloques, puntos de suma, puntos de toma y flechas que representan la señal de flujo unidireccional:

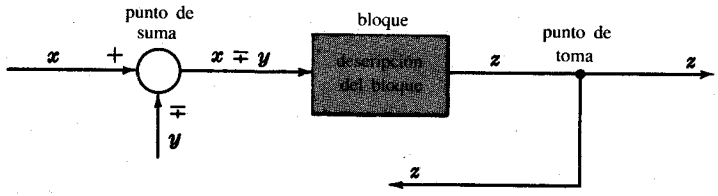


Figura 7-1

En la figura 7-1 queda claro el significado de cada elemento.

Las cantidades del dominio del tiempo se representan en minúsculas.

EJEMPLO 7.1. $r = r(t)$ para señales continuas y $r(t_k)$ o $r(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, para señales discretas en el tiempo.

En este capítulo se utilizan las mayúsculas para las transformadas de Laplace o las transformadas z. A menudo se suprimen los argumentos s ó z para simplificar la notación, si el contexto es claro o si los resultados presentados son los mismos tanto para los dominios de las funciones de transfe*encia de Laplace (sistemas continuos en el tiempo) como para las funciones z (sistemas discretos en el tiempo).

EJEMPLO 7.2. $R = R(s)$ o $R = R(z)$.

En la figura 7-2 se reproduce el sistema básico de control con retroalimentación presentado en el Capítulo 2, con todas las cantidades abreviadas en la notación de transformadas.

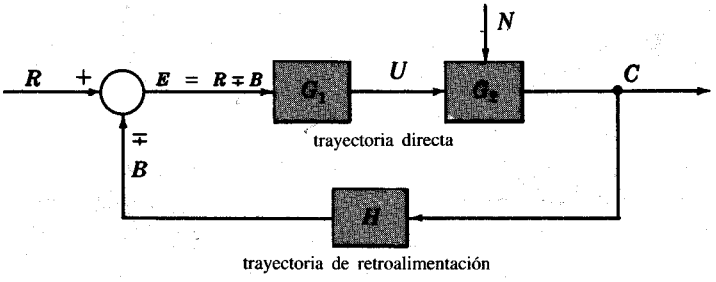


Figura 7-2

Las cantidades G_1, G_2 y H son las funciones de transferencia de los componentes en los bloques. Ellas pueden ser funciones de transferencia de las transformadas z o de las de Laplace.

EJEMPLO 7.3. $G_1 = U/E$ o $U = G_1E$.

Es importante notar que estos resultados se aplican a las funciones de transferencia *bien sea* transformadas en Laplace *o* transformadas z, pero no necesariamente a diagramas de bloques *mezclados* continuos/discretos en los que se incluyan *muestreadores*. Los muestreadores son dispositivos lineales, pero no son invariables en el tiempo y, por tanto, no se pueden caracterizar mediante una función de transferencia ordinaria en el dominio s, como se definió en el Capítulo 6. *Véase* el problema 7.38 para algunas excepciones, y la sección 6.8 para un análisis más extenso acerca de los sistemas mezclados continuo/discreto.

7.3 Bloques en cascada

Cualquier número finito de bloques en serie se puede combinar algebraicamente por medio de la multiplicación de funciones de transferencia. Esto es, n componentes o bloques con funciones de transferencia $G_1, G_2, \ldots, G_n$ conectados en cascada, son equivalentes a un solo elemento G con una función de transferencia dada por

$$G = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdots G_n = \prod_{i=1}^{n} G_i \qquad (7.1)$$

Siempre que no haya posibilidad de confusión se omite el símbolo de la multiplicación "·"

EJEMPLO 7.4.

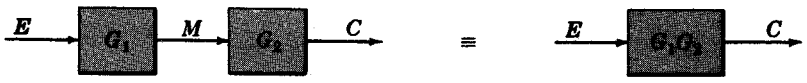


Figura 7-3

La multiplicación de las funciones de transferencia es *conmutativa*, esto es,

$$G_iG_j = G_jG_i \tag{7.2}$$

para cualquier i ó j.

EJEMPLO 7.5.

Figura 7-4

Los efectos de carga (interacción de una función de transferencia sobre su vecina) deben tenerse en cuenta en la obtención de funciones de transferencia individuales antes de que los bloques se puedan colocar en cascada. (*Véase* el problema 7.4)

7.4 Formas canónicas de un sistema de control con retroalimentación

Los dos bloques en la trayectoria directa del sistema con retroalimentación de la figura 7-2 se pueden combinar. Haciendo $G \equiv G_1G_2$, la configuración resultante se denomina **forma canónica** del sistema de control retroalimentado. G y H no necesariamente son únicas para un sistema en particular.

Las siguientes definiciones se refieren a la figura 7-5.

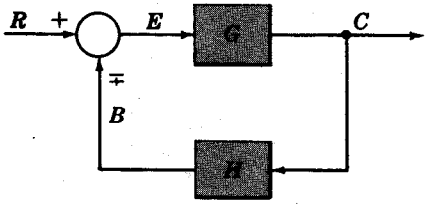


Figura 7-5

Definición 7.1: $G \equiv$ función de transferencia directa $\equiv$ función de transferencia
Definición 7.2: $H \equiv$ función de transferencia de la retroalimentación
Definición 7.3: $GH \equiv$ función de transferencia de la malla $\equiv$ función de transferencia en malla abierta
Definición 7.4: $C/R \equiv$ función de transferencia en malla cerrada $\equiv$ relación de control
Definición 7.5: $E/R \equiv$ relación de señal actuante $\equiv$ relación de error
Definición 7.6: $B/R \equiv$ relación de retroalimentación primaria

En las siguientes ecuaciones, el signo $-$ se refiere a un sistema con retroalimentación *positiva*, y el signo $+$ a un sistema con retroalimentación *negativa*:

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH} \tag{7.3}$$

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 \pm GH} \tag{7.4}$$

$$\frac{B}{R} = \frac{GH}{1 \pm GH} \tag{7.5}$$

El denominador de C/R determina la *ecuación característica* del sistema, que usualmente se define a partir de $1 \pm GH = 0$, o de forma equivalente,

$$D_{GH} \pm N_{GH} = 0 \tag{7.6}$$

en donde D_{GH} es el denominador y N_{GH} es el numerador de GH, a no ser que un polo de G cancele un cero de H (*véase* el problema 7.9). Las relaciones (*7.1*) a (*7.6*) son válidas para sistemas continuos (en el dominio s) y para sistemas discretos (en el dominio z).

7.5 Teoremas de transformación de diagramas de bloques

Los diagramas de bloques de sistemas de control complicados se pueden simplificar utilizando transformaciones fácilmente derivables. La primera transformación importante, combinar bloques en cascada, se presentó en la sección 7.3. Esta se repite en la tabla que ilustra los teoremas de transformaciones (figura 7-6) para presentarla completa. Se utiliza la letra P para representar cualquier función de transferencia, y W, X, Y, Z representan cualesquiera señales transformadas.

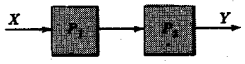
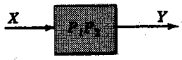
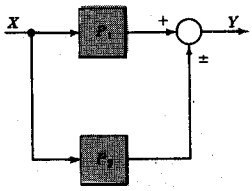
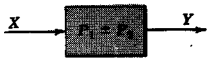
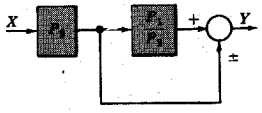
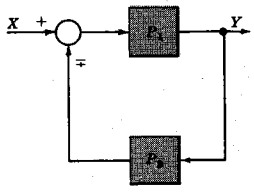
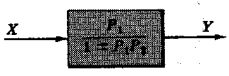
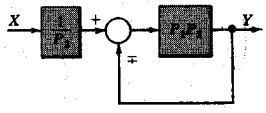
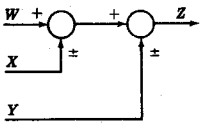
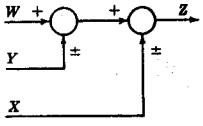
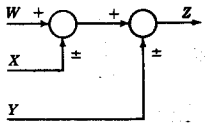
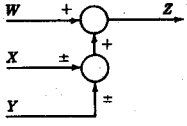
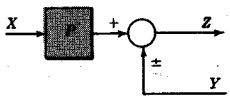
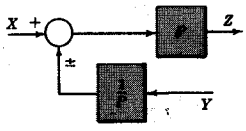
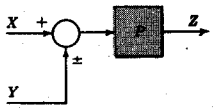
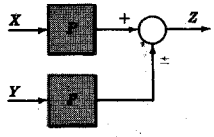
	Transformación	Ecuación	Diagrama de bloques	Diagrama de bloques equivalente
1	Combinación de bloques en cascada	$Y = (P_1P_2)X$		
2	Combinación de bloques en paralelo; o eliminación de la malla directa	$Y = P_1X \pm P_2X$		
3	Remoción de un bloque de una trayectoria directa	$Y = P_1X \pm P_2X$		
4	Eliminación de una malla de retroalimentación	$Y = P_1(X \mp P_2Y)$		
5	Remoción de un bloque en una malla de retroalimentación	$Y = P_1(X \mp P_2Y)$		
6a	Reordenamiento de los puntos de suma	$Z = W \pm X \pm Y$		
6b	Reordenamiento de los puntos de suma	$Z = W \pm X \pm Y$		
7	Movimiento de un punto de suma adelante de un bloque	$Z = PX \pm Y$		
8	Movimiento de un punto de suma más allá de un bloque	$Z = P[X \pm Y]$		

Fig. 7-6

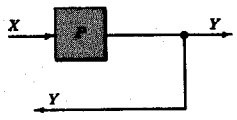
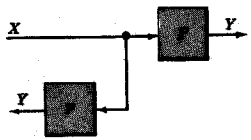
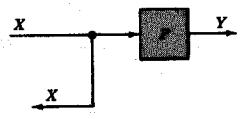
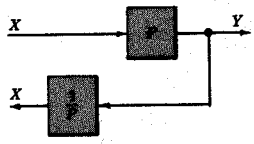
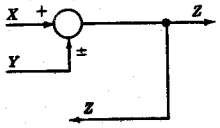
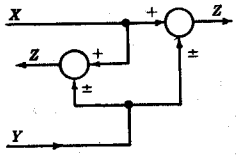
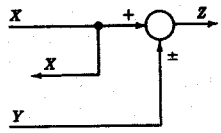
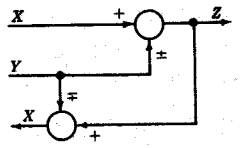
	Transformación	Ecuación	Diagrama de bloques	Diagrama de bloques equivalentes
9	Movimiento de un punto de toma adelante de un bloque	$Y = PX$		
10	Movimiento de un punto de toma más allá de un bloque	$Y = PX$		
11	Movimiento de un punto de toma adelante de un punto de suma	$Z = X \pm Y$		
12	Movimiento de un punto de toma más allá de un punto de suma	$Z = X \pm Y$		

Figura 7-6 (*continuación*)

7.6 Sistemas con retroalimentación unitaria

Definición 7.7: Un **sistema con retroalimentación unitaria** es aquel en el cual la retroalimentación primaria b es exactamente igual a la salida controlada c.

EJEMPLO 7.6. $H = 1$ para un sistema lineal con retroalimentación unitaria (figura 7-7).

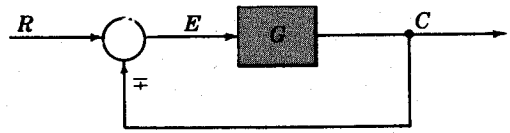


Figura 7-7

Cualquier sistema retroalimentado con elementos lineales invariables en el tiempo, únicamente se puede poner en la forma de un sistema con retroalimentación unitaria utilizando la transformación 5.

EJEMPLO 7.7.

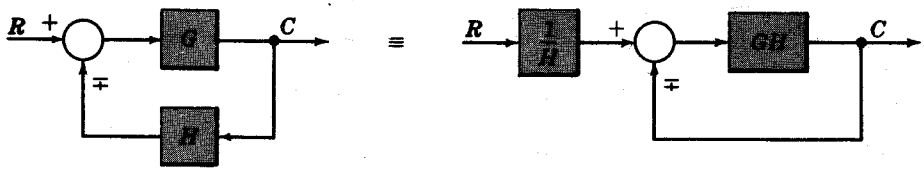


Figura 7-8

La ecuación característica del sistema con retroalimentación unitaria, determinada a partir de $1 \pm G = 0$, es

$$D_G \pm N_G = 0 \tag{7.7}$$

en donde D_G es el denominador y N_G es el numerador de G.

7.7 Superposición de entradas múltiples

Algunas veces es necesario evaluar el desempeño de un sistema cuando se aplican simultáneamente varias entradas en diferentes puntos de dicho sistema.

Si en un sistema *lineal* están presentes entradas múltiples, cada una se trata independientemente. La salida debida a los estímulos que actúan juntos se encuentra así: suponemos condiciones iniciales cero, ya que buscamos cómo responde el sistema únicamente a las entradas.

Paso 1: Igualar todas las entradas, excepto una, a cero.

Paso 2: Transformar el diagrama de bloques a la forma canónica, utilizando las transformaciones de la sección 7.5.

Paso 3: Calcular la respuesta debida a la entrada escogida cuando ésta actúa sola.

Paso 4: Repetir los pasos 1 al 3 para cada una de las entradas restantes.

Paso 5: Sumar algebraicamente todas las respuestas (salidas) determinadas en los pasos 1 al 4. Esta suma es la salida total del sistema cuando todas las entradas actúan simultáneamente.

Aquí recalcamos nuevamente que el proceso de superposición anterior depende de que el sistema sea lineal.

EJEMPLO 7.8. Determinamos la salida C debida a las entradas U y R para la figura 7-9.

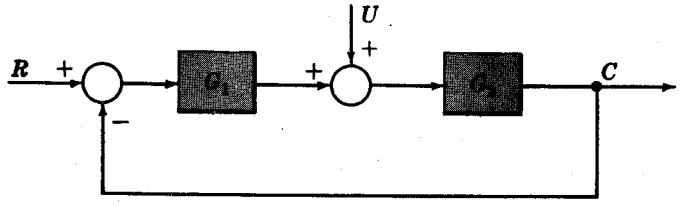
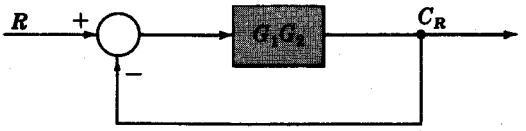
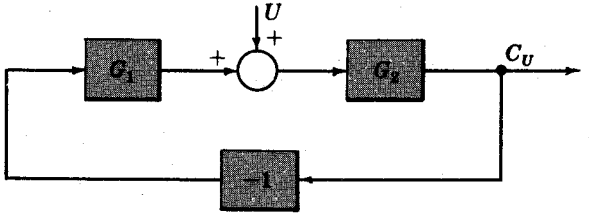


Figura 7-9

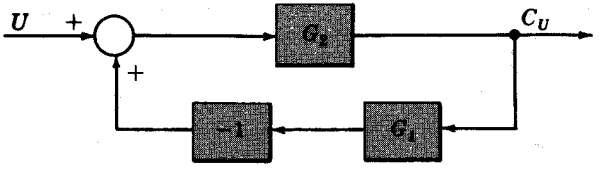
Paso 1: Hacemos $U = 0$.
Paso 2: El sistema se reduce a



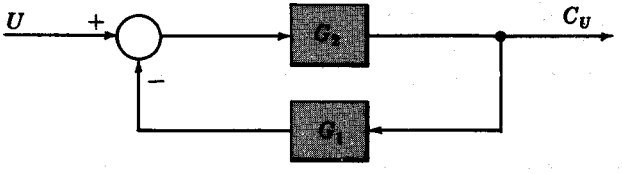
Paso 3: Mediante la ecuación (*7.3*), la salida C_R debida a la entrada R es $C_R = [G_1G_2/(1 + G_1G_2)]R$.
Paso 4a: Hacemos $R = 0$.
Paso 4b: Ponemos -1 en un bloque para representar el efecto de retroalimentación negativo:



Reordenamos el diagrama de bloques:



Hacemos que el bloque -1 se absorba en el punto de suma:



Paso 4c: Mediante la ecuación (*7.3*), la salida C_U, debida a la entrada U, es $C_U = [G_2/(1 + G_1G_2)]U$.
Paso 5: La salida total es

$$C = C_R + C_U = \left[\frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2}\right]R + \left[\frac{G_2}{1 + G_1G_2}\right]U = \left[\frac{G_2}{1 + G_1G_2}\right][G_1R + U]$$

7.8 Reducción de diagramas de bloques complicados

Los diagramas de bloques de sistemas de control con retroalimentación prácticos, a menudo son bastante complicados. Estos pueden presentar varias mallas directas o de retroalimentación y entradas múltiples. Mediante una reducción sistemática del diagrama de bloques, todo sistema de retroalimentación lineal de mallas múltiples se puede reducir a la forma canónica. Las técnicas desarrolladas en los parágrafos anteriores proporcionan las herramientas necesarias.

Se pueden utilizar los siguientes pasos generales como una aproximación básica en la reducción de diagramas de bloques complicados. Cada paso se refiere a transformaciones específicas, las cuales se relacionan en la figura 7-6.

Paso 1: Combine todos los bloques en cascada utilizando la transformación 1.

Paso 2: Combine todos los bloques en paralelo utilizando la transformación 2.

Paso 3: Elimine todas las mallas de retroalimentación menores utilizando la transformación 4.

Paso 4: Desplace los puntos de suma a la izquierda y los puntos de toma a la derecha de la malla principal utilizando las transformaciones 7, 10 y 12.

Paso 5: Repita los pasos 1 al 4 hasta que alcance la forma canónica para una entrada particular.

Paso 6: Repita los pasos 1 al 5 para cada entrada, según se necesite.

Algunas veces las transformaciones 3, 5, 6, 8, 9 y 11 son útiles, y la experiencia con la técnica de reducción determina su aplicación.

EJEMPLO 7.9. Reduzcamos el diagrama de bloques (figura 7-10) a la forma canónica.

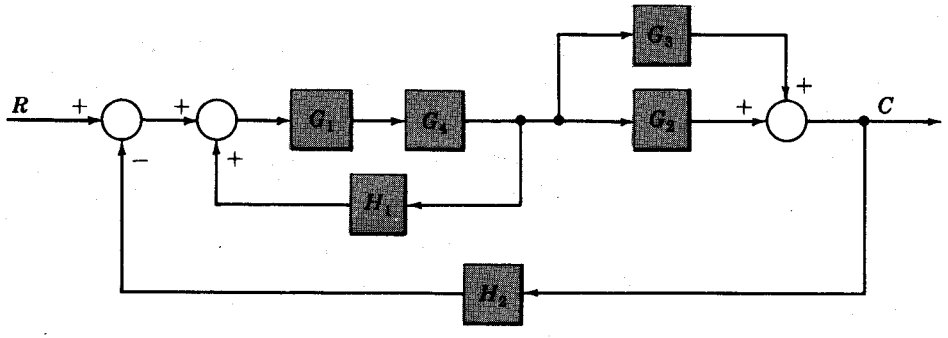
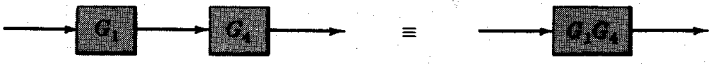
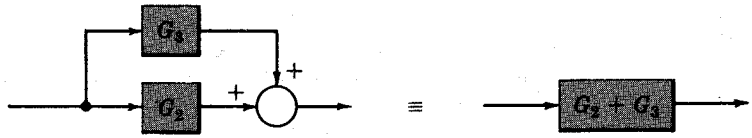


Figura 7-10

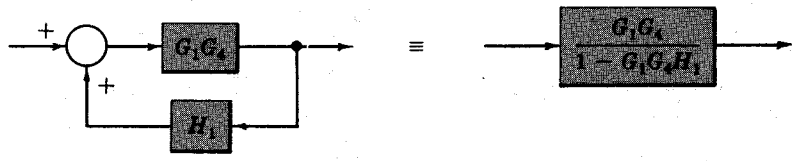
Paso 1:



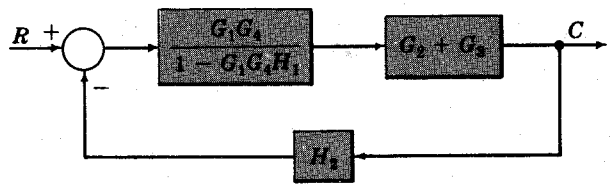
Paso 2:



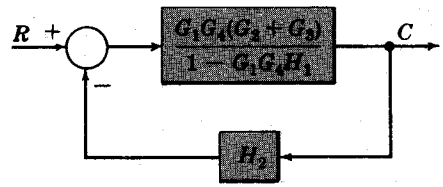
Paso 3:



Paso 4: No se aplica



Paso 5:



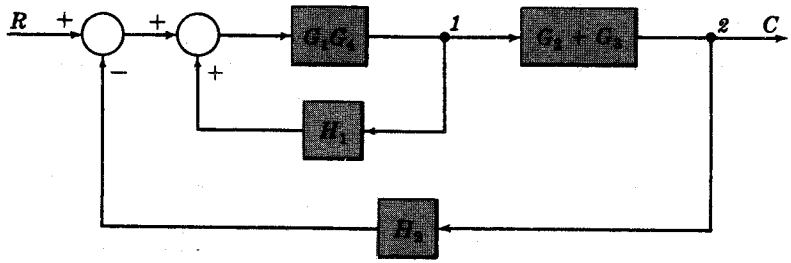
Paso 6: No se aplica

Una necesidad ocasional en la reducción del diagrama de bloques es el aislamiento de un bloque particular en la malla directa o de retroalimentación. Esto puede ser deseable para examinar más fácilmente el efecto de un bloque particular sobre todo el sistema.

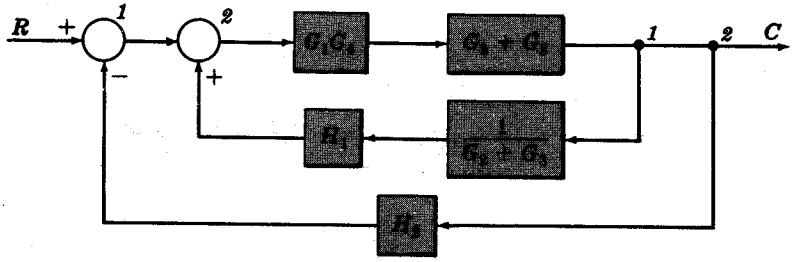
El aislamiento de un bloque generalmente se logra aplicando los mismos pasos de reducción al sistema, pero usualmente en orden diferente. El bloque que se va a aislar no se puede combinar con alguno de los otros.

El reordenamiento de los puntos de suma (transformación 6) y las transformaciones 8, 9 y 11 son especialmente útiles para el aislamiento de bloques.

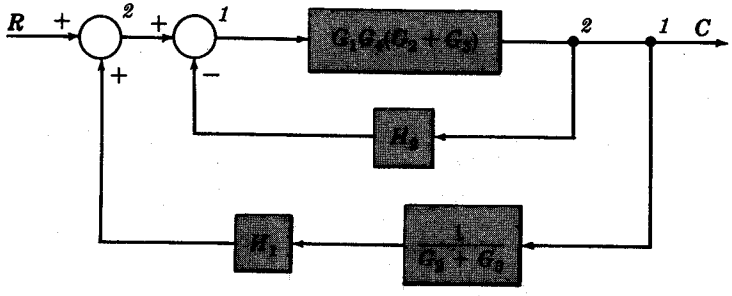
EJEMPLO 7.10. Reduzcamos el diagrama de bloques del ejemplo 7.9 aislando el bloque H_1.
Pasos 1 y 2:



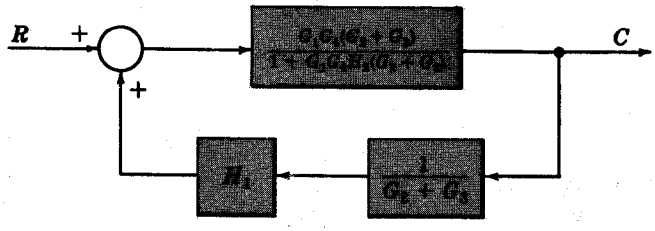
En esta oportunidad no aplicamos el paso 3, sino que vamos directamente al paso 4 moviendo el punto de toma 1 más allá del bloque $G_2 + G_3$:



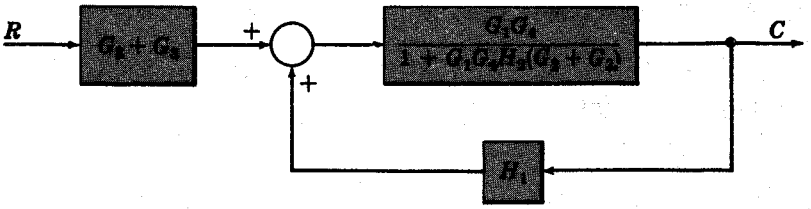
Ahora podemos reordenar los puntos de suma 1 y 2 y combinar los bloques en cascada en la malla directa; utilizamos la transformación 6 y en seguida la transformación 1:



Paso 3:



Finalmente, aplicamos la transformación 5 para eliminar $1/(G_2 + G_3)$ de la malla de retroalimentación:



Note que pudo haberse obtenido el mismo resultado después de aplicar el paso 2 moviendo el punto de toma 2 *adelante* de $G_2 + G_3$, en lugar del punto de toma 1 más allá de $G_2 + G_3$. El bloque $G_2 + G_3$ tiene el mismo efecto sobre la relación de control C/R, bien sea que siga directamente a R o que preceda directamente a C.

Problemas resueltos

Bloques en cascada

7.1. Pruebe la ecuación (*7.1*) para bloques en cascada.

En la figura 7-11 se da el diagrama de bloques para n funciones de transferencia $G_1, G_2, \ldots, G_n$ en cascada.

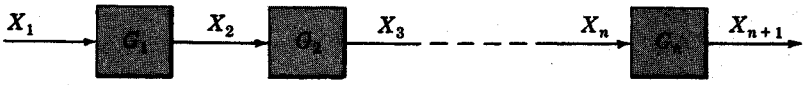


Figura 7-11

La transformada de la salida para cualquier bloque es igual a la entrada de la transformada multiplicada por la función de transferencia (*véase* la sección 6.1). En consecuencia $X_2 = X_1G_1$, $X_3 = X_2G_2, \ldots, X_n = X_{n-1}G_{n-1}$, $X_{n+1} = X_nG_n$. Combinando estas ecuaciones, tenemos

$$X_{n+1} = X_nG_n = X_{n-1}G_{n-1}G_n = \cdots = X_1G_1G_2 \cdots G_{n-1}G_n$$

Dividiendo ambos lados por X_1, obtenemos $X_{n+1}/X_1 = G_1G_2 \cdots G_{n-1}G_n$.

7.2. Pruebe la conmutatividad de los bloques en cascada, ecuación (*7.2*).

Considere dos bloques en cascada (figura 7-12):

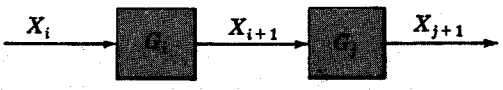


Figura 7-12

A partir de la ecuación (*6.1*) tenemos $X_{i+1} = X_iG_i = G_iX_i$ y $X_{j+1} = X_{i+1}G_j = G_jX_{i+1}$. Entonces $X_{j+1} = (X_iG_i)G_j = X_iG_iG_j$. Dividiendo ambos lados por X_i, $X_{j+1}/X_i = G_iG_j$.

También, $X_{j+1} = G_j(G_iX_i) = G_jG_iX_i$. Dividiendo de nuevo por X_i, $X_{j+1}/X_i = G_jG_i$. Así $G_iG_j = G_jG_i$.

Este resultado se extiende por inducción matemática a cualquier número finito de funciones de transferencia (bloques) en cascada.

7.3. Encuentre X_n/X_1 para cada uno de los sistemas de la figura 7-13.

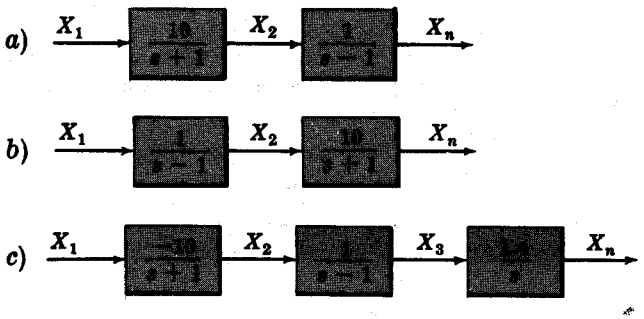


Figura 7-13

a) Una manera de resolver este problema es escribir primero X_2 en términos de X_1:

$$X_2 = \left(\frac{10}{s+1}\right)X_1$$

Luego se escribe X_n en términos de X_2:

$$X_n = \left(\frac{1}{s-1}\right)X_2 = \left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{10}{s+1}\right)X_1$$

Multiplicando y dividiendo ambos lados por X_1, tenemos $X_n/X_1 = 10/(s^2 - 1)$.

En seguida se presenta un método más corto. Sabemos, a partir de la ecuación (*7.1*), que dos bloques se pueden reducir a uno simplemente multiplicando sus funciones de transferencia. También, la función de transferencia de un bloque sencillo es su transformada de salida a entrada. Por tanto

$$\frac{X_n}{X_1} = \left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{10}{s+1}\right) = \frac{10}{s^2-1}$$

b) Este sistema tiene la misma función de transferencia determinada en la parte *a*) ya que la multiplicación de las funciones de transferencia es conmutativa.

c) Mediante la ecuación (*7.1*), tenemos

$$\frac{X_n}{X_1} = \left(\frac{-10}{s+1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{1{,}4}{s}\right) = \frac{-14}{s(s^2-1)}$$

7.4. La función de transferencia de la figura 7-14a es $\omega_0/(s + \omega_0)$, en donde $\omega_0 = 1/RC$. La función de transferencia de la figura 7-14b ¿es igual a $\omega_0^2/(s + \omega_0)^2$? ¿Por qué?

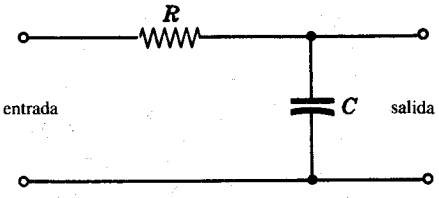


Figura 7-14a

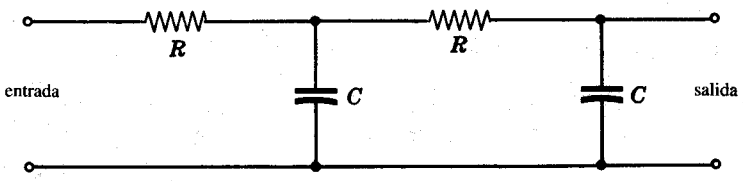


Figura 7-14b

No. Si se conectan dos redes en serie (figura 7-15), la segunda carga a la primera extrayendo corriente de ella. Entonces, la ecuación (*7.1*) no se puede aplicar directamente al sistema combinado. La función de transferencia correcta para las redes conectadas es $\omega_0^2/(s^2 + 3\omega_0 s + \omega_0^2)$ (*véase* el problema 6.16), y por tanto *no* es igual a $(\omega_0/(s + \omega_0))^2$.

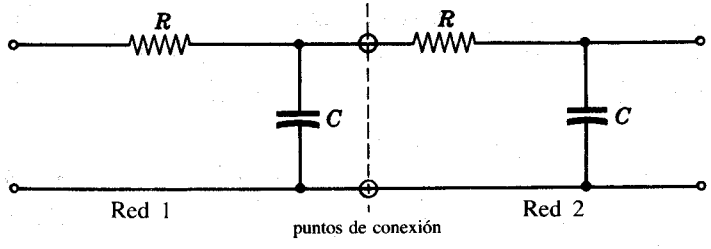


Figura 7-15

Sistemas canónicos de control con retroalimentación

7.5. Pruebe la ecuación (*7.3*), $C/R = G/(1 \pm GH)$.

Las ecuaciones que describen los sistemas canónicos de control con retroalimentación se toman directamente de la figura 7-16, y están dadas por $E = R \mp B$, $B = HC$, y $C = GE$. Sustituyendo una en la otra, tenemos

$$C = G(R \mp B) = G(R \mp HC)$$
$$= GR \mp GHC = GR + (\mp GHC)$$

Restando $(\mp GHC)$ de ambos lados, se obtiene $C \pm GHC = GR$ o $C/R = G/(1 \pm GH)$.

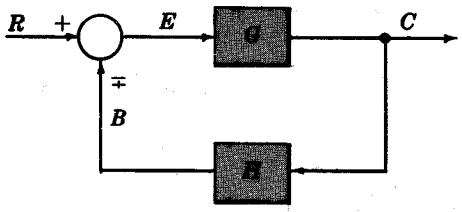


Figura 7-16

7.6. Pruebe la ecuación (*7.4*), $E/R = 1/(1 \pm GH)$.

Del problema anterior, tenemos $E = R \mp B$, $B = HC$ y $C = GE$.
Entonces, $E = R \mp HC = R \mp HGE$, $E \pm GHE = R$ y $E/R = 1/(1 \pm GH)$.

7.7. Pruebe la ecuación (*7.5*), $B/R = GH/(1 \pm GH)$.

A partir de $E = R \mp B$, $B = HC$ y $C = GE$ se obtiene $B = HGE = HG(R \mp B) = GHR \mp GHB$
Entonces $B \pm GHB = GHR$, $B = GHR/(1 \pm GH)$ y $B/R = GH/(1 \pm GH)$.

7.8. Pruebe la ecuación (*7.6*), $D_{GH} \pm N_{GH} = 0$.

La ecuación característica usualmente se obtiene haciendo $1 \pm GH = 0$. (*Véase* el problema 7.9 para una excepción). Poniendo $GH \equiv N_{GH}/D_{GH}$, se obtiene $D_{GH} \pm N_{GH} = 0$.

7.9. Determine *a*) la función de transferencia de la malla, *b*) la relación de control, *c*) la relación de error, *d*) la relación primaria de retroalimentación y *e*) la ecuación característica del sistema de control retroalimentado en el que K_1 y K_2 son constantes (figura 7-17).

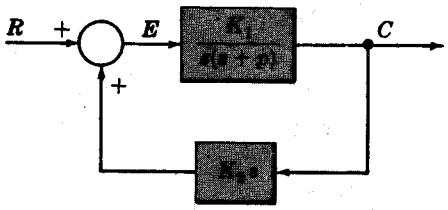


Figura 7-17

a) La función de transferencia de la malla es igual a GH.

Por tanto
$$GH = \left[\frac{K_1}{s(s+p)}\right] K_2 s = \frac{K_1 K_2}{s+p}$$

b) La relación de control, o función de transferencia de malla cerrada, está dada por la ecuación (*7.3*) (con signo negativo para la retroalimentación positiva):

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1-GH} = \frac{K_1}{s(s+p-K_1K_2)}$$

c) La relación de error, o relación de señal actuante, está dada por la ecuación (*7.4*):

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1-GH} = \frac{1}{1-K_1K_2/(s+p)} = \frac{s+p}{s+p-K_1K_2}$$

d) La relación de retroalimentación primaria está dada por la ecuación (*7.5*):

$$\frac{B}{R} = \frac{GH}{1-GH} = \frac{K_1K_2}{s+p-K_1K_2}$$

e) La ecuación característica está dada por el denominador de C/R, $s(s+p-K_1K_2) = 0$. En este caso, $1 - GH = s + p - K_1K_2 = 0$, la cual *no* es la ecuación característica porque el polo s de G se cancela con el cero s de H.

Transformaciones de los diagramas de bloques

7.10. Pruebe la equivalencia de los diagramas de bloques para la transformación 2 (sección 7.5).

La ecuación en la segunda columna, $Y = P_1X \pm P_2X$, rige para la construcción del diagrama de bloques de la tercera columna, tal como se muestra. Reescriba esta ecuación como $Y = (P_1 \pm P_2)X$. El diagrama de bloques equivalente en la última columna representa con claridad esta forma de la ecuación (figura 7-18)

Figura 7-18

7.11. Repita el problema 7.10 para la transformación 3.

Reescriba $Y = P_1X \pm P_2X$ como $Y = (P_1/P_2)P_2X \pm P_2X$. La figura 7-19 presenta con claridad el diagrama de bloques para esta forma de la ecuación.

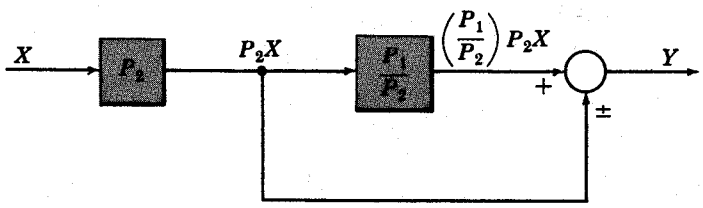


Figura 7-19

7.12. Repita el problema 7.10 para la transformación 5.

Tenemos $Y = P_1[X \mp P_2Y] = P_1P_2[(1/P_2)X \mp Y]$. En la figura 7-20 se presenta el diagrama de bloques para esta última forma.

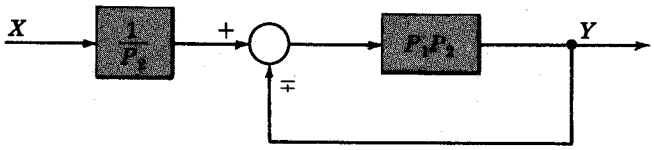


Figura 7-20

7.13. Repita el problema 7.10 para la transformación 7.

Tenemos $Z = PX \pm Y = P[X \pm (1/P)Y]$, que produce el diagrama de bloques que se da en la figura 7-21.

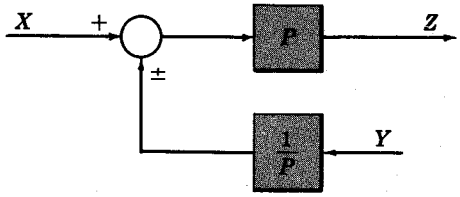


Figura 7-21

7.14. Repita el problema 7.10 para la transformación 8.

Tenemos $Z = P(X \pm Y) = PX \pm PY$, cuyo diagrama de bloques se presenta con claridad en la figura 7-22.

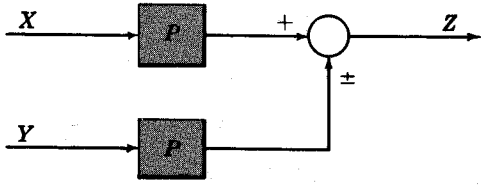


Figura 7-22

Sistemas con retroalimentación unitaria

7.15. Reduzca el diagrama de bloques que se da en la figura 7-23 a la forma con retroalimentación unitaria y encuentre la ecuación característica del sistema.

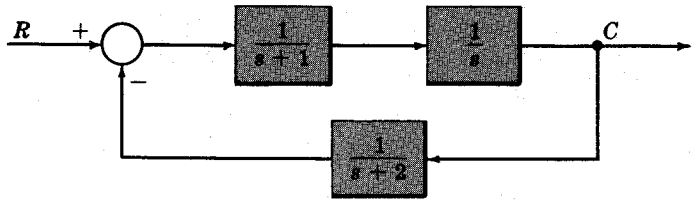


Figura 7-23

Combinando los bloques en la trayectoria directa se obtiene la figura 7-24.

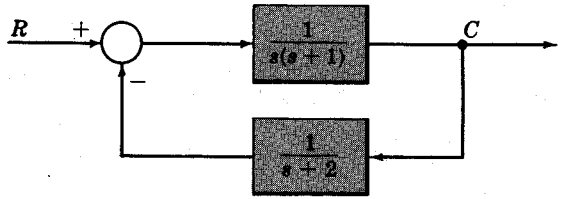


Figura 7-24

Aplicando la transformación 5, se tiene la figura 7-25.

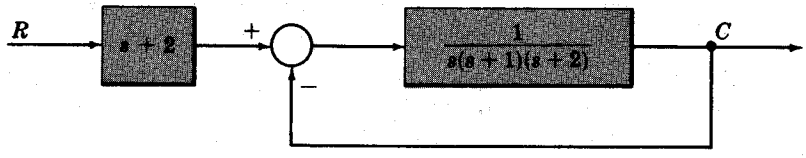


Figura 7-25

Mediante la ecuación (7.7) se obtiene que la ecuación característica de este sistema es $s(s + 1)(s + 2) + 1 = 0$ o $s^3 + 3s^2 + 2s + 1 = 0$.

Entradas y salidas múltiples

7.16. En la figura 7-26 determine la salida **C** debida a U_1, U_2 y R.

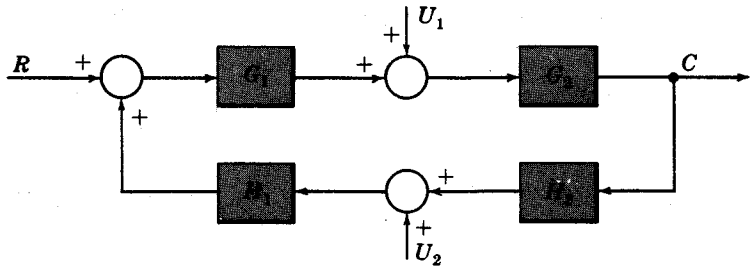


Figura 7-26

Hagamos $U_1 = U_2 = 0$. Después de combinar los bloques en cascada se obtiene la figura 7-27, en la cual C_R es la salida debida a R cuando ésta actúa sola. Aplicando la ecuación (*7.3*) a este sistema, $C_R = [G_1G_2/(1 - G_1G_2H_1H_2)]R$.

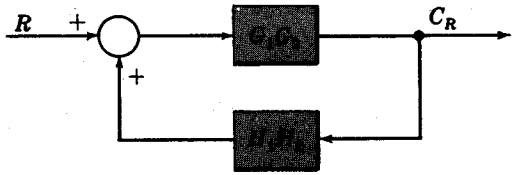


Figura 7-27

Ahora, hagamos $R = U_2 = 0$. El diagrama de bloques ahora se presenta en la figura 7-28, en el cual C_1 es la respuesta debida a U_1 cuando ésta actúa sola. Reordenando los bloques, tenemos la figura 7-29. A partir de la ecuación (*7.3*) se obtiene $C_1 = [G_2/(1 - G_1G_2H_1H_2)]U_1$.

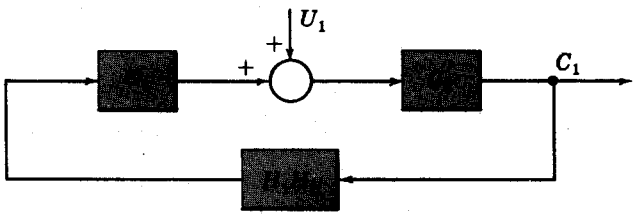


Figura 7-28

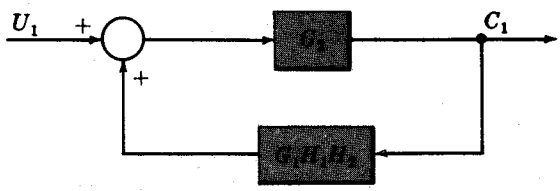


Figura 7-29

Finalmente, hagamos $R = U_1 = 0$. En la figura 7-30 se presenta el diagrama de bloques, en el cual C_2 es la respuesta debida a U_2 cuando ésta actúa sola. Reordenando los bloques se obtiene la figura 7-31. En consecuencia $C_2 = [G_1G_2H_1/(1 - G_1G_2H_1H_2]U_2$.

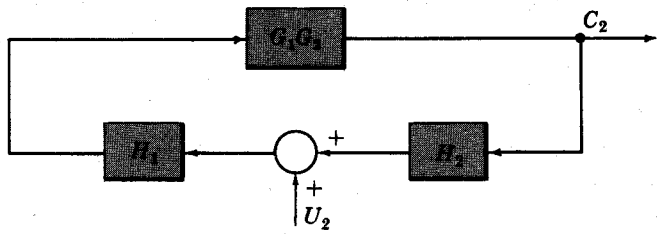


Figura 7-30

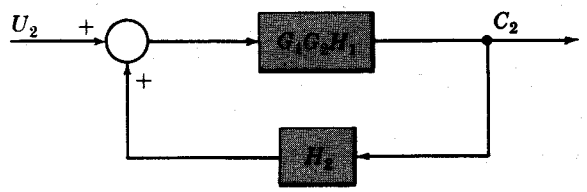


Figura 7-31

Por superposición, la salida total es

$$C = C_R + C_1 + C_2 = \frac{G_1G_2R + G_2U_1 + G_1G_2H_1U_2}{1 - G_1G_2H_1H_2}$$

7.17. La figura 7-32 es un ejemplo de sistema multientrada-multisalida. Determine C_1 y C_2 debidas a R_1 y a R_2.

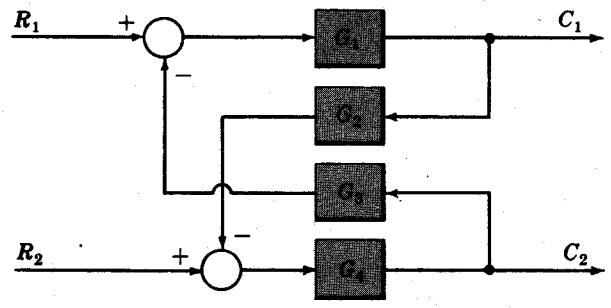


Figura 7-32

Primero expresamos el diagrama de bloques en la forma de la figura 7-33, sin tener en cuenta la salida C_2.

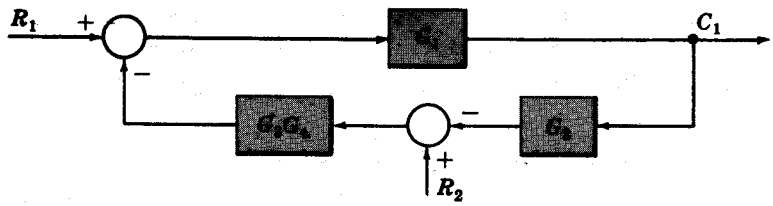


Figura 7-33

Haciendo $R_2 = 0$ y combinando los puntos de suma, se obtiene la figura 7-34.

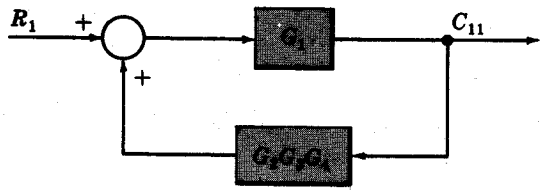


Figura 7-34

En consecuencia $C_{11} = G_1R_1/(1 - G_1G_2G_3G_4)$ es la salida en C_1 debida a R_1 sola. Para $R_1 = 0$ tenemos la figura 7-35.

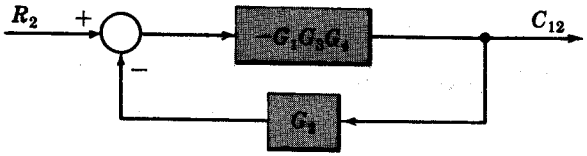


Figura 7-35

Entonces, $C_{12} = -G_1G_3G_4R_2/(1 - G_1G_2G_3G_4)$ es la salida en C_1 debida a R_2 sola. Por tanto $C_1 = C_{11} + C_{12} = (G_1R_1 - G_1G_3G_4R_2)/(1 - G_1G_2G_3G_4)$.

Ahora reducimos el diagrama de bloques original, pero ignoramos la salida C_1. Primero obtenemos la figura 7-36.

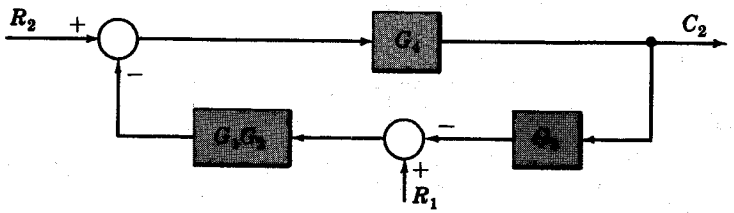


Figura 7-36

Luego se obtiene el diagrama de bloques que se presenta en la figura 7-37. Por tanto, $C_{22} = G_4R_2/(1 - G_1G_2G_3G_4)$. En seguida al hacer $R_2 = 0$, se obtiene la figura 7-38. Por tanto, $C_{21} = -G_1G_2G_4R_1/(1 - G_1G_2G_3G_4)$. Y finalmente, $C_2 = C_{22} + C_{21} = (G_4R_2 - G_1G_2G_4R_1)/(1 - G_1G_2G_3G_4)$.

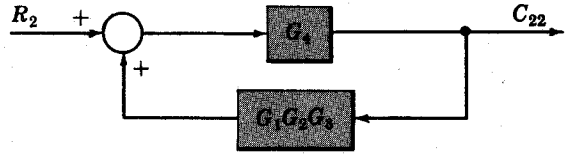


Figura 7-37

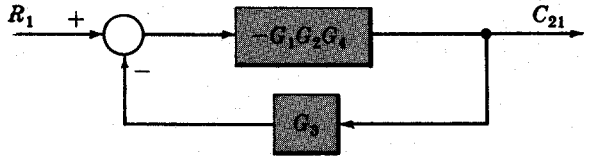


Figura 7-38

Reducción de diagramas de bloques

7.18. Reduzca a la forma canónica el diagrama de bloques que se da en la figura 7-39, y encuentre la transformada C de la salida. K es una constante.

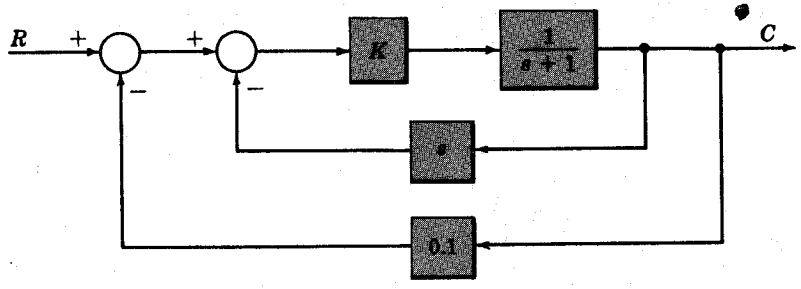


Figura 7-39

Primero combinamos los bloques en cascada de la trayectoria directa y aplicamos la transformación 4 a la malla de retroalimentación más interna para obtener la figura 7-40.

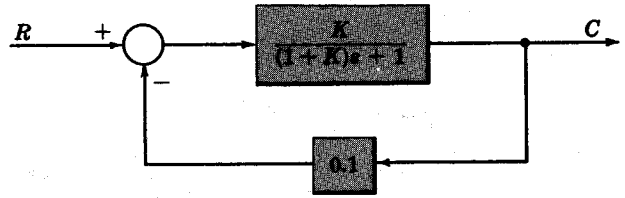


Figura 7-40

La ecuación (*7.3*) o la reaplicación de la transformación 4 produce $C = KR/[(1 + K)s + (1 + 0.1K)]$.

7.19. Reduzca el diagrama de bloques de la figura 7-39 a la forma canónica, aislando el bloque K en la malla directa.

Mediante la transformación 9 podemos mover el punto de toma adelante del bloque $1/(s + 1)$ (figura 7-41):

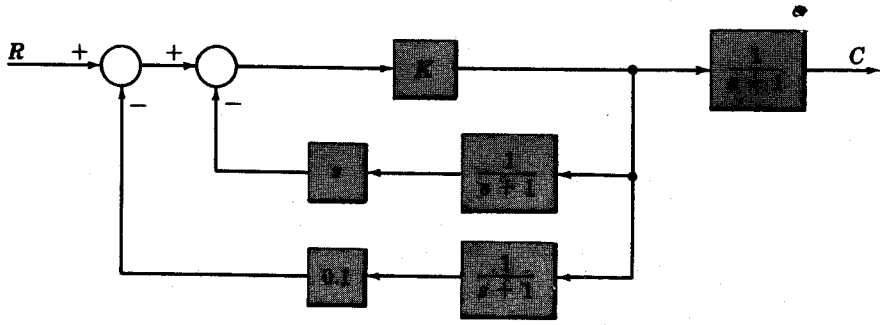


Figura 7-41

Aplicando las transformaciones 1 y 6*b*, se obtiene la figura 7-42.

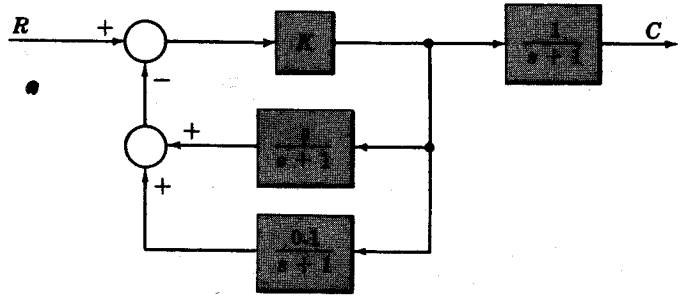


Figura 7-42

Ahora se puede aplicar la transformación 2 a las mallas de retroalimentación en la forma final que se da en la figura 7-43.

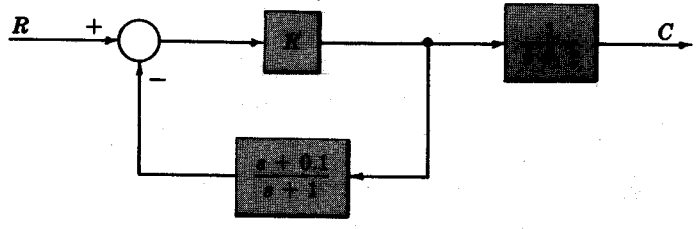


Figura 7-43

7.20. Reduzca a la forma de malla abierta el diagrama de bloques que se da en la figura 7-44.

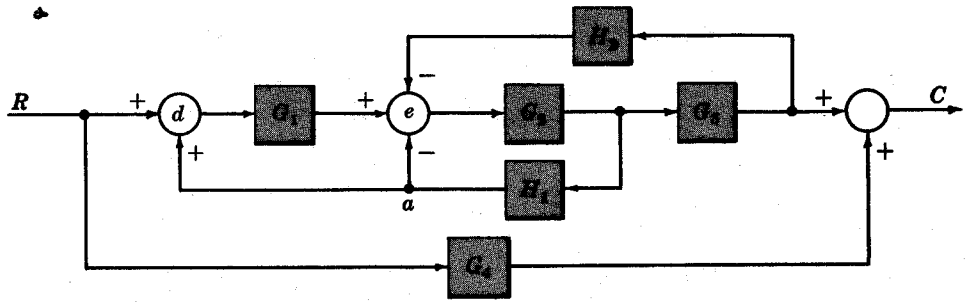


Figura 7-44

Primero, al mover el punto de suma de la izquierda más allá de G_1 (transformación 8), se obtiene la figura 7-45.

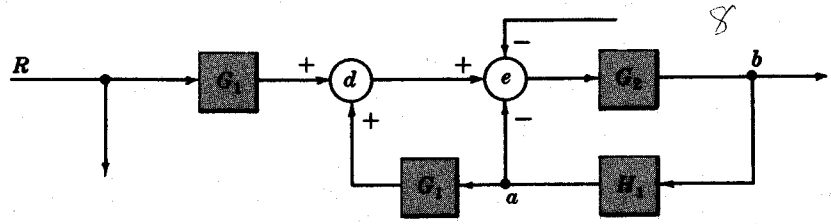


Figura 7-45

Luego se mueve el punto de toma a más allá de G_1 y se obtiene la figura 7-46.

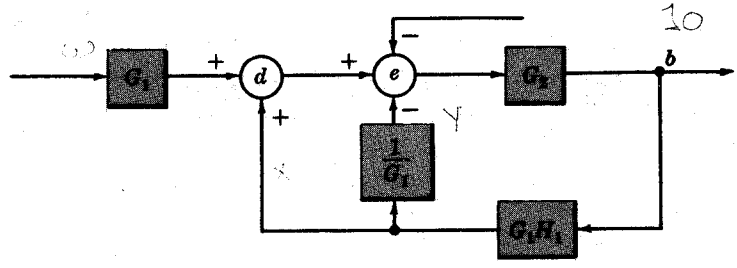


Figura 7-46

Ahora se utiliza la transformación 6*b* y luego la transformación 2 para combinar las dos mallas de retroalimentación inferiores de (G_1H_1) que entran en d y en e, y se obtiene la figura 7-47.

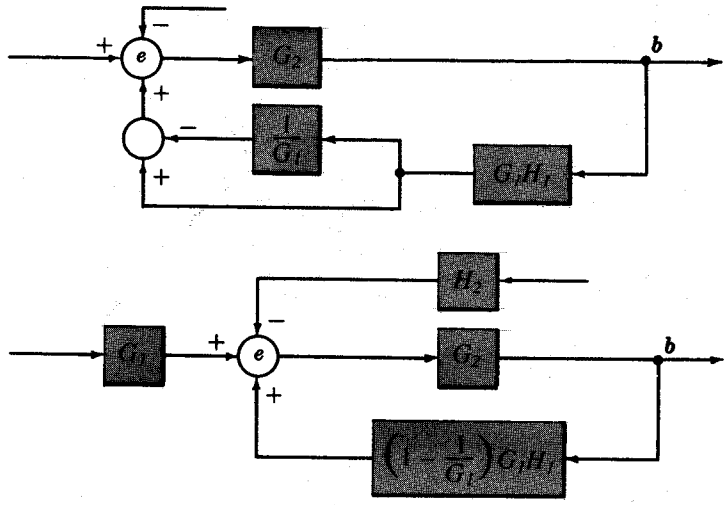
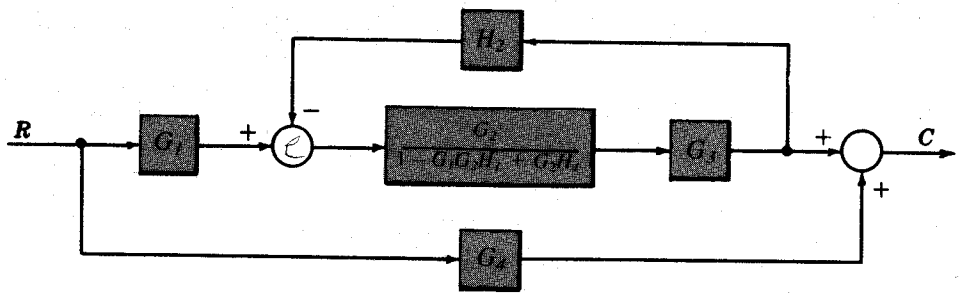
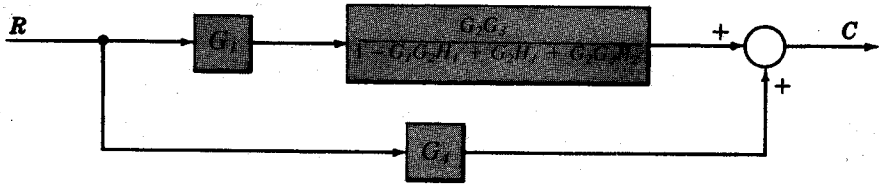


Figura 7-47

Al aplicar la transformación 4 a esta malla interna, el sistema se vuelve



Aplicando de nuevo la transformación 4 a la malla de retroalimentación restante, se produce



Finalmente, las transformaciones 1 y 2 dan el diagrama de bloques en malla abierta:

Problemas misceláneos

7.21 Demuestre que la transformación 1 de diagramas de bloques simple de la sección 7.5 (combinación de bloques en cascada) no es válida si el primer bloque es (o contiene) un *muestreador*.

En el problema 4.39 se determinó que la transformada $U^*(s)$ de la salida de un muestreador ideal es

$$U^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} u(kT)$$

Tomando a $U^*(s)$ como la entrada para el bloque P_2, de la transformación 1 de la tabla, la transformada $Y(s)$ de la salida del bloque P_2 es

$$Y(s) = P_2(s)U^*(s) = P_2(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-skT} u(kT)$$

Con claridad se ve que la transformada de entrada $X(s) = U(s)$ no se puede factorizar del lado derecho de $Y(s)$, es decir, $Y(s) \neq F(s)U(s)$. El mismo problema se presenta si P_1 incluye otros elementos del tipo de los muestreadores.

7.22. ¿Por qué es invariante la ecuación característica bajo las transformaciones de diagramas de bloques?

Las transformaciones de diagramas de bloques están determinadas por el *reordenamiento* de las ecuaciones de entrada-salida de uno o más de los subsistemas que constituyen el sistema total. En consecuencia, el sistema final transformado se rige por las mismas ecuaciones, probablemente ordenadas de forma distinta que en el sistema original.

Ahora bien, la ecuación característica está determinada por el denominador de la función de transferencia global del sistema que se iguala a cero. La factorización, o cualquier otro reordenamiento del numerador y del denominador de la función de transferencia del sistema, no la cambia ni la altera si el denominador se iguala a cero.

7.23. Pruebe que la función de transferencia representada por C/R en la ecuación (7.3) se puede aproximar a $\pm\ 1/H$ cuando $|G|$ o $|GH|$ son muy grandes.

Dividiendo el numerador y el denominador de $G/(1 \pm GH)$ por G se obtiene $1 \Big/ \left(\frac{1}{G} \pm H\right)$. Entonces

$$\lim_{|G|\to\infty} \left[\frac{C}{R}\right] = \lim_{|G|\to\infty} \left[\frac{1}{\frac{1}{G} \pm H}\right] = \pm \frac{1}{H}$$

Dividiendo por GH y tomando el límite, se obtiene

$$\lim_{|GH|\to\infty} \left[\frac{C}{R}\right] = \lim_{|GH|\to\infty} \left[\frac{\frac{1}{H}}{\frac{1}{GH} \pm 1}\right] = \pm \frac{1}{H}$$

7.24. Suponga que las características de G cambian radical o impredeciblemente durante la operación del sistema. Utilice los resultados del problema anterior y demuestre cómo se diseñaría el sistema de tal forma que la salida C se pueda predecir siempre razonablemente bien.

En el problema 7.23 se encontró que

$$\lim_{|GH|\to\infty}\left[\frac{C}{R}\right] = \pm\frac{1}{H}$$

Así $C \quad \pm R/H$ cuando $|GH| \quad \infty$ ó C es independiente de G para $|GH|$ grande. Entonces el sistema debe diseñarse de manera que $|GH| \gg 1$.

7.25. Determine la función de transferencia del sistema de la figura 7-48. Luego haga $H_1 = 1/G_1$ y $H_2 = 1/G_2$.

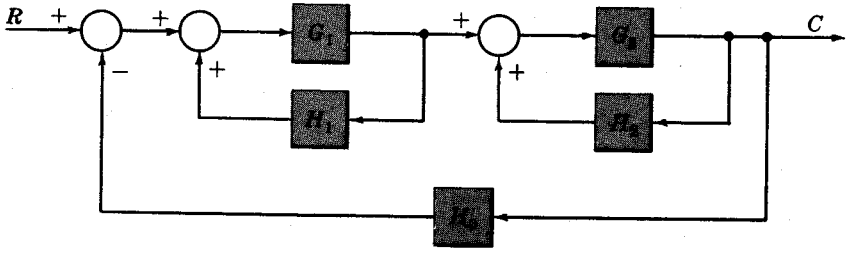


Figura 7-48

Reducimos las mallas interiores y obtenemos la figura 7-49.

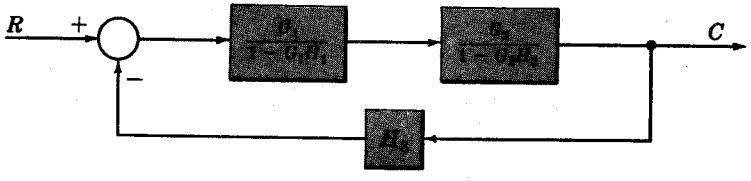


Figura 7-49

Aplicando de nuevo la transformación 4, obtenemos la figura 7-50.

Figura 7-50

Ahora, al poner $H_1 = 1/G_1$ y $H_2 = 1/G_2$, se produce

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{(1-1)(1-1) + G_1G_2H_3} = \frac{1}{H_3}$$

7.26. Demuestre que la figura 7-51 es válida.

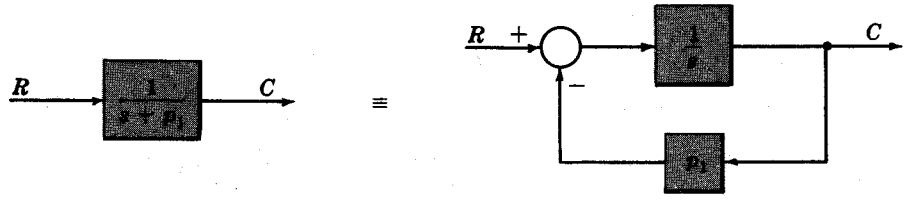


Figura 7-51

Del diagrama en malla abierta, tenemos $C = R/(s + p_1)$. Reordenando, $(s + p_1)C = R$ y $C = (1/s)(R - p_1C)$. El diagrama en malla cerrada se obtiene de esta ecuación.

7.27. Pruebe la figura 7-52.

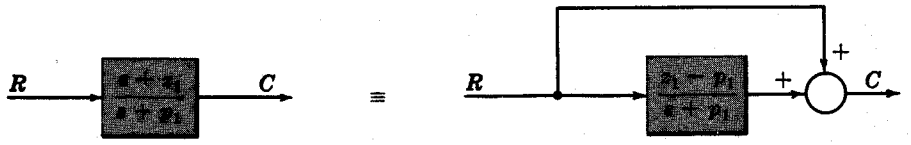


Figura 7-52

Este problema ilustra cómo un cero finito se puede remover de un bloque.

A partir del diagrama de malla directa, $C = R + (z_1 - p_1)R/(s + p_1)$. Reordenando,

$$C = \left(1 + \frac{z_1 - p_1}{s + p_1}\right)R = \left(\frac{s + p_1 + z_1 - p_1}{s + p_1}\right)R = \left(\frac{s + z_1}{s + p_1}\right)R$$

La equivalencia matemática prueba claramente la equivalencia de los diagramas de bloques.

7.28. Suponga que para cada bloque del sistema de oferta y demanda del problema 2.13 se pueden obtener aproximaciones lineales en forma de funciones de transferencia, y que tal sistema se puede representar por la figura 7-53.

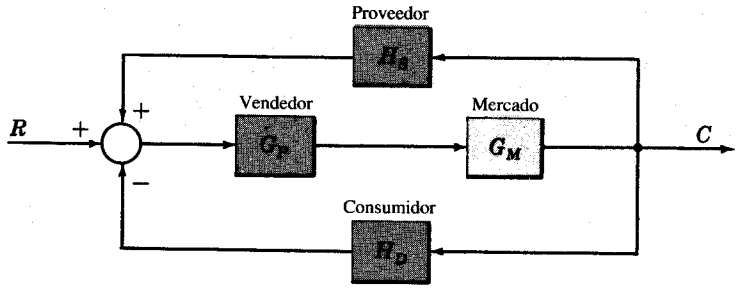


Figura 7-53

Determine la función de transferencia global del sistema.

Se aplica dos veces la transformación 4 a este diagrama de bloques y se obtiene la figura 7-54.

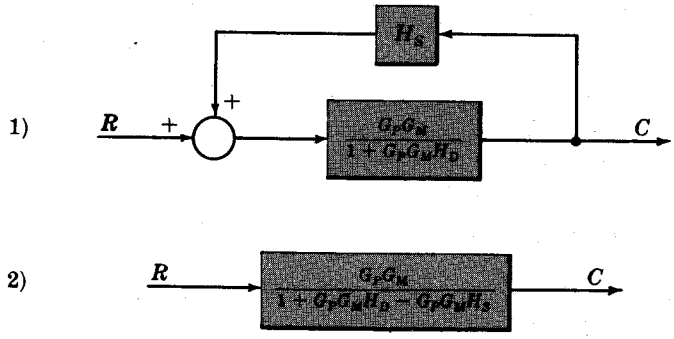


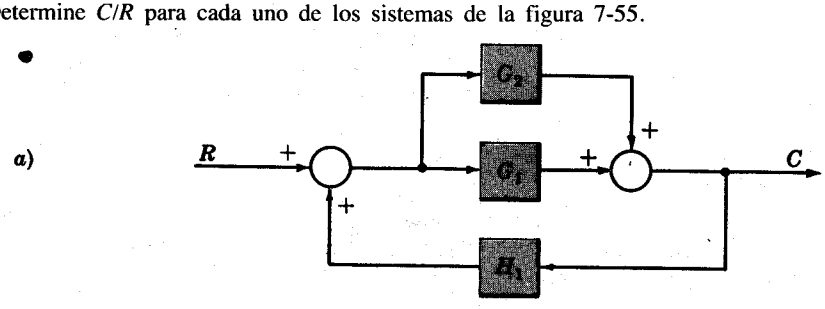
Figura 7-54

En consecuencia, la función de transferencia obtenida por aproximaciones lineales del modelo de oferta y demanda es:

$$\frac{G_P G_M}{1 + G_P G_M (H_D - H_S)}.$$

Problemas suplementarios

7.29. Determine C/R para cada uno de los sistemas de la figura 7-55.



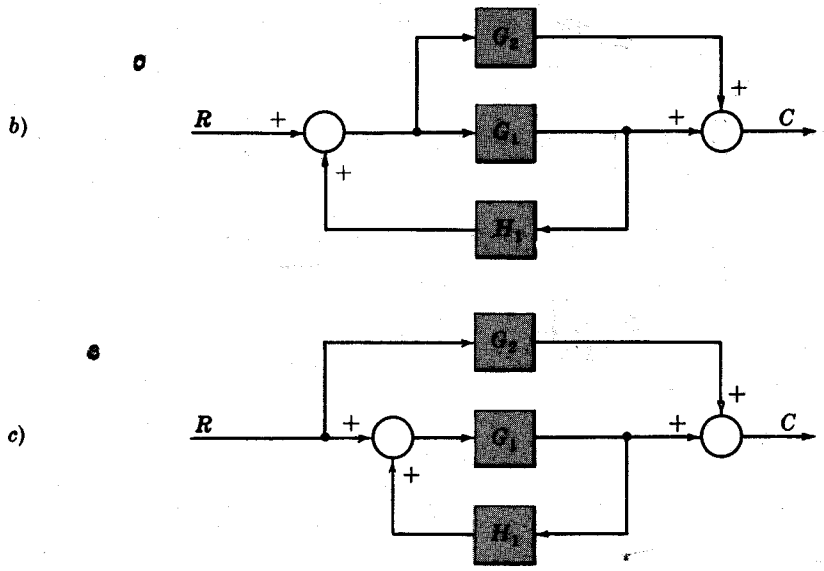


Figura 7-55

7.30. Considere el regulador de presión sanguínea descrito en el problema 2.14. Suponga que el centro vasomotor (CVM) se puede describir mediante la función de transferencia lineal $G_{11}(s)$ y los barorreceptores mediante la función de transferencia $k_{1s} + k_2$ (*véase* el problema 6.33). Transforme el diagrama de bloques de retroalimentación unitaria, en su forma más simple.

7.31. Reduzca la figura 7-56 a su forma canónica.

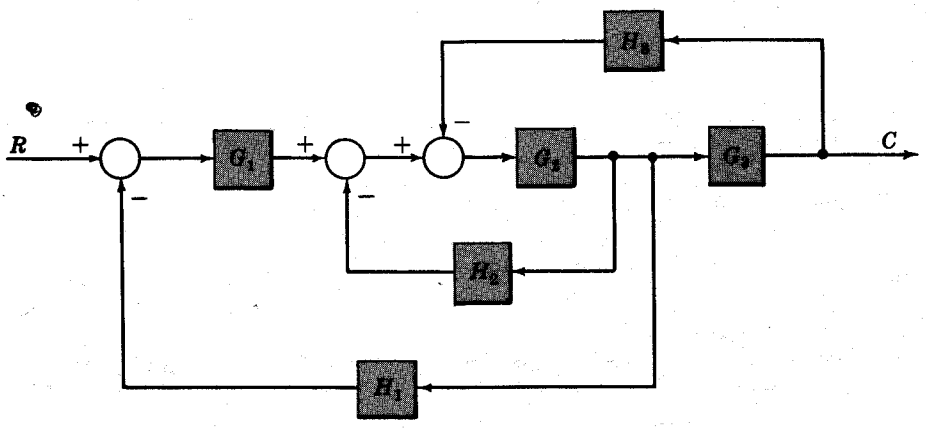


Figura 7-56

7.32. Determine C para el sistema representado por la figura 7-57.

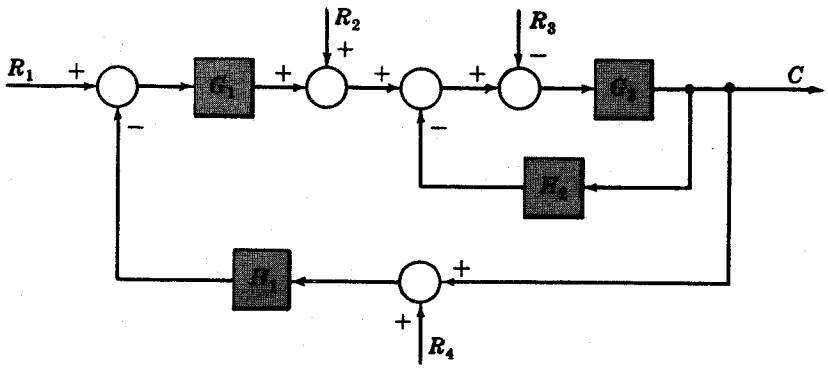


Figura 7-57

7.33 Dé un ejemplo de dos sistemas con retroalimentación en su forma canónica que tengan idénticas relaciones de control C/R, pero diferentes componentes G y H.

7.34. Determine C/R_2 para el sistema dado en la figura 7-58.

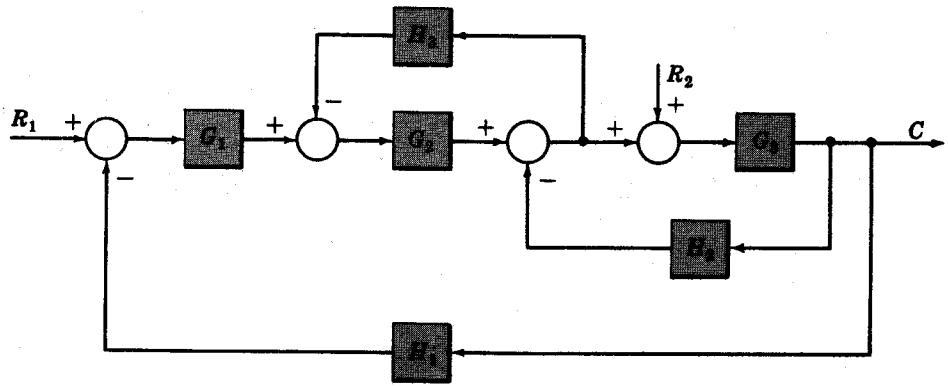


Figura 7-58

7.35. Determine la salida completa C, las entradas R_1 y R_2 actúan simultáneamente, para el sistema dado en el problema anterior.

7.36. Determine C/R para el sistema representado por la figura 7-59.

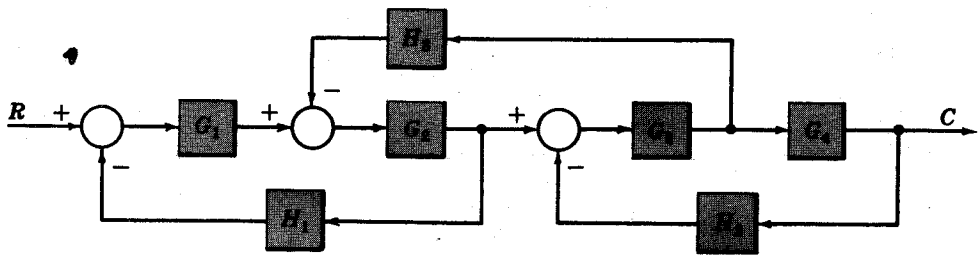


Figura 7-59

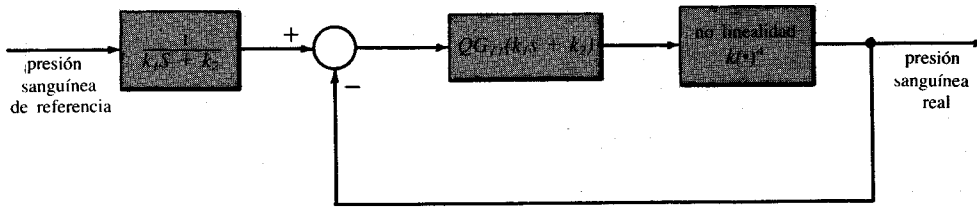
7.37. Determine la ecuación característica de cada uno de los sistemas de los problemas *a*) 7.32, *b*) 7.35, *c*) 7.36.

7.38. ¿Qué reglas de transformación de diagramas de bloques de la tabla de la sección 7.5 permiten la inclusión de un muestreador?

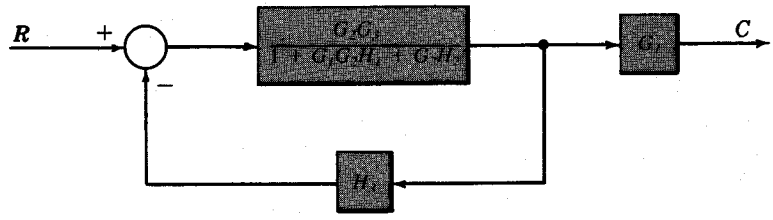
Respuestas a los problemas suplementarios

7.29. *Véase* el problema 8.15.

7.30.



7.31.



7.32. $$C = \frac{G_1G_2R_1 + G_2R_2 - G_2R_3 - G_1G_2H_1R_4}{1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1}$$

7.34. $$\frac{C}{R_2} = \frac{G_3(1 + G_2H_3)}{1 + G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$$

7.35. $$C = \frac{G_1G_2G_3R_1 + G_3(1 + G_2H_3)R_2}{1 + G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1}$$

7.36. $$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2G_3G_4}{(1 + G_1G_2H_1)(1 + G_3G_4H_2) + G_2G_3H_3}$$

7.37. *a*) $1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1 = 0$

b) $1 + G_3H_2 + G_2H_3 + G_1G_2G_3H_1 = 0$

c) $(1 + G_1G_2H_1)(1 + G_3G_4H_2) + G_2G_3H_3 = 0.$

7.38. Los resultados del problema 7.21 indican que cualquier transformación que involucre un *producto* de dos o más transformadas no es válida si se encuentra incluido un muestreador. Pero son válidos todos aquellos que simplemente involucren sumas o diferencias de señales, esto es, las transformaciones 6, 11 y 12. Cada una representa un reordenamiento simple de las señales como una suma lineal, y la adición es una operación conmutativa, aun para señales muestreadas, es decir $Z = X \pm Y = Y \pm X$.

Capítulo 8

Grafos de flujo de señales

8.1 Introducción

La representación gráfica de un sistema de control con retroalimentación más ampliamente usada es el diagrama de bloques que se presentó en los Capítulos 2 y 7. En este capítulo consideraremos otro modelo, el grafo de flujo de señales.

Un **grafo de flujo de señales** es una representación gráfica de las ecuaciones simultáneas que describen un sistema. Gráficamente muestra la transmisión de señales a través del sistema, como lo hace el diagrama de bloques. Pero es más fácil de dibujar y en consecuencia más fácil de manipular que un diagrama de bloques.

En las siguientes secciones se presentan las propiedades de los grafos de flujo de señales. El resto del capítulo trata de sus aplicaciones.

8.2 Fundamentos de los grafos de flujo de señales

Consideremos primero la ecuación simple

$$X_i = A_{ij} X_j \tag{8.1}$$

Las variables X_i y X_j pueden ser funciones de tiempo de la frecuencia compleja o de cualquier otra cantidad. Pueden aún ser constantes, las cuales son "variables" en el sentido matemático.

Para los grafos de flujo de señales, A_{ij} es un operador matemático que transforma a X_j en X_i y se llama **función de transmisión**. Por ejemplo, A_{ij} puede ser una constante, en cuyo caso X_i es una constante X_j veces en la ecuación (*8.1*); si X_i y X_j son funciones de s o de z, A_{ij} puede ser una función de transferencia $A_{ij}(s)$ o $A_{ij}(z)$.

En la figura 8-1 se presenta el grafo de flujo de señales para la ecuación (*8.1*). Esta es la forma más simple de un grafo de flujo de señales. Nótese que las variables X_i y X_j se representan por un pequeño punto llamado **nodo**, y la función de transmisión A_{ij} por una línea con una flecha llamada **rama.**

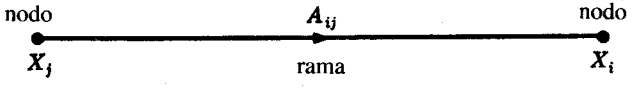


Figura 8-1

Cada variable en un grafo de flujo de señales se designa mediante un nodo, y toda función de transmisión mediante una rama. Las ramas siempre son unidireccionales. La flecha representa la dirección de flujo de la señal.

EJEMPLO 8.1. La ley de Ohm establece que $V = IR$, en donde V es un voltaje, I una corriente y R una resistencia. En la figura 8-2 se muestra la gráfica de flujo de señales para esta ecuación.

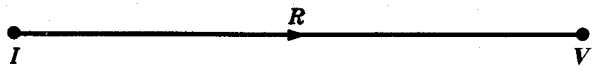


Figura 8-2

8.3. Algebra de los grafos de flujo de señales

1. La regla de la adición

El valor de la variable designada por un nodo es igual a la suma de todas las señales que entran en él. En otras palabras, la ecuación

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j$$

se representa por la figura 8-3.

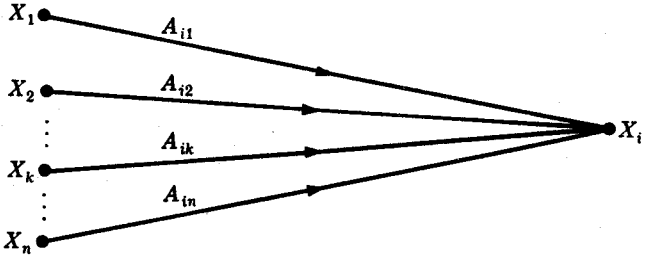


Figura 8-3

EJEMPLO 8.2. En la figura 8-4 se muestra el grafo de flujo de señales para la ecuación de una línea, $Y = mX + b$, en el sistema de coordenadas rectangulares. Puesto que b, la intersección con el eje Y, es una constante; ésta puede representar un nodo (variable) o una función de transmisión.

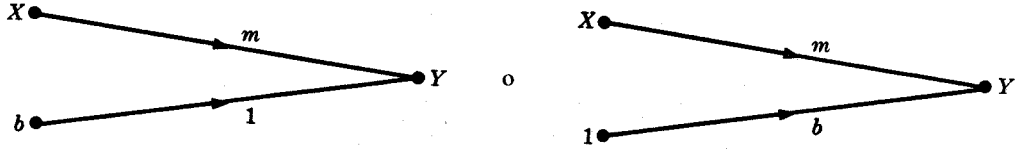


Figura 8-4

2. La regla de transmisión

El valor de la variable designada por un nodo se transmite en todas las ramas que parten de él. En otras palabras, la ecuación

$$X_i = A_{ik} X_k \qquad i = 1, 2, \ldots, n,\ k \text{ fijo}$$

se representa por la figura 8-5.

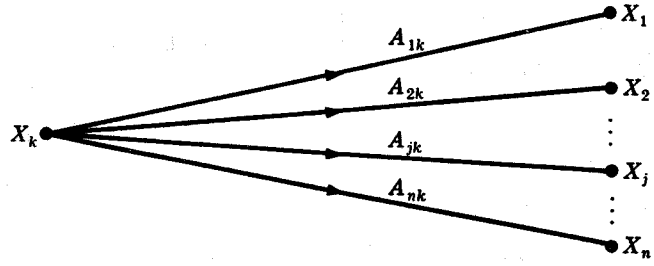


Figura 8-5

EJEMPLO 8.3. En la figura 8-6 se muestra el grafo de flujo de señales de las ecuaciones simultáneas $Y = 3X$, $Z = -4X$.

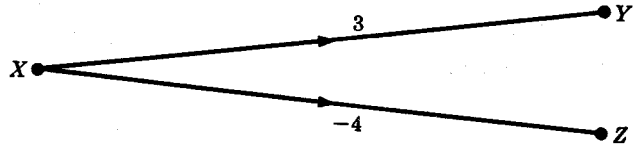


Figura 8-6

3. La regla de la multiplicación

Una conexión en cascada (en serie) de $n - 1$ ramas con funciones de transmisión A_{21}, A_{32}, $A_{43}, \ldots, A_{n(n-1)}$ puede remplazarse por una sola rama con una nueva función de transmisión igual al producto de todas las ramas. Esto es,

$$X_n = A_{21} \cdot A_{32} \cdot A_{43} \cdots A_{n(n-1)} \cdot X_1$$

La figura 8-7 representa la equivalencia en grafos de flujo de señales.

Figura 8-7

EJEMPLO 8.4. En la figura 8-8 se presenta el grafo de flujo de señales para las ecuaciones simultáneas $Y = 10X$, $Z = -20Y$.

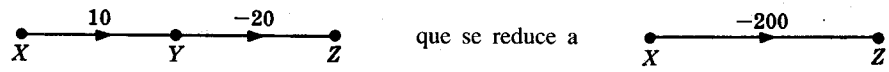


Figura 8-8

8.4 Definiciones

Con frecuencia se emplea la siguiente terminología en la teoría de grafos de flujo de señales. Los ejemplos asociados con cada definición hacen referencia a la figura 8-9.

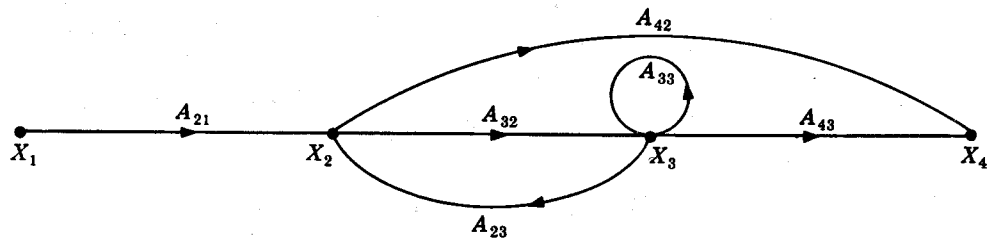


Figura 8-9

Definición 8.1: Una **trayectoria** es una sucesión continua unidireccional de ramas a lo largo de las cuales no se pasa un nodo más de una vez. Por ejemplo, X_1 a X_2 a X_3 a X_4, X_2 a X_3 y de nuevo a X_2, y X_1 a X_2 a X_4 son trayectorias.

Definición 8.2: Un **nodo de entrada** o **fuente** es aquel desde el cual solamente salen ramas. Por ejemplo, X_1 es un nodo de entrada.

Definición 8.3: Un **nodo de salida** o **sumidero** es aquel al cual solamente llegan ramas. Por ejemplo, X_4 es un nodo de salida.

Definición 8.4: Una **trayectoria directa** es una trayectoria de un nodo de entrada a un nodo de salida. Por ejemplo, X_1 a X_2 a X_3 a X_4, y X_1 a X_2 a X_4, son trayectorias directas.

Definición 8.5: Una **trayectoria de retroalimentación** o **malla de retroalimentación** es aquella que se origina y termina en el mismo nodo. Por ejemplo, X_2 a X_3 y de nuevo a X_2 es una trayectoria de retroalimentación.

Definición 8.6: Una **auto-malla** es una malla de retroalimentación que consta de una sola rama. Por ejemplo, A_{33} es una auto-malla.

Definición 8.7: La **ganancia** de una rama es la función de transmisión de esa rama, cuando la función de transmisión es un operador multiplicativo. Por ejemplo, A_{33} es la ganancia de la auto-malla, si A_{33} es una constante o una función de transferencia.

Definición 8.8: La **ganancia de la trayectoria** es el producto de las ganancias de rama encontradas a lo largo de una trayectoria. Por ejemplo, la ganancia de la trayectoria directa de X_1 a X_2 a X_3 a X_4 es $A_{21}A_{32}A_{43}$.

Definición 8.9: La **ganancia de malla** es el producto de las ganancias de rama de la malla. Por ejemplo, la ganancia de malla, en la malla de retroalimentación de X_2 a X_3 y de regreso a X_2 es $A_{32}A_{23}$.

Muy a menudo, una variable en un sistema es función de la variable de salida. El sistema canónico retroalimentado es un ejemplo obvio. En este caso, si el grafo de flujo de señales se dibujara directamente a partir de las ecuaciones, el "nodo de salida" necesitaría una rama saliente, contrario a la definición. Este problema puede remediarse agregando una rama con una función de transmisión de unidad que entre a un nodo "hipotético". Por ejemplo, los dos grafos de la figura 8-10 son equivalentes, y Y_4 es un nodo de salida. Nótese que $Y_4 = Y_3$.

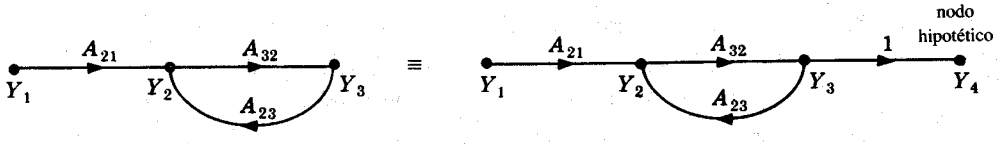


Figura 8-10

8.5 Construcción de grafos de flujo de señales

El grafo de flujo de señales de un sistema de control lineal con retroalimentación cuyos componentes se especifican mediante funciones de transferencia no interactivas, puede construirse mediante referencia directa al diagrama de bloques del sistema. Cada variable del diagrama de bloques se convierte en un nodo, y cada bloque será una rama.

EJEMPLO 8.5. En la figura 8-11 se presenta el diagrama de bloques del sistema de control canónico retroalimentado.

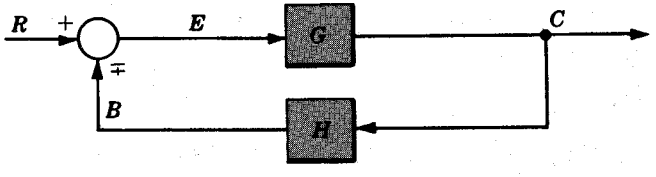


Figura 8-11

El grafo de flujo de señales puede construirse fácilmente a partir de la figura 8-11. Nótese que los signos − o + en los puntos de suma están asociados con H.

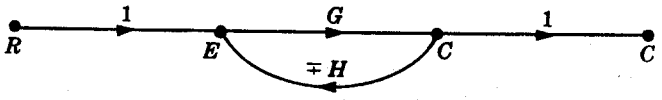


Figura 8-12

El grafo de flujo de señales de un sistema descrito por un conjunto de ecuaciones simultáneas puede construirse en la siguiente forma general.

1. Escriba el sistema de ecuaciones en la forma

$$X_1 = A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \cdots + A_{1n}X_n$$

$$X_2 = A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \cdots + A_{2n}X_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_m = A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \cdots + A_{mn}X_n$$

   Si X_1 es un nodo de entrada no se necesita de una ecuación para X_1

2. Ordene los m ó n (el mayor de los dos) nodos de izquierda a derecha. Los nodos pueden reordenarse si las mallas requeridas más tarde parecen demasiado engorrosas.
3. Conecte los nodos por medio de las ramas apropiadas A_{11}, A_{12}, etc.
4. Si el nodo de salida deseado tiene ramas que surgen de él, agregue un nodo hipotético y una rama de ganancia unitaria.
5. Reordene los nodos y/o las mallas en el grafo para lograr la máxima claridad gráfica.

EJEMPLO 8.6. Construyamos un grafo de flujo de señales para la red simple de resistencias dada en la figura 8-13. Allí hay cinco variables v_1, v_2, v_3, i_1 e i_2. Se conoce v_1. Podemos escribir cuatro ecuaciones independientes a partir de las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff. Procediendo en el esquema de izquierda a derecha, tenemos

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}\right)v_2 \qquad v_2 = R_3 i_1 - R_3 i_2 \qquad i_2 = \left(\frac{1}{R_2}\right)v_2 - \left(\frac{1}{R_2}\right)v_3 \qquad v_3 = R_4 i_2$$

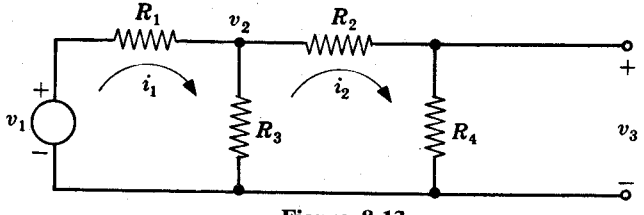


Figura 8-13

Colocando los cinco nodos en el mismo orden con v_1 como nodo de entrada, y conectando los nodos con las ramas apropiadas, obtenemos la figura 8-14. Si deseamos considerar a v_3 como nodo de salida, debemos agregar una rama de ganancia unitaria y otro nodo, produciendo la figura 8-15. No es necesario reordenar los demás nodos. Tenemos en clara evidencia, una trayectoria directa y tres mallas de retroalimentación.

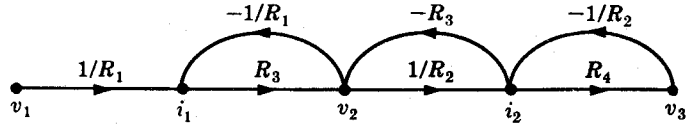


Figura 8-14

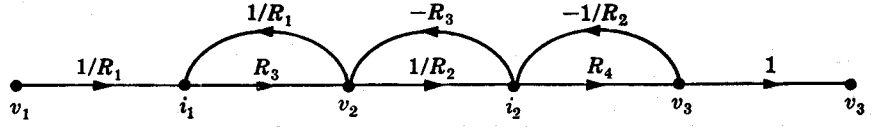


Figura 8-15

Nótese que la representación de ecuaciones mediante grafos de flujo de señales no es única. Por ejemplo, la adición de la rama de ganancia unitaria, seguida del nodo hipotético cambia el grafo, pero no las ecuaciones que representa.

8.6 La fórmula general de ganancia entrada-salida

En el Capítulo 7 encontramos que puede reducirse un diagrama de bloques complicado a la forma canónica, a partir de la cual puede escribirse fácilmente la relación de control como

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

Es posible simplificar los grafos de flujo de señales de un modo similar a como se hizo la reducción de los diagramas de bloques. Pero también es posible, y consume mucho menos tiempo, escribir la relación de entrada-salida *por inspección* del grafo de flujo de señales original. Esto puede realizarse utilizando la fórmula que se dará luego. Esta fórmula también puede aplicarse directamente a los diagramas de bloques, pero la representación en grafos de flujo de señales es más fácil de leer, especialmente cuando los diagramas de bloques son muy complicados.

Representemos mediante T, la razón de la variable de entrada a la variable de salida. Para sistemas lineales de control con retroalimentación, $T = C/R$. Para el grafo general de flujo de señales presentado en los parágrafos anteriores $T = X_n/X_1$, en donde X_n es la salida y X_1 es la entrada.

La fórmula general para cualquier grafo de flujo de señales es

$$T = \frac{\Sigma_i P_i \Delta_i}{\Delta} \qquad (8.2)$$

en donde P_i = la ganancia de la i-ésima trayectoria directa

P_{jk} = el j-ésimo producto posible de las ganancias de las k mallas que no se toquen

$$\Delta = 1 - (-1)^{k+1} \sum_k \sum_j P_{jk}$$

$$= 1 - \sum_j P_{j1} + \sum_j P_{j2} - \sum_j P_{j3} + \cdots$$

= 1 − (la suma de todas las ganancias de malla) + (la suma de todos los productos de las ganancias de dos mallas que no se toquen) − (la suma de todos los productos de las ganancias de tres mallas que no se toquen) + ⋯

Δ_i = Δ evaluada eliminando todas las mallas que toquen a P_i

Se dice que dos mallas, dos trayectorias o una malla y una trayectoria **no se tocan** si no tienen nodos en común.

Δ se llama **determinante del grafo de flujos de señales** o **función característica**, puesto que $\Delta = 0$ es la ecuación característica del sistema.

La aplicación de la ecuación (*8.2*) es considerablemente más sencilla de lo que parece. Los siguientes ejemplos ilustran este punto.

EJEMPLO 8.7. Apliquemos primero la ecuación (*8.2*) al grafo de flujo de señales del sistema canónico retroalimentado (figura 8-16).

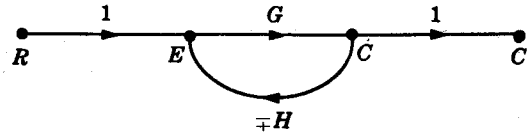


Figura 8-16

Aquí sólo hay una trayectoria directa; en consecuencia

$$P_1 = G$$
$$P_2 = P_3 = \cdots = 0$$

Hay solamente una malla (de retroalimentación). Por tanto,

$$P_{11} = \mp GH$$
$$P_{jk} = 0 \qquad j \neq 1 \qquad k \neq 1$$

Entonces

$$\Delta = 1 - P_{11} = 1 + GH \qquad \text{y} \qquad \Delta_1 = 1 - 0 = 1$$

Finalmente,

$$T = \frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

EJEMPLO 8.8. En la figura 8-17 se presenta el grafo de flujo de señales de la red de resistencias del ejemplo 8.6. Apliquemos la ecuación (8.2) a este grafo y determinemos la ganancia de voltaje $T = v_3/v_1$ para la red de resistencias.

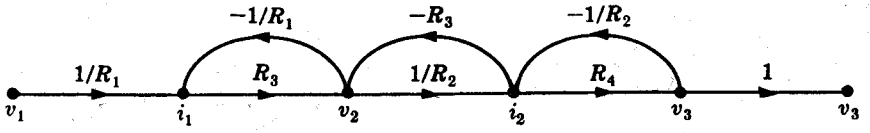


Figura 8-17

Hay una trayectoria directa (figura 8-18). Por tanto, la ganancia de esta última es

$$P_1 = \frac{R_3R_4}{R_1R_2}$$

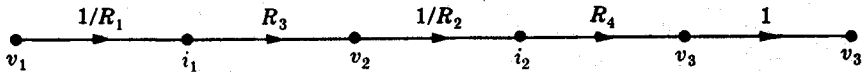


Figura 8-18

Hay tres mallas de retroalimentación (figura 8-19). En consecuencia, las ganancias de las mallas son

$$P_{11} = -\frac{R_3}{R_1} \qquad P_{21} = -\frac{R_3}{R_2} \qquad P_{31} = -\frac{R_4}{R_2}$$

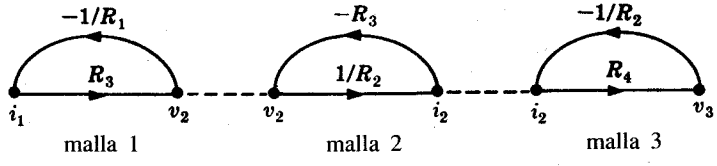


Figura 8-19

Las mallas 1 y 3 no se tocan. Por tanto

P_{12} = producto de las ganancias de las dos únicas mallas que no se tocan $= P_{11} \cdot P_{31} = \dfrac{R_3R_4}{R_1R_2}$

No hay tres mallas que no se toquen. Entonces

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + P_{12} = 1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2}$$
$$= \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}{R_1 R_2}$$

Puesto que todas las mallas tocan la trayectoria directa, $\Delta_1 = 1$. Finalmente

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{R_3 R_4}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_1 R_4 + R_2 R_3 + R_3 R_4}$$

8.7 Cálculo de la función de transferencia de componentes en cascada

Los efectos de carga de componentes que interactúan, requieren alguna atención especial cuando se usan grafos de flujo de señales. Combine los grafos de los componentes en sus puntos de unión normales (nodo de salida de uno con el nodo de entrada del otro), tenga en cuenta la carga al agregar nuevas mallas en los nodos unidos y calcule la ganancia total utilizando la ecuación (8.2). Este procedimiento se ilustra mejor en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8.9. Suponga que dos redes idénticas de resistencias se unen en cascada y se usan como elementos de control en la malla directa de un sistema de control. Las redes son simples divisores de voltaje de la forma dada en la figura 8-20.

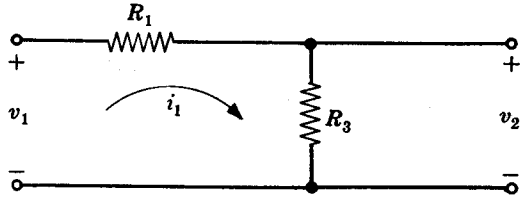


Figura 8-20

Las dos ecuaciones independientes para esta red son

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1}\right) v_1 - \left(\frac{1}{R_1}\right) v_2 \qquad \text{y} \qquad v_2 = R_3 i_1$$

El grafo de flujo de señales puede dibujarse fácilmente (figura 8-21). Por inspección, la ganancia de esta red es igual a

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{R_3}{R_1 + R_3}$$

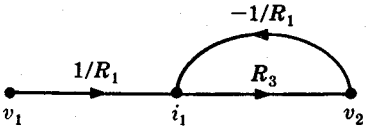


Figura 8-21

Si ignoramos la carga, la ganancia total de las dos redes en cascada se determina simplemente multiplicando las ganancias individuales:

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{R_3^2}{R_1^2 + R_3^2 + 2R_1R_3}$$

Esta respuesta es incorrecta. Probamos esto de la siguiente manera. Cuando las dos redes idénticas se unen en cascada, notamos que el resultado es equivalente a la red del ejemplo 8.6, con $R_2 = R_1$ y $R_4 = R_3$ (figura 8-22).

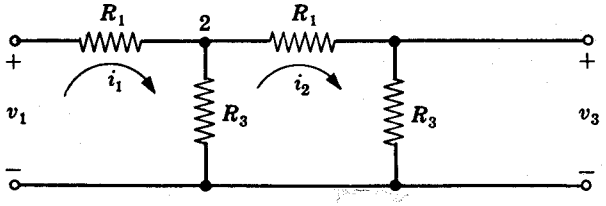


Figura 8-22

El grafo de flujo de señales de esta red también se determinó en el ejemplo 8.6 (figura 8-23).

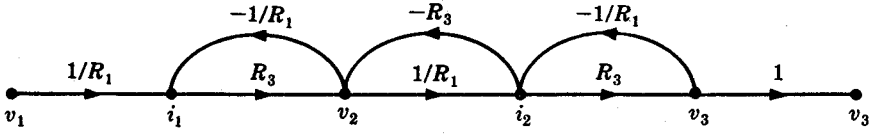


Figura 8-23

Observamos que la rama de retroalimentación $-R_3$, en la figura 8-23, no aparece en el grafo de flujo de señales de las redes individuales conectadas del nodo v_2 al v'_1 (figura 8-24). Esto significa que como resultado de la conexión de las dos redes, la segunda red carga a la primera, cambiando la ecuación para v_2 de

$$v_2 = R_3 i_1 \qquad \text{a} \qquad v_2 = R_3 i_1 - R_3 i_2$$

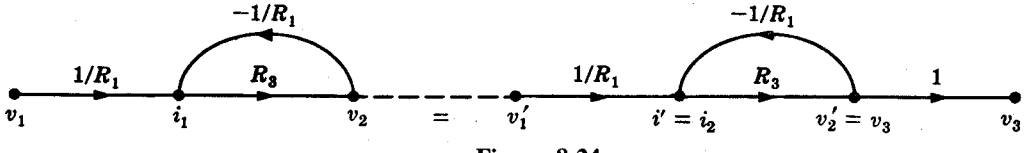


Figura 8-24

Este resultado también se pudo haber obtenido escribiendo de manera directa las ecuaciones para las redes combinadas. En este caso, únicamente habría cambiado la forma de la ecuación para v_2.

La ganancia de las redes combinadas se determinó en el ejemplo 8.8 como

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{R_3^2}{R_1^2 + R_3^2 + 3R_1R_3}$$

cuando R_2 se hace igual a R_1, y R_4 se hace igual a R_3. Observamos que

$$\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \frac{R_3^2}{R_1^2 + R_3^2 + 2R_1R_3} \neq \frac{v_3}{v_1}$$

En general, es una buena práctica calcular la ganancia de redes en cascada directamente del grafo de flujo de señales *combinado*. La mayor parte de los componentes de sistemas de control se cargan entre sí cuando se conectan en serie.

8.8 Reducción de diagramas de bloques utilizando grafos de flujo de señales y la fórmula general de ganancia entrada-salida

A menudo, el modo más fácil de determinar la relación de control de un diagrama de bloques complicado es trasladarlo a un grafo de flujo de señales y aplicar la ecuación (*8.2*). Los puntos de toma y los de suma deben separarse mediante una rama de ganancia unitaria en el grafo de flujo de señales, cuando se utiliza la ecuación (*8.2*).

Si se desean los elementos G y H de la representación canónica retroalimentada de la ecuación (*8.2*) también proporciona esta información. La función de transferencia directa es

$$G = \sum_i P_i \Delta_i \qquad (8.3)$$

La función de transferencia de malla es

$$GH = \Delta - 1 \qquad (8.4)$$

Las ecuaciones (*8.3*) y (*8.4*) se resuelven simultáneamente para G y para H, y la función canónica retroalimentada se dibuja a partir del resultado.

EJEMPLO 8.10. Determinemos la relación de control C/R y el diagrama de bloques canónico del sistema de control con retroalimentación, del ejemplo 7.9 (figura 8-25).

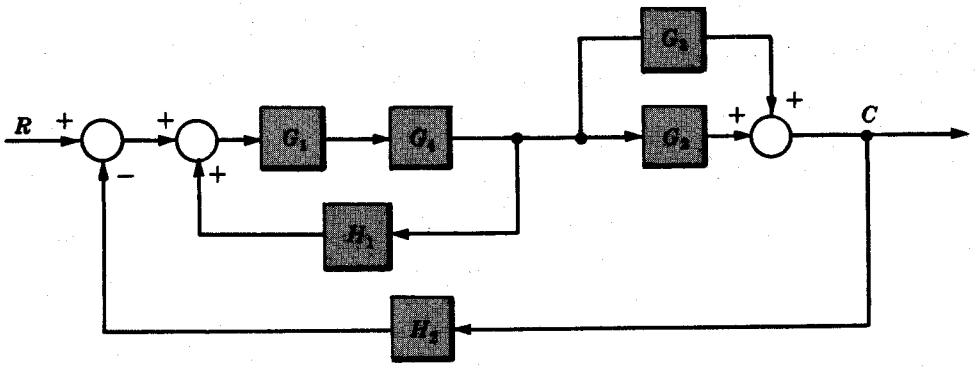


Figura 8-25

El grafo de flujo de señales se da en la figura 8-26. Hay dos trayectorias directas:

$$P_1 = G_1G_2G_4 \qquad P_2 = G_1G_3G_4$$

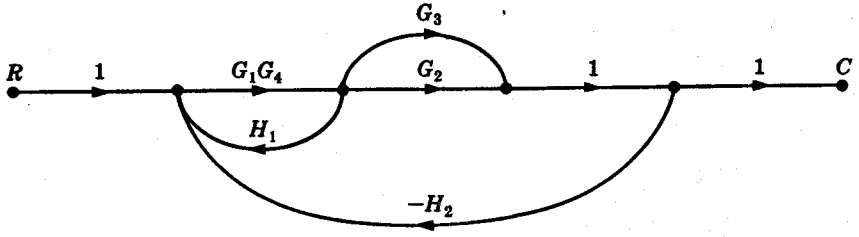


Figura 8-26

Hay tres mallas de retroalimentación:

$$P_{11} = G_1G_4H_1 \qquad P_{21} = -G_1G_2G_4H_2 \qquad P_{31} = -G_1G_3G_4H_2$$

Todas las mallas se tocan, y además tocan ambas trayectorias directas; entonces

$$\Delta_1 = 1 \qquad \Delta_2 = 1$$

En consecuencia la relación de control es

$$T = \frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_4 + G_1G_3G_4}{1 - G_1G_4H_1 + G_1G_2G_4H_2 + G_1G_3G_4H_2}$$

$$= \frac{G_1G_4(G_2 + G_3)}{1 - G_1G_4H_1 + G_1G_2G_4H_2 + G_1G_3G_4H_2}$$

A partir de las ecuaciones (*8.3*) y (*8.4*), tenemos

$$G = G_1G_4(G_2 + G_3) \qquad \text{y} \qquad GH = G_1G_4(G_3H_2 + G_2H_2 - H_1)$$

En consecuencia

$$H = \frac{GH}{G} = \frac{(G_2 + G_3)H_2 - H_1}{G_2 + G_3}$$

La figura 8-27 presenta el diagrama de bloques canónico.

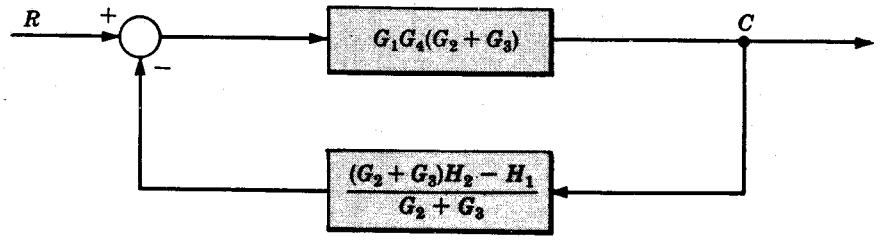


Figura 8-27

El signo negativo en el punto de suma para la malla de retroalimentación resulta de usar un signo positivo para GH en la fórmula anterior. Si esto no resulta obvio, remítase a la ecuación (*7.3*) y a su explicación en la sección 7.4.

El diagrama de bloques anterior puede plantearse en la forma final de los ejemplos 7.9 ó 7.10 utilizando los teoremas de transformación de la sección 7.5.

Problemas resueltos

Definiciones y álgebra de los grafos de flujo de señales

8.1. Simplifique los grafos de flujo de señales que se dan en la figura 8-28.

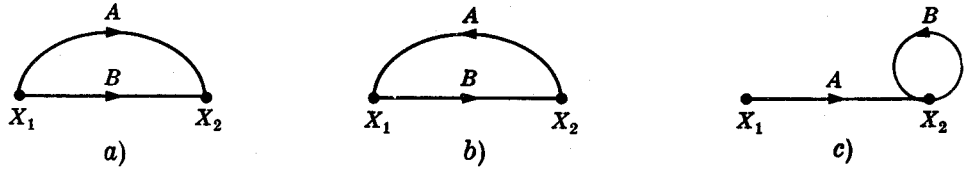
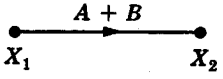
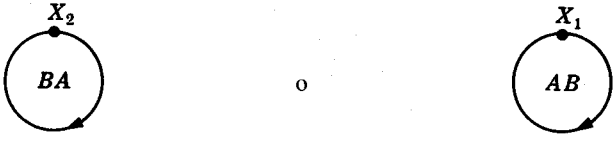


Figura 8-28

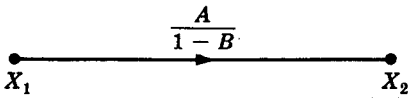
a) Claramente $X_2 = AX_1 + BX_1 = (A + B)X_1$. En consecuencia tenemos



b) Tenemos $X_2 = BX_1$ y $X_1 = AX_2$. Por tanto $X_2 = BAX_2$ o $X_1 = ABX_1$, lo cual produce



c) Si A y B son operadores multiplicativos (por ejemplo, constantes o funciones de transferencia), tenemos $X_2 = AX_1 + BX_2 = (A/(1 - B))X_1$. En consecuencia el grafo de flujo de señales será



8.2. Dibuje los grafos de flujo de señales para los diagramas de bloques del problema 7.3, y redúzcalos por la regla de la multiplicación (figura 8-29).

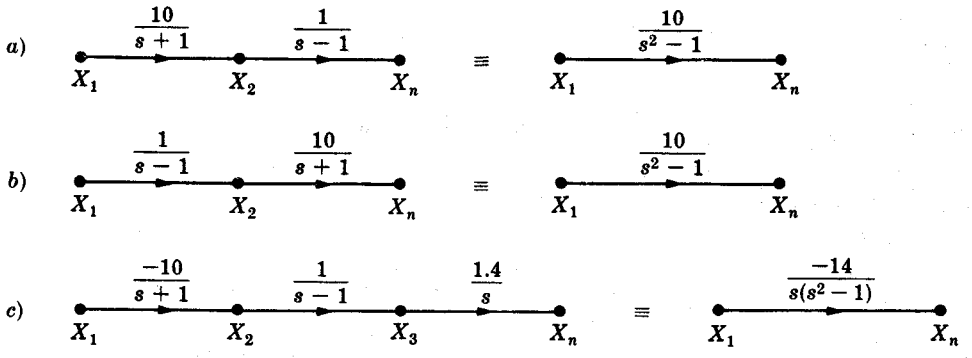


Figura 8-29

8.3. Considere el grafo de flujo de señales de la figura 8-30.

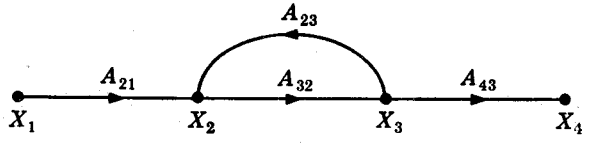


Figura 8-30

a) Dibuje el grafo de flujo de señales para el sistema equivalente al dibujado en la figura 8-30, pero con X_3 igual kX_3 (con k constante), y X_1 X_2 y X_4 permanecen iguales.

b) Repita la parte *a)* para el caso en el cual X_2 y X_3 se hacen k_2X_2 y k_3X_3, y X_1 y X_4 permanecen iguales (k_2 y k_3 son constantes).

Este problema ilustra los fundamentos de una técnica que puede utilizarse para *cambiar la escala* de las variables.

a) Para que el sistema permanezca igual cuando una variable de un nodo se multiplica por una constante, todas las señales que entran al nodo deben multiplicarse por la misma constante, y todas las que salen deben dividirse por esa constante. Puesto que X_1, X_2 y X_4 deben permanecer iguales, se modifican las *ramas* (figura 8-31).

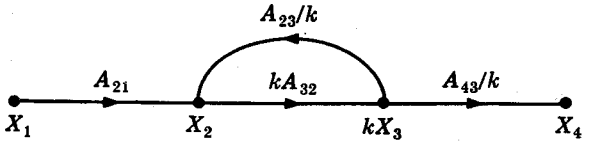


Figura 8-31

b) Se sustituye k_2X_2 por X_2, y k_3X_3 por X_3 (figura 8-32).

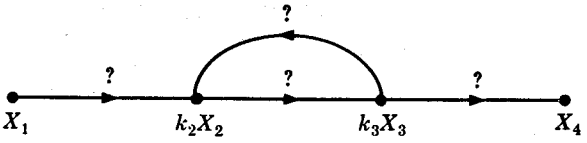


Figura 8-32

A partir del grafo es claro que A_{21} se hace k_2A_{21}, A_{32} se hace $(k_3/k_2)A_{32}$, A_{23} se hace $(k_2/k_3)A_{23}$, y A_{43} se hace $(1/k_3)A_{43}$ (figura 8-33).

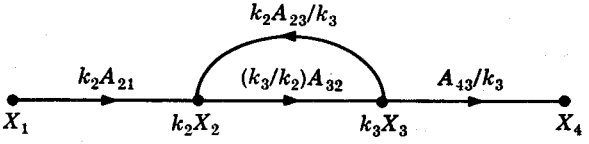


Figura 8-33

8.4. Considere el grafo de flujo de señales que se da en la figura 8-34.

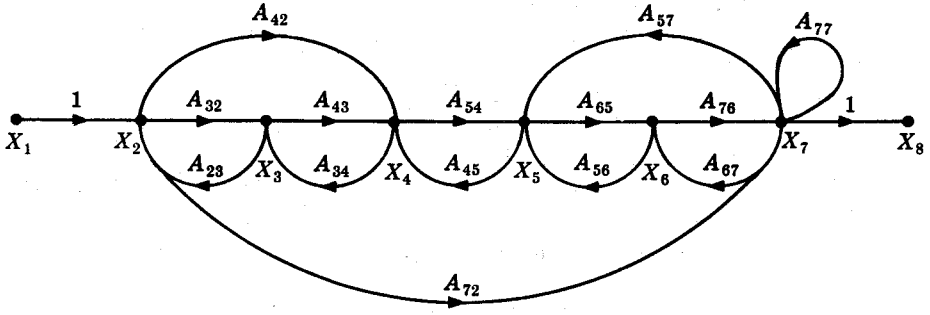


Figura 8-34

Identifique *a*) el nodo de entrada, *b*) el nodo de salida, *c*) las trayectorias directas, *d*) las trayectorias de retroalimentación, *e*) el autocircuito. Determine *f*) las ganancias de malla de las mallas de retroalimentación, y *g*) las ganancias de trayectoria de las trayectorias directas.

a) X_1

b) X_8

c) X_1 a X_2 a X_3 a X_4 a X_5 a X_6 a X_7 a X_8
X_1 a X_2 a X_7 a X_8
X_1 a X_2 a X_4 a X_5 a X_6 a X_7 a X_8

d) X_2 a X_3 a X_2; X_3 a X_4 a X_3; X_4 a X_5 a X_4; X_2 a X_4 a X_3 a X_2;
X_2 a X_7 a X_5 a X_4 a X_3 a X_2; X_5 a X_6 a X_5; X_6 a X_7 a X_6;
X_5 a X_6 a X_7 a X_5; X_7 a X_7; X_2 a X_7 a X_6 a X_5 a X_4 a X_3 a X_2

e) X_7 a X_7

f) $A_{32}A_{23}$; $A_{43}A_{34}$; $A_{54}A_{45}$; $A_{65}A_{56}$; $A_{76}A_{67}$; $A_{65}A_{76}A_{57}$; A_{77}; $A_{42}A_{34}A_{23}$;
$A_{72}A_{57}A_{45}A_{34}A_{23}$; $A_{72}A_{67}A_{56}A_{45}A_{34}A_{23}$

g) $A_{32}A_{43}A_{54}A_{65}A_{76}$; A_{72}; $A_{42}A_{54}A_{65}A_{76}$

Construcción de grafos de flujo de señales

8.5. Considere las siguientes ecuaciones, en las cuales $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son los coeficientes de los operadores matemáticos:

$$a)\quad x_3 = a_1x_1 + a_2x_2 \mp 5 \qquad b)\quad x_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k + 5$$

¿Cuál es el número mínimo tanto de nodos como de ramas, necesarios para construir los grafos de flujo de señales de estas ecuaciones? Dibuje los grafos.

a) Hay cuatro variables en esta ecuación: x_1, x_2, x_3 y ± 5. Entonces se requiere un mínimo de cuatro nodos. Hay tres coeficientes o funciones de transmisión del lado derecho de la ecuación: a_1, a_2 y ∓ 1. Por tanto se requiere un mínimo de tres ramas. En la figura 8-35*a*) se presenta un grafo de flujo de señales mínimo.

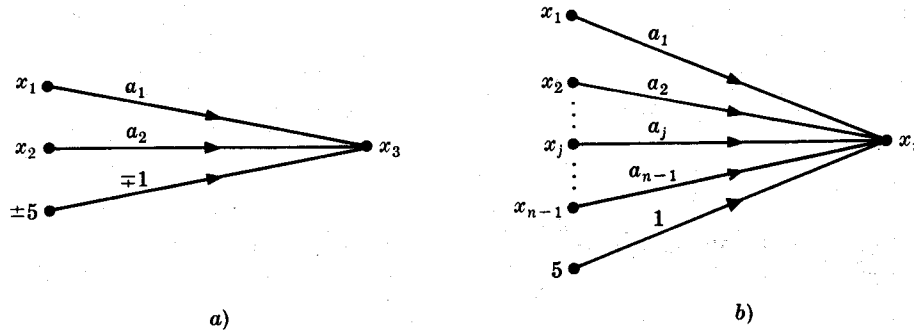


Figura 8-35

b) Hay $n + 1$ variables: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y 5; y hay n coeficientes: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ y 1. Por tanto la figura 8-35*b*) presenta el grafo de flujo de señales mínimo.

8.6. Dibuje los grafos de flujo de señales para

$$a)\quad x_2 = a_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right) \qquad b)\quad x_3 = \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{dx_1}{dt} - x_1 \qquad c)\quad x_4 = \int x_3\,dt$$

a) Las operaciones solicitadas en esta ecuación son a_1 y d/dt. La ecuación puede escribirse como $x_2 = a_1 \cdot (d/dt)(x_1)$. Puesto que hay dos operaciones, puede definirse una nueva variable dx_1/dt y utilizarse como nodo intermedio. El grafo de flujo de señales se da en la figura 8-36.

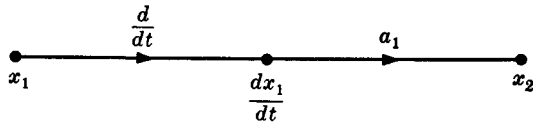


Figura 8-36

b) De modo similar, $x_3 = (d^2/dt^2)(x_2) + (d/dt)(x_1) - x_1$. Por tanto se obtiene la figura 8-37.

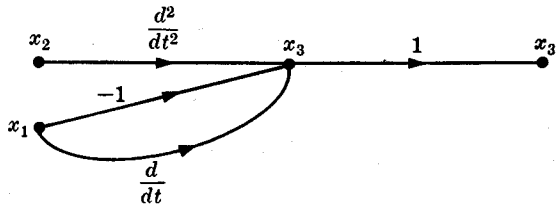


Figura 8-37

c) La operación es la integración. Representemos por $\int dt$ el operador. En la figura 8-38 se da el grafo de flujo de señales.

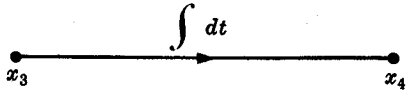


Figura 8-38

8.7. Construya el grafo de flujo de señales para el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$x_2 = A_{21}x_1 + A_{23}x_3 \qquad x_3 = A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 \qquad x_4 = A_{42}x_2 + A_{43}x_3$$

Hay cuatro variables: $x_1, \ldots, x_4$. Por tanto se requieren cuatro nodos. Ordenándolos de izquierda a derecha y conectándolos con las ramas apropiadas, obtenemos la figura 8-39.

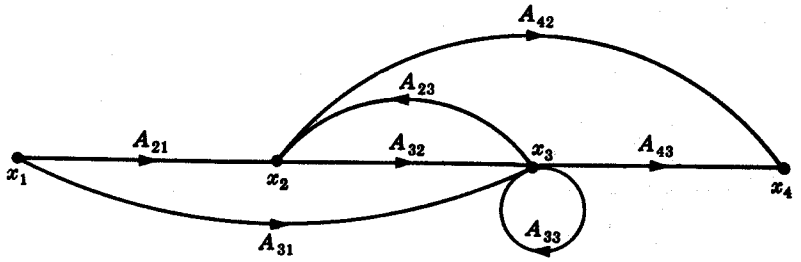


Figura 8-39

En la figura 8-40, este grafo se presenta de una forma más clara.

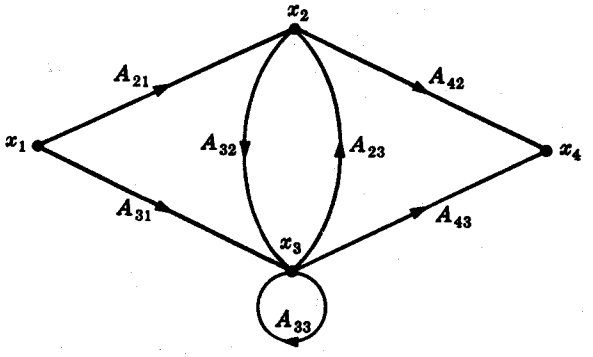


Figura 8-40

8.8. Dibuje un grafo de flujo de señales para la red de resistencias que se muestra en la figura 8-41, en la cual $v_2(0) = v_3(0) = 0$. v_2 es el voltaje a través de C_1.

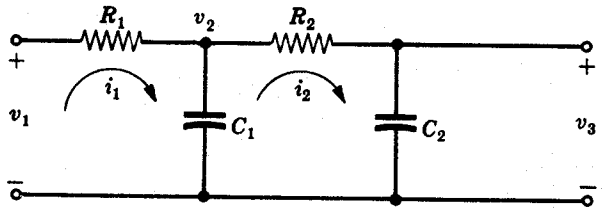


Figura 8-41

Las cinco variables son v_1, v_2, v_3, i_1 e i_2; v_1 es la entrada. Las cuatro ecuaciones independientes que se derivan de las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff son

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}\right)v_2 \qquad v_2 = \frac{1}{C_1}\int_0^t i_1\,dt - \frac{1}{C_1}\int_0^t i_2\,dt$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{R_2}\right)v_2 - \left(\frac{1}{R_2}\right)v_3 \qquad v_3 = \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2\,dt$$

El grafo de flujo de señales puede dibujarse directamente a partir de estas ecuaciones (figura 8-42).

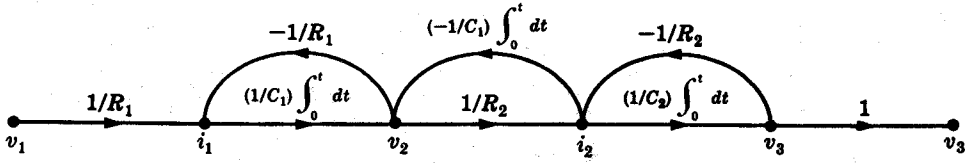


Figura 8-42

En la notación de transformadas de Laplace, al grafo de flujo de señales está dado por la figura 8-43.

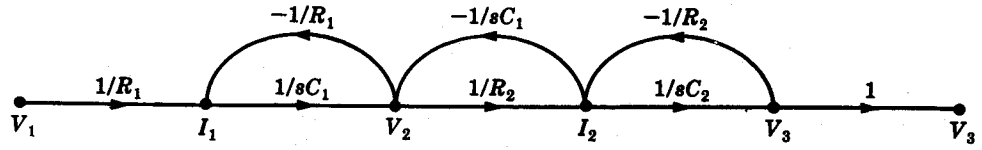


Figura 8-43

La fórmula general de ganancia entrada-salida

8.9. Las ecuaciones transformadas para el sistema mecánico dado en la figura 8-44, son:

$$\text{i)} \qquad F + k_1 X_2 = \left(M_1 s^2 + f_1 s + k_1\right) X_1$$

$$\text{ii)} \qquad k_1 X_1 = \left(M_2 s^2 + f_2 s + k_1 + k_2\right) X_2$$

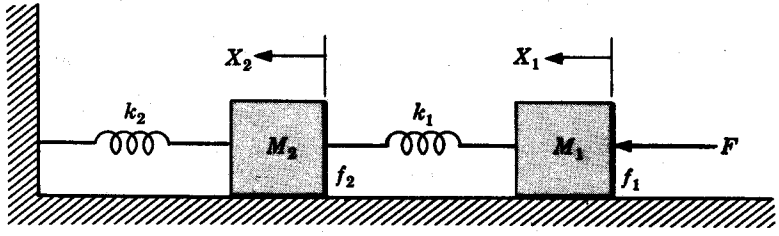


Figura 8-44

en donde F es la fuerza, M es la masa, k es la constante de un resorte, f es la fricción, y X es el desplazamiento. Determine X_2/F utilizando la ecuación (*8.2*).

Hay tres variables: X_1, X_2 y F. Entonces necesitamos tres nodos. Para dibujar el grafo de flujo de señales dividimos la ecuación i) entre A, y la ecuación ii) entre B, en donde $A \equiv M_1 s^2 + f_1 s + k_1$, y $B \equiv M_2 s^2 + f_2 s + k_1 + k_2$:

$$\text{iii)} \qquad \left(\frac{1}{A}\right) F + \left(\frac{k_1}{A}\right) X_2 = X_1$$

$$\text{iv)} \qquad \left(\frac{k_1}{B}\right) X_1 = X_2$$

En consecuencia, el grafo de flujo de señales está dado por la figura 8-45.

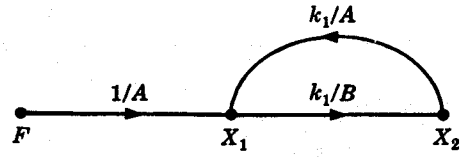


Figura 8-45

La ganancia de la trayectoria directa es $P_1 = k_1/AB$. La ganancia de la malla de retroalimentación es $P_{11} = k_1^2/AB$. Entonces $\Delta = 1 - P_{11} = (AB - k_1^2)/AB$ y $\Delta_1 = 1$. Finalmente

$$\frac{X_2}{F} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{k_1}{AB - k_1^2} = \frac{k_1}{(M_1s^2 + f_1s + k_1)(M_2s^2 + f_2s + k_1 + k_2) - k_1^2}$$

8.10. Determine la función de transferencia para el diagrama de bloques del problema 7.20, por medio de las técnicas de grafos de flujo de señales.

A partir de la figura 7-44 se dibuja directamente el grafo de flujo de señales, figura 8-46. Hay dos trayectorias directas. Las ganancias de las trayectorias son $P_1 = G_1G_2G_3$ y $P_2 = G_4$. Las ganancias de las tres mallas de retroalimentación son $P_{11} = -G_2H_1$, $P_{21} = G_1G_2H_1$ y $P_{31} = -G_2G_3H_2$. Todas las mallas se tocan. En consecuencia $\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31})$. También $\Delta_1 = 1$, y puesto que no hay mallas que toquen los nodos de P_2, $\Delta_2 = \Delta$. Así

$$T = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3 + G_4 + G_2G_4H_1 - G_1G_2G_4H_1 + G_2G_3G_4H_2}{1 + G_2H_1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2}$$

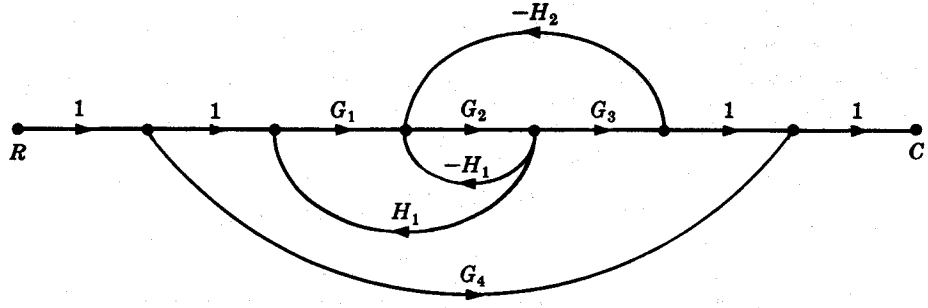


Figura 8-46

8.11. Determine la función de transferencia V_3/V_1 del grafo de flujo de señales del problema 8.8.

La ganancia de la única trayectoria directa es $1/(s^2R_1R_2C_1C_2)$. Las ganancias de las tres mallas de retroalimentación son $P_{11} = -1/(sR_1C_1)$, $P_{21} = -1/(sR_2C_1)$ y $P_{31} = -1/(sR_2C_2)$. El producto de las ganancias de las únicas dos mallas que no se tocan es $P_{12} = P_{11} \cdot P_{31} = 1/(s^2R_1R_2C_1C_2)$. De aquí

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + P_{12} = \frac{s^2 R_1 R_2^2 C_1^2 C_2 + s(R_2^2 C_1 C_2 + R_1 R_2 C_1 C_2 + R_1 R_2 C_1^2) + R_2 C_1}{s^2 R_1 R_2^2 C_1^2 C_2}$$

Puesto que todas las mallas tocan la trayectoria directa, $\Delta_1 = 1$. Finalmente,

$$\frac{V_3}{V_1} = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + s(R_2 C_2 + R_1 C_2 + R_1 C_1) + 1}$$

8.12. Resuelva el problema 7.16 con las técnicas de grafos de flujo de señales.

A partir de la figura 7-26 puede dibujarse directamente la figura 8-47, la cual muestra el grafo de flujo de señales.

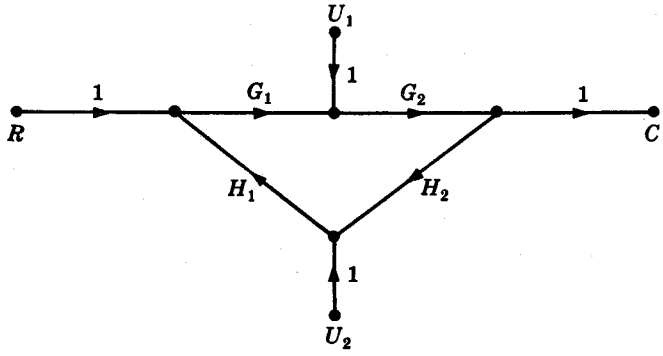


Figura 8-47

Con $U_1 = U_2 = 0$, tenemos la figura 8-48. Entonces $P_1 = G_1G_2$ y $P_{11} = G_1G_2H_1H_2$. Así que $\Delta = 1 - P_{11} = 1 - G_1G_2H_1H_2$, $\Delta_1 = 1$, y

$$C_R = TR = \frac{P_1 \Delta_1 R}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 R}{1 - G_1 G_2 H_1 H_2}$$

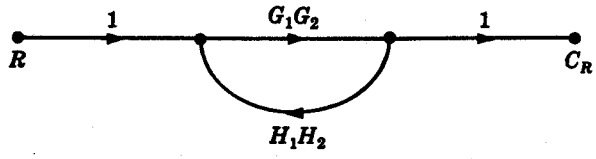


Figura 8-48

Ahora hacemos $U_2 = R = 0$ (figura 8-49).

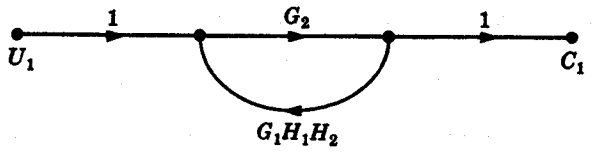


Figura 8-49

Entonces $P_1 = G_2$, $P_{11} = G_1G_2H_1H_2$, $\Delta = 1 - G_1G_2H_1H_2$, $\Delta_1 = 1$, y

$$C_1 = TU_1 = \frac{G_2U_1}{1 - G_1G_2H_1H_2}$$

Ahora hacemos $R = U_1 = 0$ (figura 8-50).

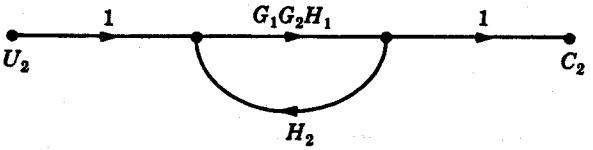


Figura 8-50

Entonces $P_1 = G_1G_2H_1$, $P_{11} = G_1G_2H_1H_2$, $\Delta = 1 - G_1G_2H_1H_2$, $\Delta_1 = 1$, y

$$C_2 = TU_2 = \frac{P_1\Delta_1U_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2H_1U_2}{1 - G_1G_2H_1H_2}$$

Finalmente, tenemos

$$C = C_R + C_1 + C_2 = \frac{G_1G_2R + G_2U_1 + G_1G_2H_1U_2}{1 - G_1G_2H_1H_2}$$

Cálculo de funciones de transferencia de componentes en cascada

8.13. Determine la función de transferencia de dos redes en cascada, de las mostradas en la figura 8-51.

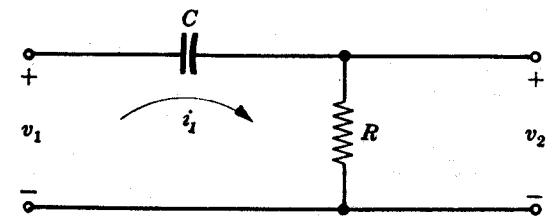


Figura 8-51

En notación de transformada de Laplace, la red se convierte en lo que muestra la figura 8-52.

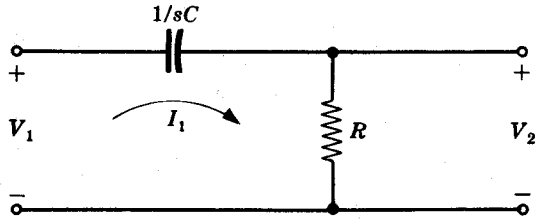


Figura 8-52

Mediante las leyes de Kirchhoff, tenemos $I_1 = sCV_1 - sCV_2$ y $V_2 = RI_1$. En la figura 8-53 se presenta el grafo de flujo de señales.

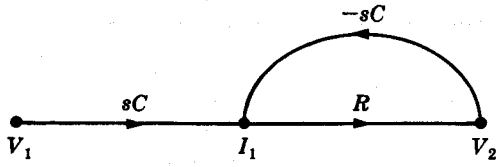


Figura 8-53

Para las dos redes en cascada (figura 8-54) la ecuación de V_2 también depende de I_2: $V_2 = RI_1 - RI_2$. Así que las dos redes están unidas en el nodo 2 (figura 8-55), y se adiciona una malla de retroalimentación $(-RI_2)$ entre I_2 y V_2 (figura 8-56).

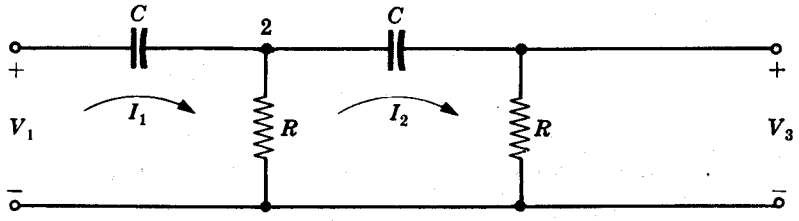


Figura 8-54

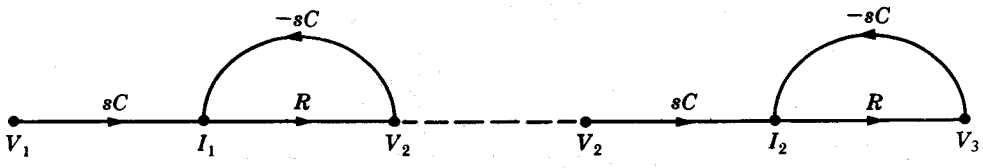


Figura 8-55

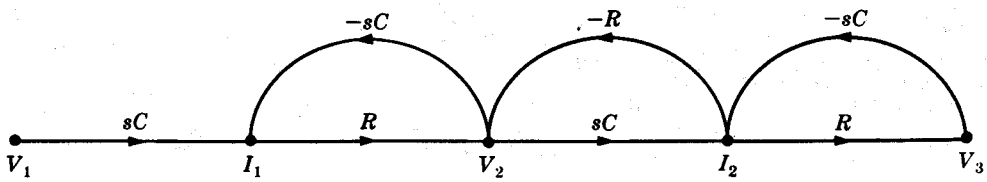


Figura 8-56

Entonces $P_1 = s^2R^2C^2$, $P_{11} = P_{31} = -sRC$, $P_{12} = P_{11} \cdot P_{31} = s^2R^2C^2$, $\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31}) + P_{12} = 1 + 3sRC + s^2R^2C^2$, $\Delta_1 = 1$,

$$T = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{s^2}{s^2 + (3/RC)s + 1/(RC)^2}$$

8.14. Dos redes de resistencias, de la forma que se muestra en el ejemplo 8.6, se utilizan como elementos de control en la trayectoria directa de un sistema de control. Estos se van a conectar en cascada y deberán tener valores de los respectivos elementos idénticos, como se muestra en la figura 8-57. Encuentre v_5/v_1 utilizando la ecuación (*8.2*).

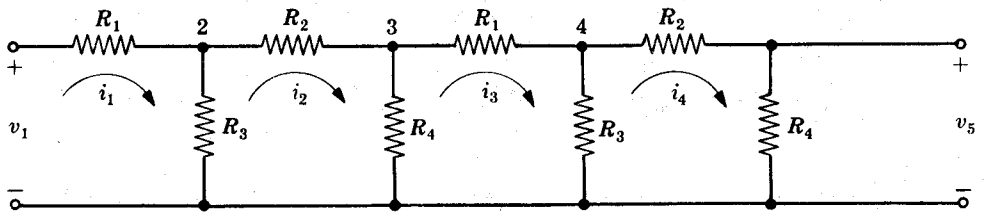


Figura 8-57

Hay nueve variables: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, i_1, i_2, i_3, e i_4. Las ocho ecuaciones independientes son

$$i_1 = \left(\frac{1}{R_1}\right)v_1 - \left(\frac{1}{R_1}\right)v_2 \qquad i_3 = \left(\frac{1}{R_1}\right)v_3 - \left(\frac{1}{R_1}\right)v_4$$

$$v_2 = R_3i_1 - R_3i_2 \qquad v_4 = R_3i_3 - R_3i_4$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{R_2}\right)v_2 - \left(\frac{1}{R_2}\right)v_3 \qquad i_4 = \left(\frac{1}{R_2}\right)v_4 - \left(\frac{1}{R_2}\right)v_5$$

$$v_3 = R_4i_2 - R_4i_3 \qquad v_5 = R_4i_4$$

Unicamente la ecuación para v_3 es diferente de aquellas de la red simple del ejemplo 8.6; en ella hay un término extra, $(-R_4i_3)$. Por tanto el diagrama de flujo de señales para cada red sola (ejemplo 8.6) puede unirse en el nodo v_3, y se dibuja una rama extra de ganancia $-R_4$ de i_3 a v_3. El grafo de flujo de señales resultante para la red doble se presenta en la figura 8-58.

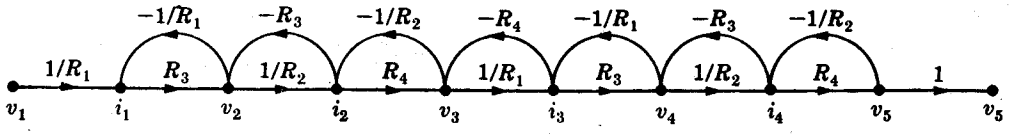


Figura 8-58

La ganancia de voltaje $T = v_5/v_1$ se calcula a partir de la ecuación (*8.2*) como sigue. La trayectoria directa produce $P_1 = (R_3R_4/R_1R_2)^2$. Las ganancias de las siete mallas de retroalimentación son $P_{11} = -R_3/R_1 = P_{51}$, $P_{21} = -R_3/R_2 = P_{61}$, $P_{31} = -R_4/R_2 = P_{71}$, y $P_{41} = -R_4/R_1$.

Hay 15 productos de ganancias de dos mallas que no se tocan. De izquierda a derecha, tenemos

$$P_{12} = \frac{R_3R_4}{R_1R_2} \quad P_{42} = \frac{R_3^2}{R_1R_2} \quad P_{72} = \frac{R_3^2}{R_1R_2} \quad P_{10,2} = \frac{R_3R_4}{R_1R_2} \quad P_{13,2} = \frac{R_3R_4}{R_1R_2}$$

$$P_{22} = \frac{R_3R_4}{R_1^2} \quad P_{52} = \frac{R_3R_4}{R_1R_2} \quad P_{82} = \left(\frac{R_3}{R_2}\right)^2 \quad P_{11,2} = \frac{R_3R_4}{R_2^2} \quad P_{14,2} = \frac{R_4^2}{R_1R_2}$$

$$P_{32} = \left(\frac{R_3}{R_1}\right)^2 \quad P_{62} = \frac{R_3R_4}{R_1R_2} \quad P_{92} = \frac{R_3R_4}{R_2^2} \quad P_{12,2} = \left(\frac{R_4}{R_2}\right)^2 \quad P_{15,2} = \frac{R_3R_4}{R_1R_2}$$

Hay 10 productos de ganancias de tres mallas que no se tocan. De izquierda a derecha, tenemos

$$P_{13} = \frac{R_3^2R_4}{R_1^2R_2} \quad P_{33} = -\frac{R_3R_4^2}{R_1R_2^2} \quad P_{63} = -\frac{R_3^2R_4}{R_1^2R_2} \quad P_{83} = -\frac{R_3R_4^2}{R_1R_2^2} \quad P_{53} = -\frac{R_3R_4^2}{R_1^2R_2}$$

$$P_{23} = -\frac{R_3^2R_4}{R_1R_2^2} \quad P_{43} = -\frac{R_3^2R_4}{R_1^2R_2} \quad P_{73} = -\frac{R_3^2R_4}{R_1R_2^2} \quad P_{93} = -\frac{R_3^2R_4}{R_1R_2^2} \quad P_{10,3} = -\frac{R_3R_4^2}{R_1R_2^2}$$

Hay un producto de ganancias de cuatro mallas que no se tocan: $P_{14} = P_{11}P_{31}P_{51}P_{71} = (R_3R_4/R_1R_2)^2$. Por tanto el determinante es

$$\Delta = 1 - \sum_{j=1}^{7} P_{j1} + \sum_{j=1}^{15} P_{j2} - \sum_{j=1}^{10} P_{j3} + P_{14}$$

$$= 1 + \frac{R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + 6R_3R_4 + 2R_3^2 + R_4^2}{R_1R_2} + \frac{R_3R_4 + R_3^2}{R_1^2} + \frac{R_3^2 + R_4^2 + R_3R_4}{R_2^2}$$

Puesto que todas las mallas tocan la trayectoria directa $\Delta_1 = 1$, y

$$T = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{(R_3R_4)^2}{(R_1R_2)^2 + R_1^2(R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4 + R_3^2 + R_4^2) + R_2^2(R_3^2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_3R_4) + 2R_1R_2R_3^2 + R_1R_2R_4^2 + 6R_1R_2R_3R_4}$$

Reducción de diagramas de bloques

8.15. Determine C/R para cada uno de los sistemas que se muestran en la figura 8-59, utilizando la ecuación (*8.2*).

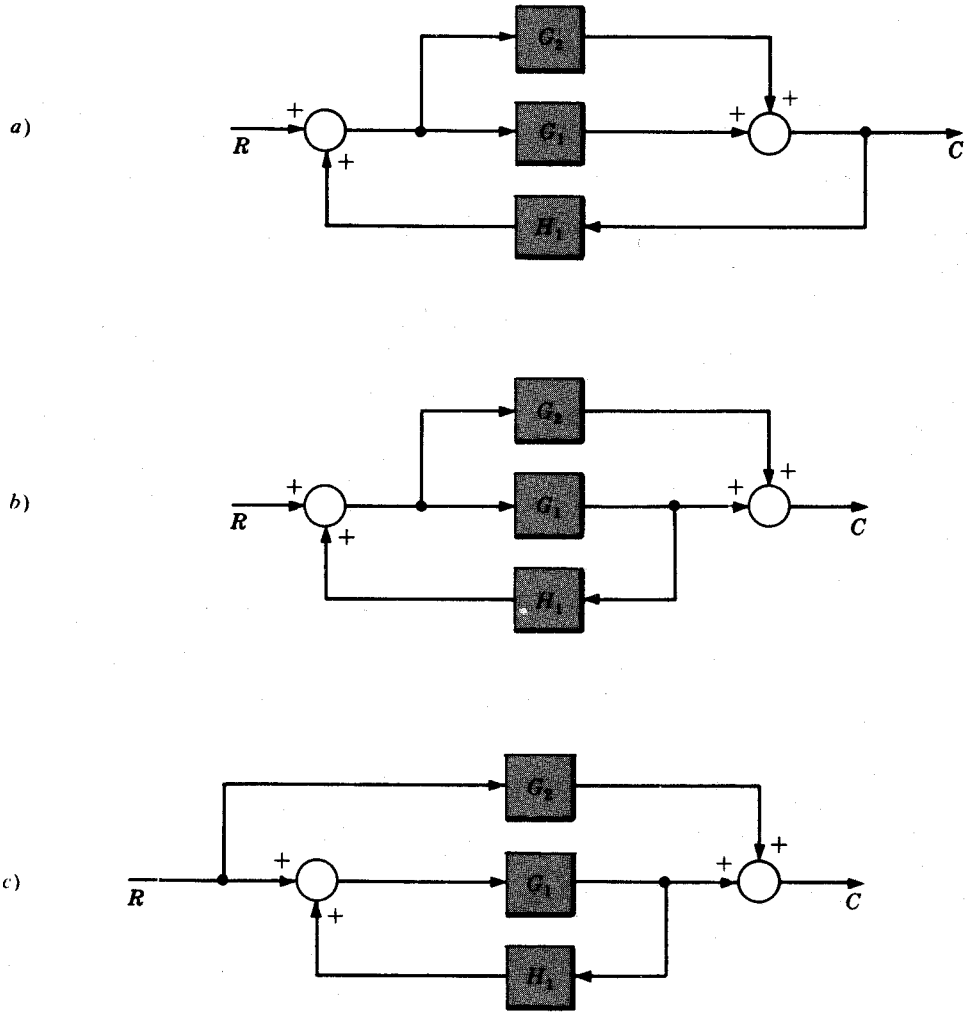


Figura 8-59

a) En la figura 8-60 se presenta el grafo de flujo de señales. Las ganancias de las dos trayectorias directas son $P_1 = G_1$, $P_2 = G_2$. Las ganancias de las dos mallas de retroalimentación son $P_{11} = G_1H_1$, $P_{21} = G_2H_1$. Entonces

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21}) = 1 - G_1H_1 - G_2H_1$$

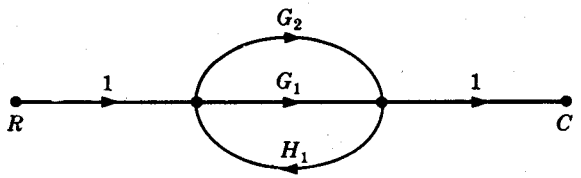


Figura 8-60

Ahora, $\Delta_1 = 1$ y $\Delta_2 = 1$ porque ambas trayectorias tocan las mallas de retroalimentación en los dos nodos interiores. Así que

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2}{1 - G_1H_1 - G_2H_1}$$

b) El grafo de flujo de señales se presenta en la figura 8-61. De nuevo, tenemos $P_1 = G_1$ y $P_2 = G_2$. Pero ahora sólo hay una malla de retroalimentación, y $P_{11} = G_1H_1$; por tanto $\Delta = 1 - G_1H_1$. La trayectoria directa por G_1 toca claramente la malla de retroalimentación en los nodos *a* y *b*; así que $\Delta_1 = 1$. La trayectoria directa por G_2 toca la malla de retroalimentación en el nodo *a*; así que $\Delta_2 = 1$. En consecuencia

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2}{1 - G_1H_1}$$

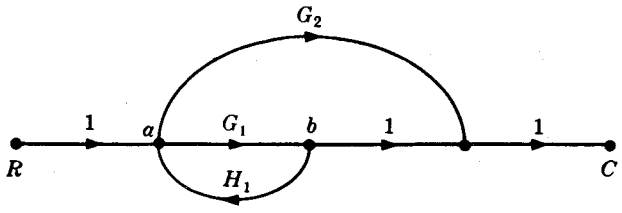


Figura 8-61

c) El grafo de flujo de señales se presenta en la figura 8-62. De nuevo, tenemos $P_1 = G_1$, $P_2 = G_2$, $P_{11} = G_1H_1$, $\Delta = 1 - G_1H_1$, y $\Delta_1 = 1$. Pero la trayectoria de retroalimentación *no* toca la trayectoria directa por G_2 en *ningún* nodo. Por tanto $\Delta_2 = \Delta = 1 - G_1H_1$, y

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1 + G_2(1 - G_1H_1)}{1 - G_1H_1}$$

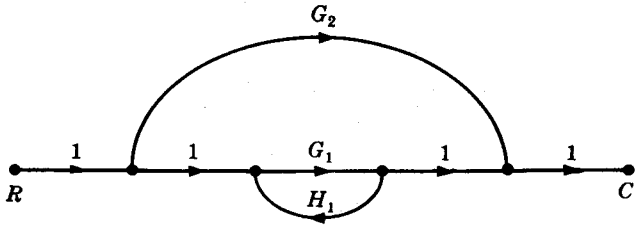


Figura 8-62

Este problema ilustra la importancia de separar los puntos de suma y los puntos de toma con una rama de ganancia unitaria al aplicar la ecuación (8.2).

8.16. Encuentre la función de transferencia C/R para el sistema que se muestra en la figura 8-63, en la cual K es una constante.

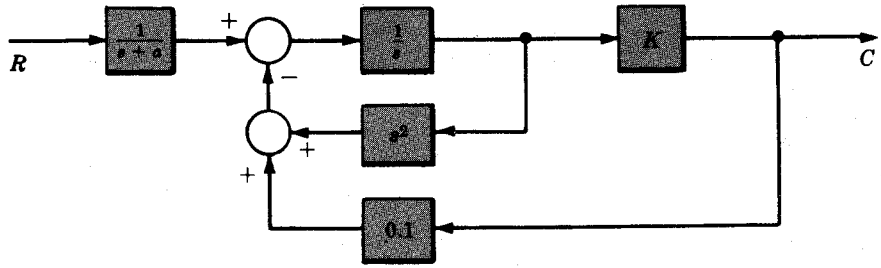


Figura 8-63

En la figura 8-64 se presenta el grafo de flujo de señales. La ganancia de la única trayectoria directa es

$$P_1 = \left(\frac{1}{s+a}\right)\cdot\left(\frac{1}{s}\right)K = \frac{K}{s(s+a)}$$

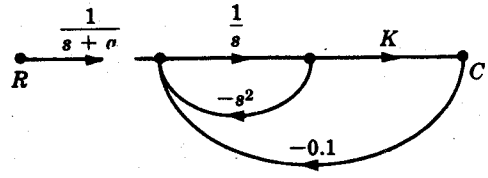


Figura 8-64

Las ganancias de las dos mallas de retroalimentación son $P_{11} = (1/s)\cdot(-s^2) = -s$ y $P_{21} = -0.1K/s$. Todas las mallas se tocan. Por tanto

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21}) = \frac{s^2 + s - 0.1K}{s} \qquad \Delta_1 = 1 \qquad \frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{K}{(s+a)(s^2+s+0.1K)}$$

8.17. Resuelva el problema 7.18 utilizando las técnicas de los grafos de flujo de señales.

En la figura 8-65 se presenta el grafo de flujo de señales.

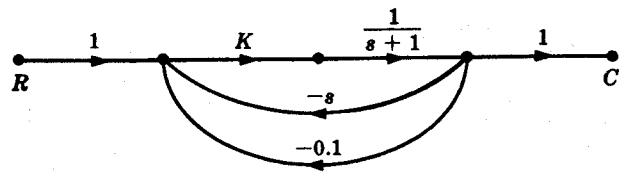


Figura 8-65

Aplicando las reglas de la multiplicación y la adición, obtenemos la figura 8-66. Ahora

$$P_1 = \frac{K}{s+1} \qquad P_{11} = -\frac{K(s+0.1)}{s+1} \qquad \Delta = 1 + \frac{K(s+0.1)}{s+1} \qquad \Delta_1 = 1,$$

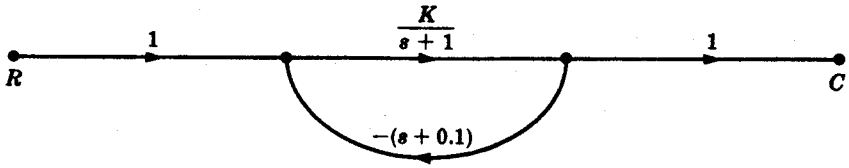


Figura 8-66

y

$$C = TR = \frac{P_1 \Delta_1 R}{\Delta} = \frac{KR}{(1+K)s + 1 + 0.1K}$$

8.18. Encuentre C/R para el sistema de control dado en la figura 8-67.

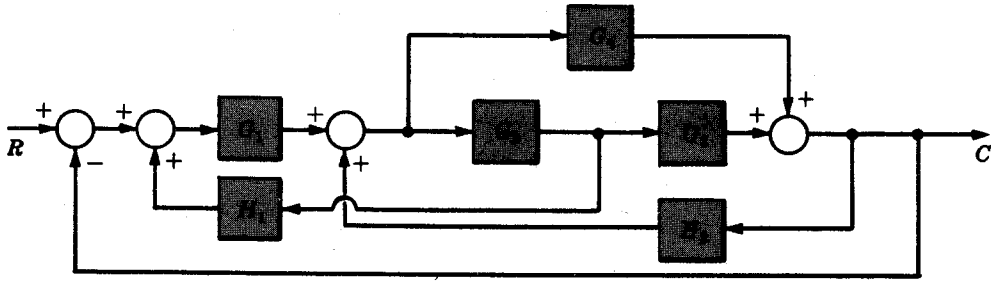


Figura 8-67

En la figura 8-68 se muestra el grafo de flujo de señales. Las ganancias de las dos trayectorias directas son $P_1 = G_1G_2G_3$ y $P_2 = G_1G_4$. Las ganancias de las cinco mallas de retroalimentación son $P_{11} = G_1G_2H_1$, $P_{21} = G_2G_3H_2$, $P_{31} = -G_1G_2G_3$, $P_{41} = G_4H_2$, y $P_{51} = -G_1G_4$. Así que

$$\Delta = 1 - (P_{11} + P_{21} + P_{31} + P_{41} + P_{51}) = 1 + G_1G_2G_3 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_4H_2 + G_1G_4$$

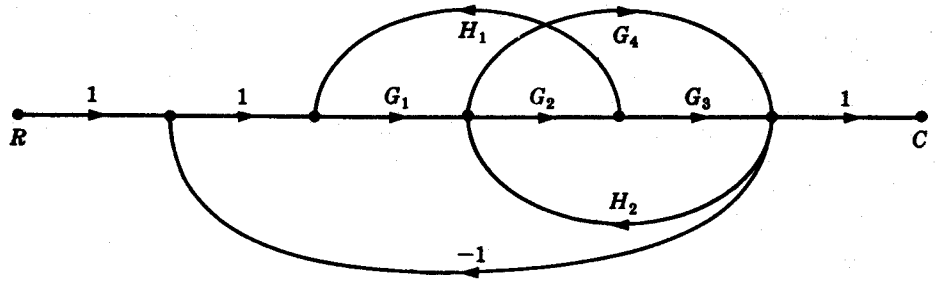


Figura 8-68

y $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$. Finalmente

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1G_4}{1 + G_1G_2G_3 - G_1G_2H_1 - G_2G_3H_2 - G_4H_2 + G_1G_4}$$

8.19. Determine C/R para el sistema dado en la figura 8-69. *Entonces* haga $G_3 = G_1G_2H_2$.

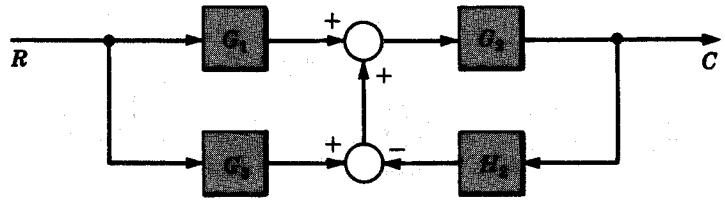


Figura 8-69

En la figura 8-70 se presenta el grafo de flujo de señales. Tenemos $P_1 = G_1G_2$, $P_2 = G_2G_3$, $P_{11} = -G_2H_2$, $\Delta = 1 + G_2H_2$, $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$, y

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{1 + G_2H_2}$$

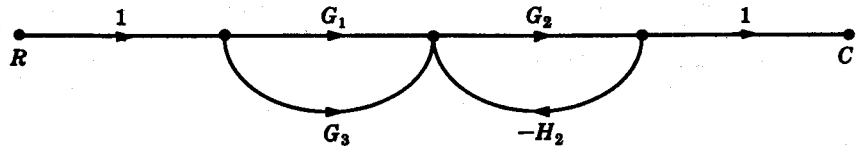


Figura 8-70

Haciendo $G_3 = G_1G_2H_2$, obtenemos $C/R = G_1G_2$, y la función de transferencia del sistema se convierte en una malla abierta.

8.20. Determine los elementos de un sistema canónico con retroalimentación para el sistema del problema 8.10.

Del problema 8.10, $P_1 = G_1G_2G_3$, $P_2 = G_4$, $\Delta = 1 + G_2H_1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2$, $\Delta_1 = 1$, y $\Delta_2 = \Delta$. A partir de la ecuación (*8.3*) tenemos

$$G = \sum_{i=1}^{2} P_i\Delta_i = G_1G_2G_3 + G_4 + G_2G_4H_1 - G_1G_2G_4H_1 + G_2G_3G_4H_2$$

y de la ecuación (*8.4*) obtenemos

$$H = \frac{\Delta - 1}{G} = \frac{G_2H_1 - G_1G_2H_1 + G_2G_3H_2}{G_1G_2G_3 + G_4 + G_2G_4H_1 - G_1G_2G_4H_1 + G_2G_3G_4H_2}$$

Problemas suplementarios

8.21. Encuentre C/R para la figura 8-71, utilizando la ecuación (*8.2*).

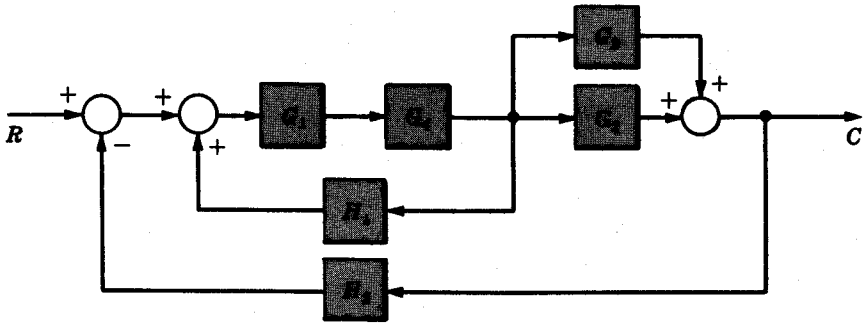


Figura 8-71

8.22. Determine un conjunto de funciones de transferencia del sistema canónico con retroalimentación, que aparece en el problema anterior, utilizando las ecuaciones (*8.3*) y (*8.4*).

8.23. Cambie la escala del grafo de flujo de señales de la figura 8-72, de tal modo que X_3 se convierta en $X_3/2$ (*véase* el problema 8.3).

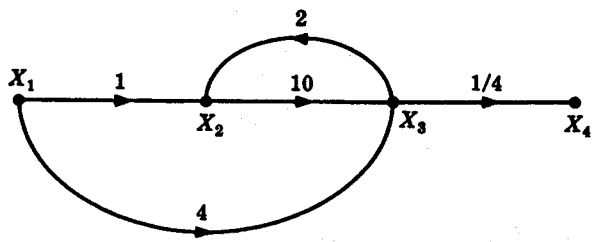


Figura 8-72

8.24. Dibuje un grafo de flujo de señales para varios nodos del sistema de inhibición lateral, descrito en el problema 3.4, mediante la ecuación

$$c_k = r_k - \sum_{i=1}^{n} a_{k-i} c_i$$

8.25. Dibuje un grafo de flujo de señales para el sistema presentado en el problema 7-31.

8.26. Dibuje un grafo de flujo de señales para el sistema presentado en el problema 7-32.

8.27. Para el grafo de flujo de señales dibujado en el problema 8-26, determine C/R_4 a partir de la ecuación (*8.2*).

8.28. Dibuje un grafo de flujo de señales para la red eléctrica de la figura 8-73.

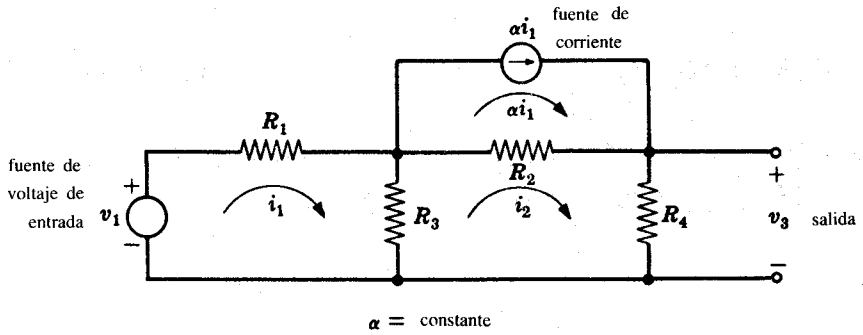


Figura 8-73

8.29. Para la red del problema 8.28, determine V_3/V_1 a partir de la ecuación (*8.2*).

8.30. Utilizando las ecuaciones (*8.3*) y (*8.4*), determine los elementos de un sistema canónico con retroalimentación para la red del problema 8.28.

8.31. Dibuje un grafo de flujo de señales para el circuito de computador analógico de la figura 8-74.

8.32. Cambie la escala del circuito del computador analógico del problema 8.31, de tal modo que y se convierta en $10y$, dy/dt en $20(dy/dt)$ y d^2y/dt^2 en $5(d^2y/dt^2)$.

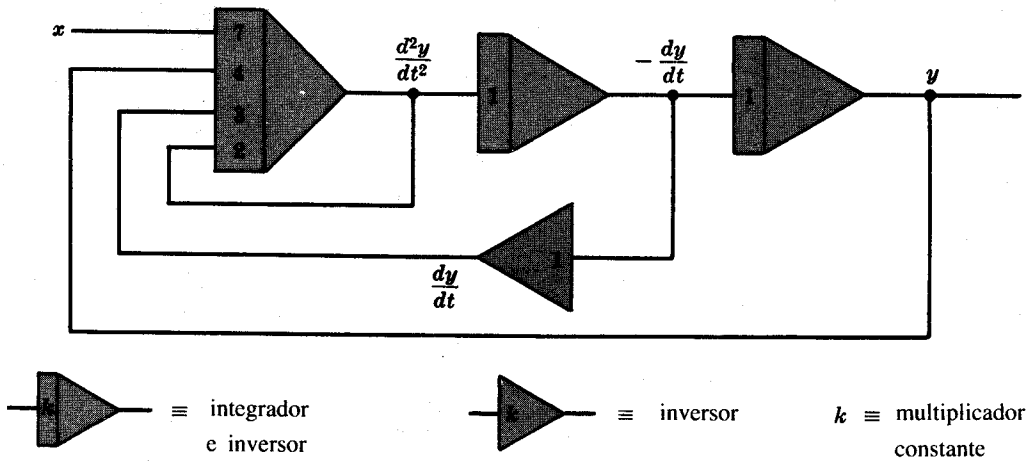


Figura 8-74

Respuestas a los problemas suplementarios

8.21. $P_1 = G_1G_2G_4$; $P_2 = G_1G_3G_4$, $P_{11} = G_1G_4H_1$, $P_{21} = -G_1G_2G_4H_2$, $P_{31} = -G_1G_3G_4H_2$, $\Delta = 1 - G_1G_4H_1 + G_1G_2G_4H_2 + G_1G_3G_4H_2$, y $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$. Entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{G_1G_4(G_2 + G_3)}{1 - G_1G_4[H_1 - H_2(G_2 + G_3)]}$$

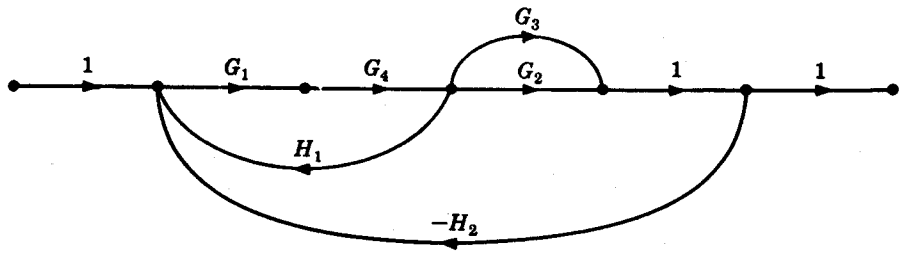


Figura 8-75

8.22. $G = P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2 = G_1G_4(G_2 + G_3)$ $\qquad H = \dfrac{\Delta - 1}{G} = H_2 - \dfrac{H_1}{G_2 + G_3}$

8.23.

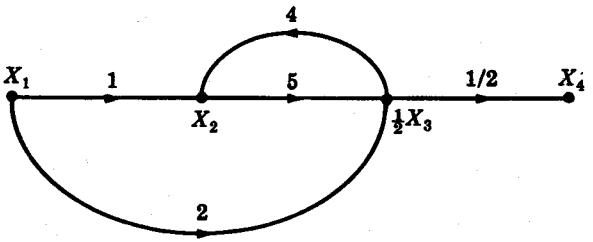


Figura 8-76

8.24.

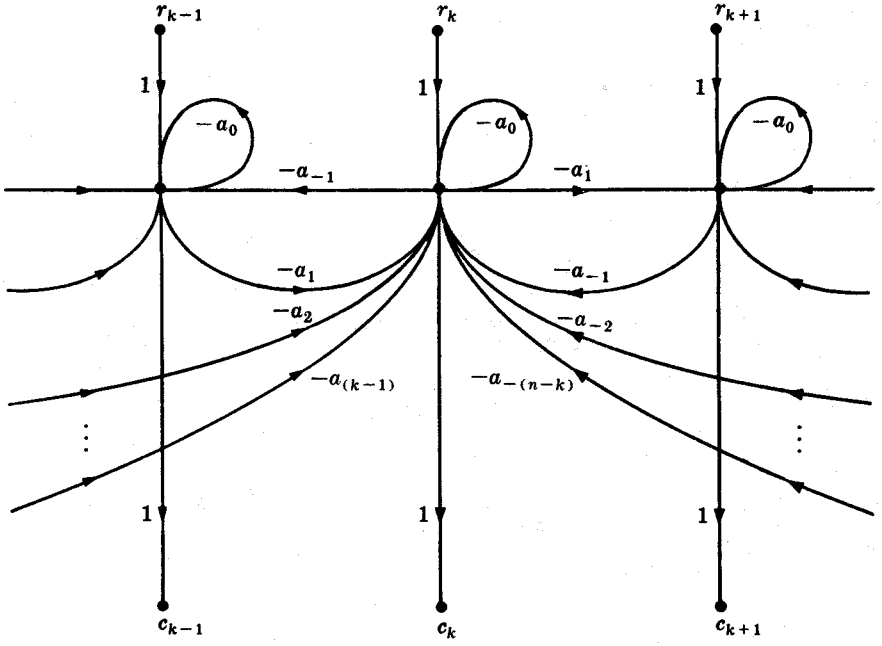


Figura 8-77

8.25.

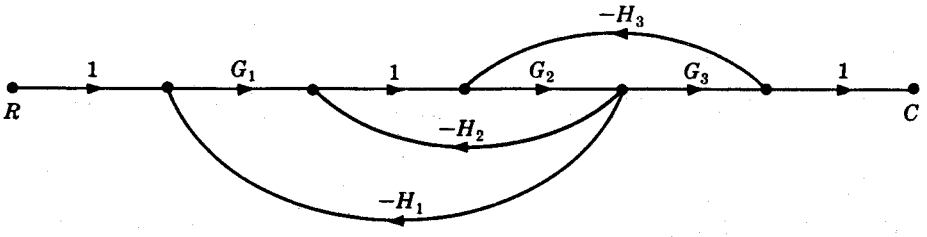


Figura 8-78

8.26.

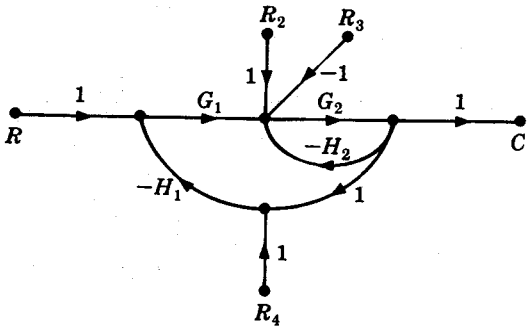


Figura 8-79

8.27. $$\frac{C}{R_4} = \frac{-G_1G_2H_1}{1 + G_2H_2 + G_1G_2H_1}$$

8.28.

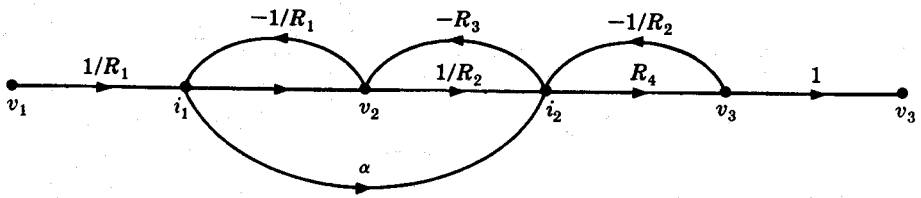


Figura 8-80

8.29. $$\frac{V_3}{V_1} = \frac{R_3R_4 + \alpha R_2R_4}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_3R_4 - \alpha R_2R_3}$$

8.30. $G = R_4(R_3 + \alpha R_2)$

$$H = \frac{R_1(R_2 + R_3 + R_4) + R_3R_4 + R_2R_3(1 - \alpha)}{R_4(R_3 + \alpha R_2)}$$

8.31.

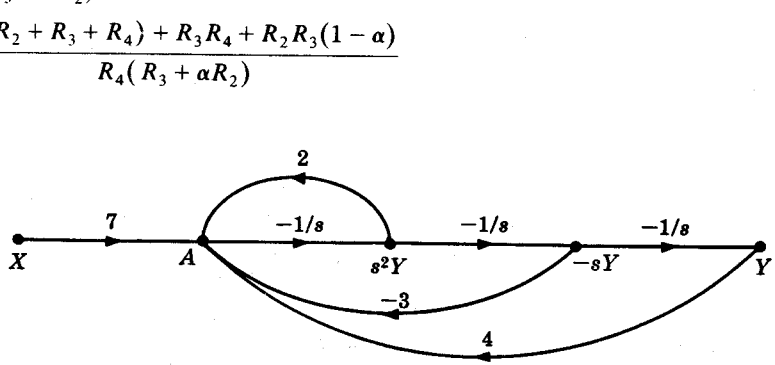


Figura 8-81

8.32.

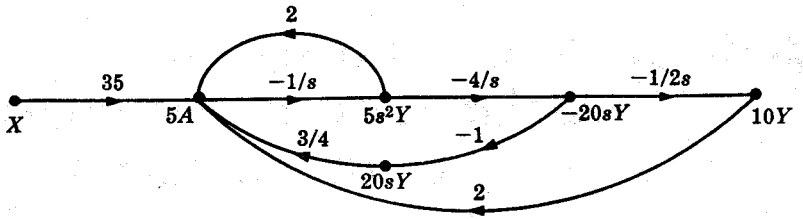


Figura 8-82

Capítulo 9

Medidas de sensitividad de un sistema y clasificación de sistemas con retroalimentación

9.1. Introducción

En los capítulos anteriores se ha hecho énfasis en los conceptos de retroalimentación y sistemas con retroalimentación. Puesto que un sistema con una función de transferencia dada puede sintetizarse en una configuración en malla abierta o en malla cerrada, una configuración en malla cerrada (con retroalimentación) debe tener algunas propiedades deseables que la distingan de la configuración en malla abierta.

En este capítulo se analizan en detalle algunas de las propiedades de la retroalimentación y de los sistemas con retroalimentación, y las medidas cuantitativas de la efectividad de la retroalimentación se desarrollan en términos de los conceptos *sensitividad* y *constantes de error*.

9.2 Sensitividad de las funciones de transferencia y de las funciones de respuesta de frecuencia a los parámetros del sistema

Un primer paso en el análisis o diseño de un sistema de control es la generación de modelos para los diferentes elementos en el sistema. Si éste es lineal e invariante en el tiempo, los dos modelos matemáticos útiles para estos elementos son la *función de transferencia* y la *función de respuesta de frecuencia* (*véase* el Capítulo 6).

La función de transferencia se fija cuando se especifican sus parámetros, y los valores dados a estos parámetros se llaman **valores nominales**. Si los hay, raras veces se conocen con exactitud, de tal modo que en realidad son aproximaciones a los valores verdaderos de los parámetros. La función de transferencia correspondiente se llama **función nominal de transferencia**. La exactitud del modelo depende entonces, en parte, de cuán cerca estos valores nominales se aproximan a los parámetros reales que representan, y también de cuánto se desvían estos parámetros de los valores nominales durante el curso de la operación del sistema. La **sensitividad** de un sistema a sus parámetros es una medida de cuánto difiere la función de transferencia de su forma nominal cuando cada uno de sus parámetros difiere de su valor nominal.

La sensitividad del sistema también puede definirse y analizarse en términos de la función de respuesta de frecuencia. La función de respuesta de frecuencia de un sistema continuo puede determinarse directamente a partir de la función de transferencia del sistema, si se conoce, remplazando en la función de transferencia la variable compleja s por $j\omega$. Para sistemas discretos en el tiempo, esta función se obtiene remplazando z por $e^{j\omega T}$. De este modo, se define mediante los mismos parámetros que definen la función de transferencia, y su exactitud está determinada por la exactitud de estos parámetros. La función de respuesta de frecuencia puede definirse de otra manera mediante gráficas de su magnitud y su ángulo de fase, dibujados ambos como función de la frecuencia real ω. A menudo estas gráficas se determinan experimentalmente, y en muchos casos no pueden definirse por un número finito de parámetros. Por tanto, un número infinito de

valores de amplitud y de ángulo de fase (valores para todas las frecuencias) definen la función de respuesta de frecuencia. En este caso, la **sensitividad** del sistema es una medida de cuánto difiere su función de respuesta de frecuencia de su valor nominal cuando la función de respuesta de frecuencia de un elemento del sistema difiere de su valor nominal.

Considere el modelo matemático $T(k)$ (función de transferencia o función de respuesta de frecuencia) de un sistema lineal invariable en el tiempo, escrito en forma polar como

$$T(k) = |T(k)|e^{j\phi_T} \tag{9.1}$$

en donde k es un parámetro del que depende $T(k)$. Usualmente, tanto $|T(k)|$ como ϕ_T dependen de k, y k es un parámetro real o complejo del sistema.

Definición 9.1: Para el modelo matèmático $T(k)$, viendo a k como el único parámetro, la **sensitividad de $T(k)$ con respecto al parámetro k** se define mediante

$$S_k^{T(k)} \equiv \frac{d \ln T(k)}{d \ln k} = \frac{dT(k)/T(k)}{dk/k} = \frac{dT(k)}{dk}\frac{k}{T(k)} \tag{9.2}$$

En algunos tratamientos de este tema, $S_k^{T(k)}$ se llama **sensitividad relativa** o **normalizada**, porque representa la variación dT relativa a la T nominal, para una variación dk relativa a la nominal k. $S_k^{T(k)}$ algunas veces se llama *sensitividad de Bode*.

Definición 9.2: La **sensitividad de la magnitud de $T(k)$ con respecto al parámetro k** se define mediante

$$S_k^{|T(k)|} \equiv \frac{d \ln |T(k)|}{d \ln k} = \frac{d|T(k)|/|T(k)|}{dk/k} = \frac{d|T(k)|}{dk}\frac{k}{|T(k)|} \tag{9.3}$$

Definición 9.3: La **sensitividad del ángulo de fase ϕ_T de $T(k)$ con respecto al parámetro k** se define mediante

$$S_k^{\phi_T} \equiv \frac{d \ln \phi_T}{d \ln k} = \frac{d\phi_T/\phi_T}{dk/k} = \frac{d\phi_T}{dk}\frac{k}{\phi_T} \tag{9.4}$$

Las sensitividades de $T(k) = |T(k)|\, e^{j\phi_T}$, la magnitud $|T(k)|$ y el ángulo de fase ϕ_T con respecto al parámetro k están relacionados por la expresión

$$S_k^{T(k)} = S_k^{|T(k)|} + j\phi_T S_k^{\phi_T} \tag{9.5}$$

Nótese que, en general, $S_k^{|T(k)|}$ y $S_k^{\phi_T}$ son números complejos. En el caso especial en que k es real, tanto $S_k^{|T(k)|}$ como $S_k^{\phi_T}$ son reales. Cuando $S_k^{T(k)} = 0$, $T(k)$ es **insensitivo** a k.

EJEMPLO 9.1 Considere la función de respuesta de frecuencia

$$T(\mu) = e^{-j\omega\mu}$$

en donde $\mu \equiv k$. La magnitud de $T(\mu)$ es $|T(\mu)| = 1$, y el ángulo de fase $T(\mu)$ es $\phi_T = -\omega\mu$.

La sensitividad de $T(\mu)$ con respecto al parámetro μ es

$$S_\mu^{T(\mu)} = \frac{d(e^{-j\omega\mu})}{d_\mu} \frac{\mu}{e^{-j\omega\mu}} = -j\omega\mu$$

La sensitividad de la magnitud de $T(\mu)$ con respecto al parámetro μ es

$$S_\mu^{|T(\mu)|} = \frac{d|T(\mu)|}{\mu} \frac{\mu}{|T(\mu)|} = 0$$

La sensitividad del ángulo de fase de $T(\mu)$ con respecto al parámetro μ es

$$S_\mu^{\phi_T} = \frac{d\phi_T}{d\mu} \frac{\mu}{\phi_T} = -\omega \cdot \frac{\mu}{-\omega\mu} = 1$$

Nótese que

$$S_\mu^{|T(\mu)|} + j\phi_T S_\mu^{\phi_T} = -j\omega\mu = S_\mu^{T(\mu)}$$

El siguiente desarrollo se efectúa en términos de las funciones de transferencia. Sin embargo, todo es aplicable a las funciones de respuesta de frecuencia (para sistemas continuos) simplemente remplazando a s en todas las ecuaciones por $j\omega$, o $z = e^{j\omega T}$ para sistemas discretos.

Una clase muy importante de funciones de transferencia de sistemas tiene la forma:

$$T = \frac{A_1 + kA_2}{A_3 + kA_4} \tag{9.6}$$

en donde k es un parámetro y A_1, A_2, A_3 y A_4 son polinomios en s (o en z). Este tipo de dependencia entre un parámetro k y una función de transferencia T, es en general suficiente para incluir muchos de los sistemas considerados en este libro.

Para las funciones de transferencia con la forma de la ecuación (9.6), la *sensitividad de T con respecto al parámetro k* está dada por

$$S_k^T \equiv \frac{dT}{dk} \cdot \frac{k}{T} = \frac{k(A_2A_3 - A_1A_4)}{(A_3 + kA_4)(A_1 + kA_2)} \tag{9.7}$$

En general, S_k^T es una función de la variable compleja s (ó z).

EJEMPLO 9.2. La función de transferencia del sistema discreto en el tiempo que se presenta en la figura 9-1, es

$$T \equiv \frac{C}{R} = \frac{K}{z^3 + (a+b)z^2 + abz + K}$$

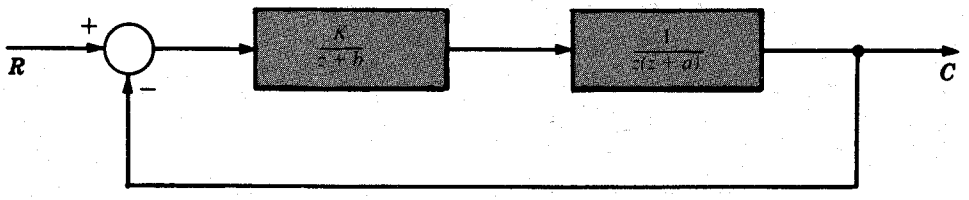


Figura 9-1

Si K es el parámetro de interés ($k \equiv K$), agrupamos los términos en T como sigue:

$$T = \frac{K}{[z^3 + (a+b)z^2 + abz] + K}$$

Comparando T con la ecuación (9.6), vemos que

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = 1 \qquad A_3 = z^3 + (a+b)z^2 + abz \qquad A_4 = 1$$

Si a es el parámetro de interés ($k \equiv a$), T puede escribirse nuevamente como

$$T = \frac{K}{[z^3 + bz^2 + K] + a[z^2 + bz]}$$

Comparando esta expresión con la ecuación (9.6), vemos que

$$A_1 = K \qquad A_2 = 0 \qquad A_3 = z^3 + bz^2 + K \qquad A_4 = z^2 + bz$$

Si b es el parámetro de interés ($k \equiv b$), T puede escribirse esta vez como

$$T = \frac{K}{[z^3 + az^2 + K] + b[z^2 + az]}$$

De nuevo, comparando esta expresión con la ecuación (9.6), vemos que

$$A_1 = K \qquad A_2 = 0 \qquad A_3 = z^3 + az^2 + K \qquad A_4 = z^2 + az$$

EJEMPLO 9.3. Para la red de adelanto que se muestra en la figura 9-2, la función de transferencia es

$$T \equiv \frac{E_0}{E_i} = \frac{1 + RCs}{2 + RCs}$$

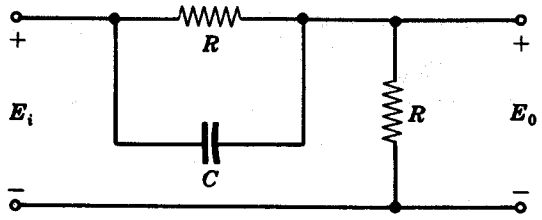


Figura 9-2

Si C (la capacidad) es el parámetro de interés, escribimos $T = [1 + C(Rs)]/[2 + C(Rs)]$. Comparando esta expresión con la ecuación (9.6), vemos que $A_1 = 1$, $A_2 = Rs$, $A_3 = 2$, $A_4 = Rs$.

EJEMPLO 9.4. Para el sistema del ejemplo 9.2, la *sensitividad de T con respecto a K* es

$$S_K^T = \frac{K[z^3 + (a+b)z^2 + abz]}{K[z^3 + (a+b)z^2 + abz + K]} = \frac{1}{1 + \dfrac{K}{z^3 + (a+b)z^2 + abz}}$$

La sensitividad de T con respecto al parámetro a es

$$S_a^T = \frac{-aK(z^2 + bz)}{K[z^3 + bz^2 + K + a(z^2 + bz)]} = \frac{-1}{1 + \dfrac{z^3 + bz^2 + K}{a(z^2 + bz)}}$$

La sensitividad de T con respecto al parámetro b es

$$S_b^T = \frac{-bK(z^2 + az)}{K[z^3 + az^2 + K + b(z^2 + az)]} = \frac{-1}{1 + \dfrac{z^3 + az^2 + K}{b(z^2 + az)}}$$

EJEMPLO 9.5. Para la red de adelanto de la figura 9-2, la sensitividad de T con respecto a la capacidad C es

$$S_C^T = \frac{C(2Rs - Rs)}{(2 + RCs)(1 + RCs)} = \frac{RCs}{(2 + RCs)(1 + RCs)} = \frac{1}{(1 + 2/RCs)(1 + 1/RCs)}$$

EJEMPLO 9.6. Los sistemas en malla abierta y malla cerrada que se presentan en la figura 9-3 tienen la misma planta y la misma función de transferencia del sistema global para $K = 2$.

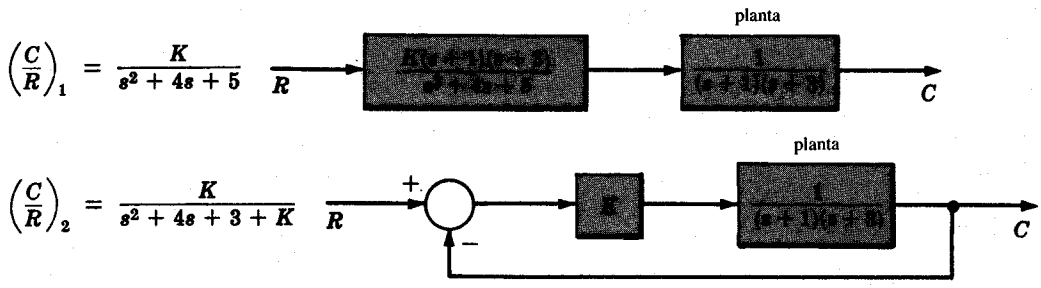


Figura 9-3

Aunque estos sistemas son precisamente equivalentes para $K = 2$, sus propiedades difieren de manera significativa para desviaciones pequeñas (y grandes) de K en relación con el valor $K = 2$. La función de transferencia del primer sistema es

$$T_1 \equiv \left(\frac{C}{R}\right) = \frac{K}{s^2 + 4s + 5}$$

Comparando esta expresión con la ecuación (*9.6*), tenemos $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = s^2 + 4s + 5$, $A_4 = 0$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*9.7*), obtenemos

$$S_K^{T_1} = \frac{K(s^2 + 4s + 5)}{(s^2 + 4s + 5)K} = 1$$

para todo K.

La función de transferencia del segundo sistema es

$$T_2 \equiv \left(\frac{C}{R}\right)_2 = \frac{K}{s^2 + 4s + 3 + K}$$

Comparando esta expresión con la ecuación (*9.6*), se tiene $A_1 = 0$, $A_2 = 1$, $A_3 = s^2 + 4s + 3$, $A_4 = 1$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*9.7*), obtenemos

$$S_K^{T_2} = \frac{K(s^2 + 4s + 3)}{(s^2 + 4s + 3 + K)(K)} = \frac{1}{1 + K/(s^2 + 4s + 3)}$$

Para $K = 2$, $S_K^{T_2} = 1/[1 + 2/(s^2 + s + 3)]$.

Nótese que la sensitividad T_1 del sistema en malla abierta se encuentra fija en 1 para todos los valores de la ganancia K. De otra parte, la sensitividad del sistema en malla cerrada es función de K y de la variable compleja s. Así, $S_K^{T_2}$ puede ajustarse en un problema de diseño, variando K o manteniendo las frecuencias en la función de entrada dentro de un rango apropiado.

Para $\omega < \sqrt{3}$ rad/seg, la sensitividad del sistema en malla cerrada es

$$S_K^{T_2} \simeq \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Así, el sistema con retroalimentación es 40% menos sensitivo que el sistema en malla abierta para frecuencias bajas. Para frecuencias altas, la sensitividad del sistema en malla cerrada se aproxima a 1, el mismo valor que para el sistema en malla abierta.

EJEMPLO 9.7. Suponga que G es una función de respuesta de frecuencia, puede ser $G(j\omega)$ para un sistema continuo, o $G(e^{j\omega T})$ para un sistema discreto en el tiempo. La función de respuesta de frecuencia para el sistema con retroalimentación unitaria (continuo o discreto en el tiempo), dado en la figura 9-4, se relaciona con la función de respuesta de frecuencia G de la malla directa por medio de

$$\frac{C}{R} = \left|\frac{C}{R}\right| e^{j\phi_{C/R}} = \frac{G}{1+G} = \frac{|G|e^{j\phi_G}}{1+|G|e^{j\phi_G}}$$

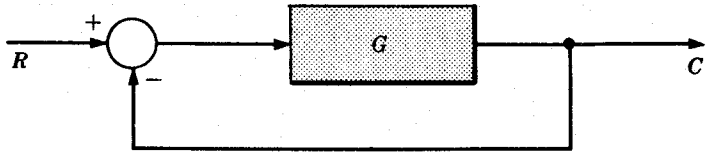


Figura 9-4

en donde $\phi_{C/R}$ es el ángulo de fase C/R y ϕ_G es el de G. *La sensitividad de C/R con respecto a $|G|$* está dada por

$$S_{|G|}^{C/R} = \frac{d(C/R)}{d|G|} \cdot \frac{|G|}{C/R} = \frac{e^{j\phi_G}}{\left(1+|G|e^{j\phi_G}\right)^2} \cdot \frac{|G|}{\dfrac{|G|e^{j\phi_G}}{1+|G|e^{j\phi_G}}}$$

$$= \frac{1}{1+|G|e^{j\phi_G}} = \frac{1}{1+G} \qquad (9.8)$$

Nótese que para $|G|$ grande la sensitividad de C/R con respecto a $|G|$ es relativamente pequeña.

EJEMPLO 9.8. Suponga que el sistema del ejemplo 9.7 es continuo, que $\omega = 1$ y para algún $G(j\omega)$, $G(j1) = 1 + j$. Entonces $|G(j\omega)| = \sqrt{2}$, $\phi_G = \pi/4$ rad, $(C/R)(j\omega) = \frac{3}{5} + j\frac{1}{5}$, $|(C/R)(j\omega)| = \sqrt{10}/5$, y $\phi_{C/R} = 0.3215$ rad.

Usando los resultados del ejemplo anterior, la *sensitividad* de $(C/R)(j\omega)$ *con respecto a* $|G(j\omega)|$ es

$$S_{|G(j\omega)|}^{(C/R)(j\omega)} = \frac{1}{2+j} = \frac{2}{5} - j\frac{1}{5}$$

Entonces, de la ecuación (9.5), tenemos

$$S_{|G(j\omega)|}^{|(C/R)(j\omega)|} = \frac{2}{5} = 0.4 \qquad \phi_{C/R} S_{|G(j\omega)|}^{\phi_{C/R}} = -\frac{1}{5} \qquad S_{|G(j\omega)|}^{\phi_{C/R}} = -\frac{1}{5(0.3215)} = -0.622$$

Estos valores reales de sensitividad indican que un cambio del 10% en $|G(j\omega)|$ producirán un cambio del 4% en $|C/R)(j\omega)|$, y un cambio de -6.22% en $\phi_{C/R}$.

Un atributo cualitativo del sistema, relacionado con su sensitividad, es su *robustez*. Se dice que un sistema es **robusto** cuando al operar no es sensitivo a la variación de los parámetros. La robustez puede caracterizarse en términos de la sensitividad de su función de transferencia o de respuesta de frecuencia, o de un conjunto de índices de desempeño con respecto a los parámetros del sistema.

9.3 Sensitividad de la salida con respecto a los parámetros para los modelos de ecuaciones diferenciales y de diferencia

El concepto de sensitividad también es aplicable a los modelos de sistemas expresados en el dominio del tiempo. **La sensitividad de la salida modelo *y* a cualquier parámetro *p*** está dada por

$$S_p^{y(t)} \equiv S_p^y = \frac{d(\ln y)}{d(\ln p)} = \frac{dy/y}{dp/p} = \frac{dy}{dp}\frac{p}{y}$$

Puesto que el modelo se define en el dominio del tiempo, la sensitividad usualmente se encuentra para la salida $y(t)$ en el dominio del tiempo. La derivada dy/dp se llama algunas veces **coeficiente de sensitividad de la salida**, el cual es una función del tiempo, como lo es la sensitividad S_p^y.

EJEMPLO 9.9. Determinamos la sensitividad de la salida $y(t) = x(t)$ con respecto al parámetro a, para el sistema diferencial $\dot{x} = ax + u$. La sensitividad es

$$S_a^y = \frac{dy}{da}\frac{a}{y} = \frac{dx}{da}\frac{a}{x}$$

Para determinar S_a^y, consideremos la *derivada con respecto al tiempo de dx/da*, e intercambiemos el orden de la derivación, esto es,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{da}\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{da}(ax + u)$$

Ahora definimos una nueva variable $v \equiv dx/da$. Entonces

$$\dot{v} = \frac{d}{da}(ax + u) = a\frac{dx}{da} + 1 \cdot x = av + x$$

La función de sensitividad S_a^y, entonces puede encontrarse resolviendo primero la ecuación diferencial del sistema para $x(t)$, porque $x(t)$, es la función de excitación en la ecuación anterior para $v(t)$. Las soluciones necesarias se desarrollaron en la sección 3.15 como

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}u(\tau)\,d\tau$$

y

$$v(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)}x(\tau)\,d\tau$$

porque $v(0) = 0$. La sensitividad de la salida variable en el tiempo se calcula a partir de esas dos funciones como

$$S_a^y = \frac{dx}{da}\frac{a}{x} = \frac{av(t)}{x(t)}$$

EJEMPLO 9.10. Para el sistema discreto definido por

$$x(k+1) = ax(k) + u(k)$$
$$y(k) = cx(k)$$

determinamos la sensitividad de la salida y con respecto al parámetro a, como sigue. Hagamos

$$v(k) \equiv \frac{\partial x(k)}{\partial a}$$

Entonces

$$v(k+1) = \frac{\partial x(k+1)}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}[ax(k) + u(k)]$$
$$= x(k) + a\frac{\partial x(k)}{\partial a} = av(k) + x(k)$$

y

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a} = \frac{\partial cx(k)}{\partial a} = c\frac{\partial x(k)}{\partial a} = cv(k)$$

Así, para determinar S_a^y, resolvemos primero las dos ecuaciones discretas:

$$x(k+1) = ax(k) + u(k)$$
$$v(k+1) = av(k) + x(k)$$

(por ejemplo, *véase* la sección 3.17). Entonces

$$S_a^y = \frac{\partial y(k)}{\partial a} \cdot \frac{a}{y(k)} = \frac{av(k)}{x(k)}$$

9.4 Clasificación de los sistemas continuos con retroalimentación

Considere la clase de sistemas canónicos con retroalimentación definidos en la figura 9-5. Para los sistemas continuos, la función de transferencia en malla abierta puede escribirse como

$$GH = \frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

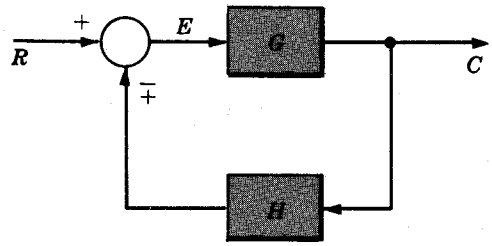


Figura 9-5

en donde K es una constante, $m \leq n$, y $-z_i$ y $-p_i$ son ceros y polos finitos, respectivamente, de GH. Si hay a ceros y b polos en el origen, entonces

$$GH = \frac{Ks^a\prod_{i=1}^{m-a}(s+z_i)}{s^b\prod_{i=1}^{n-b}(s+p_i)}$$

En lo que resta de este capítulo, solamente se considerarán los sistemas para los cuales $b \geq a$ y $l \equiv b - a$.

Definición 9.4: Un sistema canónico con retroalimentación cuya función de transferencia en malla abierta puede escribirse en la forma

$$GH = \frac{K\prod_{i=1}^{m-a}(s+z_i)}{s^l\prod_{i=1}^{n-a-l}(s+p_i)} \equiv \frac{KB_1(s)}{s^lB_2(s)} \qquad (9.9)$$

en donde $l \geq 0$ y $-z_i$ y $-p_i$ son ceros y polos finitos diferentes de cero de GH, respectivamente, se denomina **sistema tipo *l*.**

EJEMPLO 9.11. El sistema definido en la figura 9-6 es un *sistema del tipo 2*.

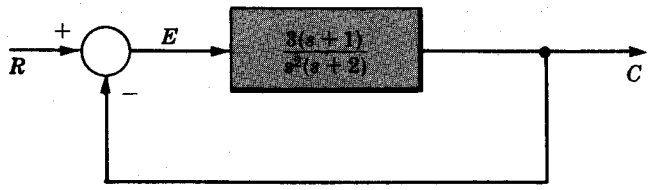


Figura 9-6

EJEMPLO 9.12. El sistema definido en la figura 9-7 es un *sistema del tipo 1*.

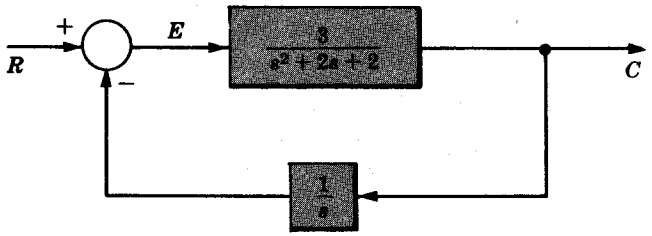


Figura 9-7

EJEMPLO 9.13. El sistema definido en la figura 9-8 es un *sistema del tipo 0*.

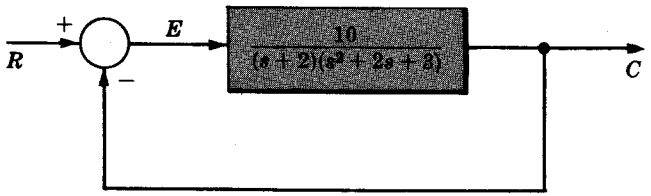


Figura 9-8

9.5 Constantes de error de posición para sistemas continuos con retroalimentación unitaria

Un criterio de la efectividad de la retroalimentación en un *sistema estable del tipo 1 con retroalimentación unitaria*, es la *constante de error de posición* (*paso*). Esta es una medida del error en estado estacionario entre la entrada y la salida cuando la entrada es una función paso unitario, esto es, la diferencia entre la entrada y la salida cuando el sistema se encuentra en estado estacionario y la entrada es un paso.

***Definición 9.5*:** La **constante de error de posición** K_p de un sistema del tipo l con retroalimentación unitaria se define como

$$K_p \equiv \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KB_1(s)}{s^l B_2(s)} = \begin{cases} \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & \text{para } l = 0 \\ \infty & \text{para } l > 0 \end{cases} \qquad (9.10)$$

El error en estado estacionario de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria cuando la entrada es una función paso unitario [$e(\infty) = 1 - c(\infty)$], está relacionado con la constante de error de posición

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1 + K_p} \qquad (9.11)$$

EJEMPLO 9.14. La constante de error de posición para un sistema del tipo 0 es finita. Esto es,

$$|K_p| = \left| \frac{KB_1(0)}{B_2(0)} \right| < \infty$$

El error en estado estacionario para un sistema del tipo 0 es distinto de cero y finito.

EJEMPLO 9.15. La constante de error de posición para un sistema del tipo 1 es

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{KB_1(0)}{sB_2(0)} = \infty$$

En consecuencia, el error en estado estacionario es $e(\infty) = 1/(1 + K_p) = 0$.

EJEMPLO 9.16. La constante de error de posición para un sistema del tipo 2 es

$$K_p = \lim_{s\to 0} \frac{KB_1(s)}{s^2 B_2(s)} = \infty$$

Entonces, el error en estado estacionario es $e(\infty) = 1/(1 + K_p) = 0$.

9.6 Constantes de error de velocidad para sistemas continuos con retroalimentación unitaria

Otro criterio de la efectividad de la retroalimentación en un *sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria* es la *constante de error de velocidad* (*rampa*). Esta es una medida del error en estado estacionario entre la entrada y la salida del sistema cuando la entrada es una función rampa unitaria.

Definición 9.6: La **constante de error de velocidad** K_v de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria está definida como

$$K_v \equiv \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KB_1(s)}{s^{l-1}B_2(s)} = \begin{cases} 0 & \text{para } l=0 \\ \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & \text{para } l=1 \\ \infty & \text{para } l>1 \end{cases} \qquad (9.12)$$

El error en estado estacionario de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria, cuando la entrada es una función rampa unitaria, está relacionado con la constante de error de velocidad mediante

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{K_v} \qquad (9.13)$$

EJEMPLO 9.17. La constante de error de velocidad para un sistema del tipo 0 es $K_v = 0$. Puesto que el error en estado estacionario es infinito.

EJEMPLO 9.18. La constante de error de velocidad para un sistema del tipo 1, $K_v = KB_1(0)/B_2(0)$, es finita. Por tanto, el error en estado estacionario es diferente de cero y finito.

EJEMPLO 9.19. La constante de error de velocidad para un sistema del tipo 2 es infinita. Por tanto, el error en estado estacionario es cero.

9.7 Constantes de error de aceleración para sistemas continuos con retroalimentación unitaria

Un tercer criterio de la efectividad de la retroalimentación en un sistema *estable del tipo l con retroalimentación unitaria* es la *constante de error de aceleración (parabólica)*. Esta es una medida del error en estado estacionario del sistema, cuando la entrada es una función parabólica unitaria; esto es, $r = t^2/2$ y $R = 1/s^3$.

Definición 9.7: La **constante de error de aceleración** K_a de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria se define como

$$K_a \equiv \lim_{s\to 0} s^2G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{KB_1(s)}{s^{l-2}B_2(s)} = \begin{cases} 0 & \text{para } l=0,1 \\ \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & \text{para } l=2 \\ \infty & \text{para } l>2 \end{cases} \qquad (9.14)$$

El error en estado estacionario de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria cuando la entrada es una función parabólica unitaria, está relacionado con la constante de error de aceleración mediante

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{K_a} \tag{9.15}$$

EJEMPLO 9.20. La constante de error de aceleración para un sistema del tipo 0 es $K_a = 0$. Por lo tanto, el error en estado estacionario es infinito.

EJEMPLO 9.21. La constante de error de aceleración para un sistema del tipo 1 es $k_a = 0$. Por lo tanto, el error en estado estacionario es infinito.

EJEMPLO 9.22. La constante de error de aceleración para un sistema del tipo 2, $K_a = KB_1(0)/B_2(0)$ es finita. Por lo tanto, el error en estado estacionario es diferente de cero y finito.

9.8 Constantes de error para sistemas discretos con retroalimentación unitaria

La función de transferencia en malla abierta para un sistema discreto del tipo l, puede escribirse como

$$GH = \frac{K(z+z_1)\cdots(z+z_m)}{(z-1)^l(z+p_1)\cdots(z+p_n)} = \frac{KB_1(z)}{(z-1)^l B_2(z)}$$

en donde $l \geq 0$, y $-z_i$ y $-p_i$ son los ceros y polos no unitarios de GH en el plano z.

Todos los resultados desarrollados en las secciones 9.5 a la 9.7 para los sistemas continuos con retroalimentación unitaria son iguales para los sistemas discretos con esta función de transferencia en malla abierta.

9.9 Tabla resumen para sistemas continuos y discretos en el tiempo, con retroalimentación unitaria

En la tabla 9.1 se dan las constantes de error en términos de α, en donde $\alpha = 0$ para sistemas continuos, y $\alpha = 1$ para sistemas discretos.

TABLA 9.1

Entrada	Paso Unitario		Rampa Unitaria		Parábola Unitaria	
Tipo de Sistema	K_p	Error en Estado Estacionario	K_v	Error en Estado Estacionario	K_a	Error en Estado Estacionario
Tipo *0*	$\frac{KB_1(\alpha)}{B_2(\alpha)}$	$\frac{1}{1+K_p}$	0	∞	0	∞
Tipo *1*	∞	0	$\frac{KB_1(\alpha)}{B_2(\alpha)}$	$\frac{1}{K_v}$	0	∞
Tipo *2*	∞	0	∞	0	$\frac{KB_1(\alpha)}{B_2(\alpha)}$	$\frac{1}{K_a}$

9.10 Constantes de error para sistemas más generales

Los resultados de las secciones 9.5 a la 9.9 son aplicables únicamente a sistemas lineales estables con retroalimentación unitaria. Sin embargo, ellos pueden extenderse fácilmente a sistemas lineales estables más generales. En la figura 9-9, T_d representa la función de transferencia de un sistema (ideal) deseado, y C/R, la del sistema real (una aproximación de T_d). R es la entrada en ambos sistemas, y E es la diferencia (el error) entre la salida deseada y la salida real. Para este sistema más general, a continuación se definen tres constantes de error y se relacionan con el error en estado estacionario.

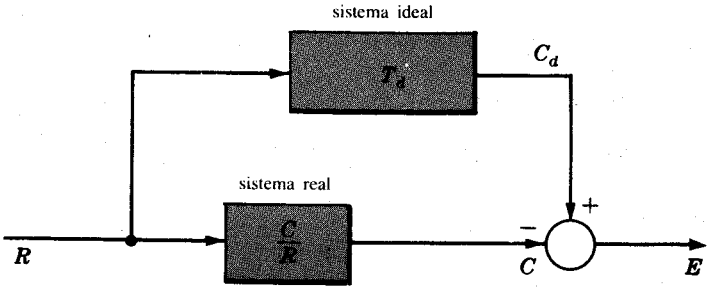


Figura 9-9

Definición 9.8: La **constante de error de paso** K_s se define para un sistema continuo como

$$K_s \equiv \frac{1}{\lim_{s \to 0} \left[T_d - \frac{C}{R} \right]} \tag{9.16}$$

El error en estado estacionario para el sistema general cuando la entrada es una función paso unitario, está relacionada con K_s mediante

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{K_s} \tag{9.17}$$

Definición 9.9: La **constante de error de rampa** K_r se define para un sistema continuo como

$$K_r \equiv \frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{1}{s} \left[T_d - \frac{C}{R} \right]} \tag{9.18}$$

El error en estado estacionario para el sistema general, cuando la entrada es una función rampa unitaria, está relacionada con K_r mediante

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{K_r} \tag{9.19}$$

Definición 9.10: La **constante de error parabólico** K_{pa} se define para sistemas continuos como

$$K_{pa} \equiv \frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2}\left[T_d - \frac{C}{R}\right]} \tag{9.20}$$

El error en estado estacionario para el sistema general, cuando la entrada es una función parabólica unitaria, está relacionada con K_{pa} mediante

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \frac{1}{K_{pa}} \tag{9.21}$$

EJEMPLO 9.23. El sistema con retroalimentación no unitaria, que se presenta en la figura 9-10, tiene la función de transferencia $C/R = 2/(s^2 + 2s + 4)$. Si la función de transferencia deseada a la cual se aproxima C/R es $T_d = \frac{1}{2}$, entonces

$$T_d - \frac{C}{R} = \frac{s(s+2)}{2(s^2+2s+4)}$$

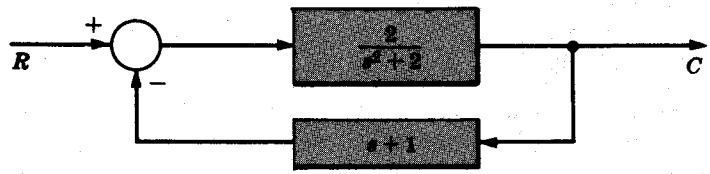


Figura 9-10

Entonces

$$K_s = \frac{1}{\lim_{s \to 0}\left[\frac{s(s+2)}{2(s^2+2s+4)}\right]} = \infty \qquad K_r = \frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left[\frac{s(s+2)}{2(s^2+2s+4)}\right]} = 4$$

$$K_{pa} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2}\left[\frac{s(s+2)}{2(s^2+2s+4)}\right]} = 0$$

EJEMPLO 9.24. Para el sistema del ejemplo 9.23 los errores en estado estacionario debidos a una entrada paso unitario a una entrada rampa unitaria y a una entrada parabólica unitaria, pueden encontrarse utilizando los resultados de ese ejemplo. Para una entrada paso unitario $e(\infty) = 1/K_s = 0$. Para una entrada rampa unitaria $e(\infty) = 1/K_r =$. Para una entrada parabólica unitaria, $e(\infty) = 1/K_{pa} = \infty$.

Para establecer relaciones entre las constantes de error generales K_s, K_r y K_{pa} y las constantes de error K_p, K_v y K_a para sistemas con retroalimentación unitaria, hacemos que el sistema real sea uno continuo con retroalimentación unitaria, y que el sistema deseado tenga una función de transferencia unitaria. Esto es, hacemos

$$T_d = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{R} = \frac{G}{1+G}$$

En consecuencia

$$K_s = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left[\dfrac{1}{1+G}\right]} = 1 + \lim_{s\to 0} G(s) = 1 + K_p \tag{9.22}$$

$$K_r = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left[\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{1}{1+G}\right)\right]} = \lim_{s\to 0} sG(s) = K_v \tag{9.23}$$

$$K_{pa} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left[\dfrac{1}{s^2}\left(\dfrac{1}{1+G}\right)\right]} = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = K_a \tag{9.24}$$

Problemas resueltos

Configuraciones de sistemas

9.1. Una planta dada tiene una función de transferencia G_2. Se desea un sistema que incluya a G_2 como elemento de salida y que tenga una función de transferencia C/R. Demuestre que, si no hay restricciones (tales como estabilidad) en los elementos compensadores, el sistema puede sintetizarse en uno en malla abierta o en otro con retroalimentación unitaria.

Si el sistema puede sintetizarse en uno en malla abierta, entonces tendrá la configuración dada en la figura 9-11, en donde G_1 es un elemento compensador desconocido. La función de transferencia del sistema es $C/R = G_1'G_2$, del cual $G_1' = (C/R)/G_2$. Este valor para G_1' permite la síntesis de C/R como un sistema en malla abierta.

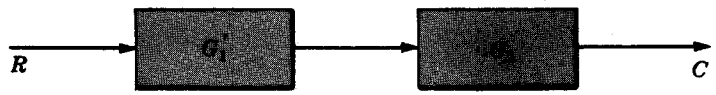


Figura 9-11

Si el sistema puede sintetizarse en uno con retroalimentación unitaria, entonces tendrá la configuración dada en la figura 9-12.

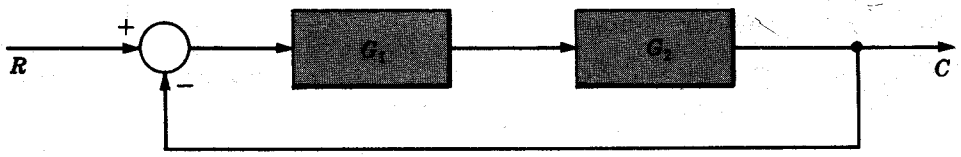


Figura 9-12

La función de transferencia del sistema es $C/R = G_1G_2/(1 + G_1G_2)$, de la cual

$$G_1 = \frac{1}{G_2}\left(\frac{C/R}{1 - C/R}\right)$$

Este valor para G_1 permite la síntesis de C/R como sistema con retroalimentación unitaria.

9.2. Utilizando los resultados del problema 9.1, demuestre cómo puede sintetizarse la función de transferencia del sistema $C/R = 2/(s^2 + s + 2)$ que incluye como su elemento de salida la planta $G_2 = 1/s(s + 1)$, *a*) como un sistema en malla abierta, *b*) como un sistema con retroalimentación unitaria.

a) Para el sistema en malla abierta

$$G_1' = \frac{C/R}{G_2} = \frac{2s(s+1)}{s^2+s+2}$$

y el diagrama de bloques del sistema está dado en la figura 9-13.

Figura 9-13

b) Para el sistema con retroalimentación unitaria,

$$G_1 = \frac{1}{G_2}\left(\frac{C/R}{1 - C/R}\right) = s(s+1)\left[\frac{2/(s^2+s+2)}{(s^2+s+2-2)/(s^2+s+2)}\right] = 2$$

y el diagrama de bloques del sistema se da en la figura 9-14.

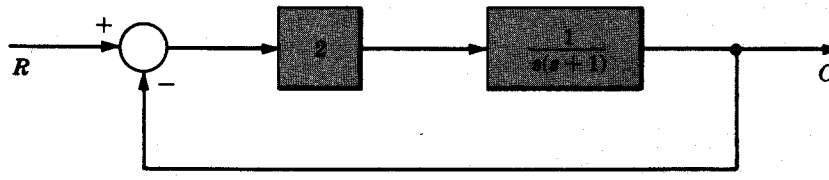


Figura 9-14

Sensitividad de la función de transferencia

9.3. Los dos sistemas que se dan en la figura 9-15 tienen la misma función de transferencia cuando $K_1 = K_2 = 100$.

$$T_1 = \left(\frac{C}{R}\right)_1\Bigg|_{\substack{K_1=100\\K_2=100}} = \frac{K_1K_2}{1+0.0099K_1K_2} = 100$$

$$T_2 = \left(\frac{C}{R}\right)_2\Bigg|_{\substack{K_1=100\\K_2=100}} = \left(\frac{K_1}{1+0.09K_1}\right)\left(\frac{K_2}{1+0.09K_2}\right) = 100$$

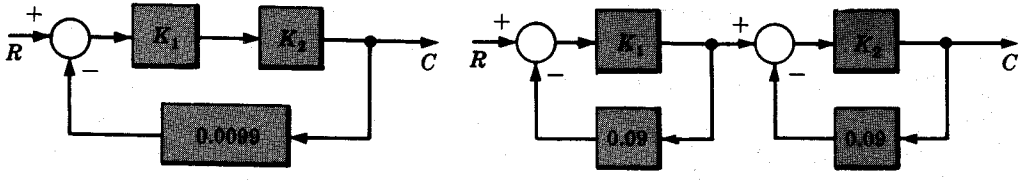


Figura 9-15

Compare las sensitividades de estos dos sistemas con respecto al parámetro K_1 para valores nominales $K_1 = K_2 = 100$.

Para el primer sistema, $T_1 = K_1K_2/[1 + K_1(0.0099K_2)]$. Comparando esta expresión con la ecuación (*9.6*) se obtiene $A_1 = 0, A_2 = K_2, A_3 = 1, A_4 = 0.0099K_2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*9.7*), obtenemos

$$S_{K_1}^{T_1} = \frac{K_1K_2}{(1+0.0099K_1K_2)(K_1K_2)} = \frac{1}{1+0.0099K_1K_2} = 0.01 \qquad \text{para } K_1 = K_2 = 100$$

Para el segundo sistema,

$$T_2 = \left(\frac{K_1}{1+0.09K_1}\right)\left(\frac{K_2}{1+0.09K_2}\right) = \frac{K_1K_2}{1+0.09K_1+0.09K_2+0.0081K_1K_2}$$

Comparando esta expresión con la ecuación (*9.6*) se obtiene $A_1 = 0, A_2 = K_2, A_3 = 1 + 0.09K_2, A_4 = 0.09 + 0.0081K_2$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (*9.7*), tenemos

$$S_{K_1}^{T_2} = \frac{K_1K_2(1+0.09K_2)}{(1+0.09K_1)(1+0.09K_2)(K_1K_2)} = \frac{1}{1+0.09K_1} = 0.1 \qquad \text{para } K_1 = K_2 = 100$$

Una variación del 10% en K_1 producirá una variación aproximada de 0.1% en T_1, y una de 1% en T_2. De este modo el segundo sistema T_2 es 10 veces más sensitivo que es el primero, a las variaciones en K_1.

9.4. El sistema en malla cerrada que se da en la figura 9-16, se define en términos de la función de respuesta de frecuencia del elemento $G(j\omega)$ da la trayectoria directa.

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)}$$

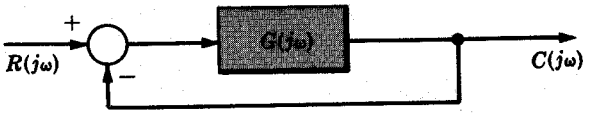


Figura 9-16

Suponga que $G(j\omega) = 1/(j\omega + 1)$. En el Capítulo 15 se demuestra que las funciones de respuesta de frecuencia $1/(j\omega + 1)$ pueden aproximarse a las gráficas de líneas rectas de magnitud y fase de $(G(j\omega)$, dadas en la figura 9-17.

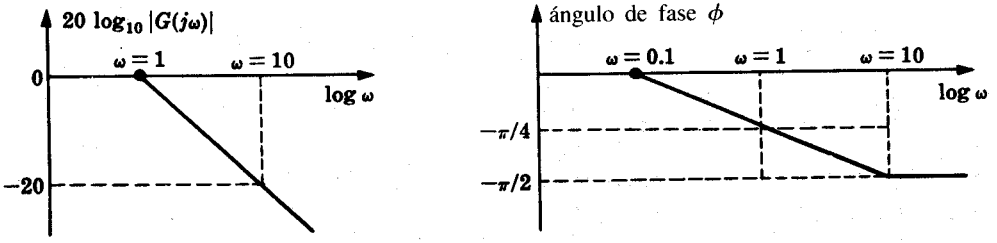


Figura 9-17

En $\omega = 1$ los valores verdaderos de $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ y de ϕ son -3 y $-\pi/4$, respectivamente. Para $\omega = 1$, encuentre:

a) La sensitividad de $|(C/R)(j\omega)|$ con respecto a $|G(j\omega)|$.

b) Utilizando el resultado de la parte *a*), determine un valor aproximado para el error en $|(C/R)(j\omega)|$ causado por las aproximaciones a línea recta para $1/(j\omega + 1)$.

a) Utilizando la ecuación (*9.8*), la sensitividad de $C/R(j\omega)$ con respecto a $|G(j\omega)|$ está dada por

$$S_{|G(j\omega)|}^{(C/R)(j\omega)} = \frac{1}{1 + G(j\omega)} = \frac{1}{2 + j\omega} = \frac{2 - j\omega}{4 + \omega^2}$$

Puesto que $|G(j\omega)|$ es real,

$$S_{|G(j\omega)|}^{|(C/R)(j\omega)|} = \text{Re}\, S_{|G(j\omega)|}^{(C/R)(j\omega)} = \frac{2}{4 + \omega^2}$$

Para $\omega = 1$, $S_{|G(j\omega)|}^{|(C/R)(j\omega)|} = 0.4$.

b) Para $\omega = 1$, el valor exacto de $|G(j\omega)|$ es $|G(j\omega)| = 1/\sqrt{2} = 0.707$. El valor aproximado tomado de la gráfica es $|G(j\omega)| = 1$. Entonces el porcentaje de error en la aproximación es $100(1 - 0.707)/0.707 = 41.4\%$. El porcentaje de error aproximado en $|(C/R)(j\omega)|$ es $41.4\ S_{|G(j\omega)|}^{|(C/R)(j\omega)|} = 16.6\%$.

9.5. Demuestre que las sensitividades de $T(k) = |T(k)|e^{j\phi_T}$, la magnitud $|T(k)|$ y el ángulo de fase ϕ_T con respecto al parámetro k están relacionados mediante

$$S_k^{T(k)} = S_k^{|T(k)|} + j\phi_T \cdot S_k^{\phi_T} \qquad \text{[ecuación (9.5)]}$$

Usando la ecuación (9.2),

$$S_k^{T(k)} = \frac{d \ln T(k)}{d \ln k} = \frac{d \ln \left[|T(k)| e^{j\phi_T} \right]}{d \ln k} = \frac{d \left[\ln |T(k)| + j\phi_T \right]}{d \ln k}$$

$$= \frac{d \ln |T(k)|}{d \ln k} + j \frac{d\phi_T}{d \ln k} = \frac{d \ln |T(k)|}{d \ln k} + j\phi_T \frac{d \ln \phi_T}{d \ln k} = S_k^{|T(k)|} + j\phi_T S_k^{\phi_T}$$

Nótese que si k es real, entonces $S_k^{|T(k)|}$ y $S_k^{\phi_T}$ son reales, y

$$S_k^{|T(k)|} = \text{Re}\, S_k^{T(k)} \qquad \phi_T S_k^{\phi_T} = \text{Im}\, S_k^{T(k)}$$

9.6. Demuestre que la sensitividad de la función de transferencia $T = (A_1 + kA_2)/(A_3 + kA_4)$ con respecto al parámetro k está dada por $S_k^T = k(A_2A_3 - A_1A_4)/(A_3 + kA_4)(A_1 + kA_2)$.

Por definición, la sensitividad de T con respecto al parámetro k es

$$S_k^T = \frac{d \ln T}{d \ln k} = \frac{dT}{dk} \cdot \frac{k}{T}$$

Ahora

$$\frac{dT}{dk} = \frac{A_2(A_3 + kA_4) - A_4(A_1 + kA_2)}{(A_3 + kA_4)^2} = \frac{A_2A_3 - A_1A_4}{(A_3 + kA_4)^2}$$

Así que

$$S_k^T = \frac{A_2A_3 - A_1A_4}{(A_3 + kA_4)^2} \cdot \frac{k(A_3 + kA_4)}{A_1 + kA_2} = \frac{k(A_2A_3 - A_1A_4)}{(A_3 + kA_4)(A_1 + kA_2)}$$

9.7. Considere el sistema del ejemplo 9.6 con la adición de una perturbación en la carga y una entrada de ruido, como se muestra en la figura 9-18. Demuestre que el controlador con retroalimentación mejora la sensitividad de la salida a la entrada de ruido y a la perturbación en la carga.

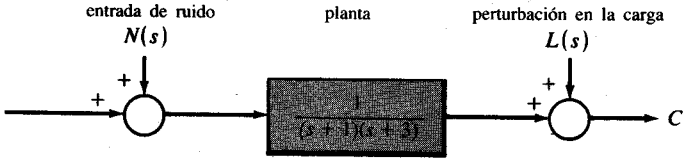


Figura 9-18

Para el sistema en malla abierta, la salida debida a la entrada de ruido y a la perturbación en la carga es

$$C(s) = L(s) + \frac{1}{(s+1)(s+3)}N(s)$$

independientemente de la acción del controlador en malla abierta. Para un sistema en malla cerrada.

$$C(s) = \frac{(s+1)(s+3)}{s^2+4s+5}L(s) + \frac{1}{s^2+4s+5}N(s)$$

Para frecuencias bajas, el sistema en malla cerrada atenúa la perturbación en la carga y la entrada de ruido, comparado con el sistema en malla abierta. En particular, el sistema en malla cerrada tiene una ganancia en estado estacionario o de c.c.:

$$C(0) = \frac{3}{5}L(0) + \frac{1}{5}N(0)$$

mientras que el sistema en malla abierta tiene una de

$$C(0) = L(0) + \frac{1}{3}N(0)$$

A frecuencias altas, estas ganancias son aproximadamente iguales.

Sensitividad de la salida del sistema en el dominio del tiempo

9.8. Para el sistema definido por

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\mathbf{p})\mathbf{x} + B(\mathbf{p})\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = C(\mathbf{p})\mathbf{x}$$

Demuestre que la matriz de sensitividades de salida

$$\left[\frac{\partial y_i}{\partial p_j}\right]$$

se determina mediante la solución de las ecuaciones diferenciales

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{u} \tag{9.25}$$

$$\dot{V} = AV + \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{x} + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{u} \tag{9.26}$$

con
$$\left[\frac{\partial y_i}{\partial p_j}\right] = CV + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{x} \tag{9.27}$$

en donde
$$V \equiv [v_{ij}] \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} \equiv \left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]$$

esto es, V es la matriz de las funciones de sensitividad. La derivada de la función de sensitividad v_{ij} está dada por

$$\dot{v}_{ij} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right)$$

Suponiendo que las variables de estado tienen derivadas continuas, podemos intercambiar el orden de las derivaciones total y parcial, de modo que

$$\dot{v}_{ij} = \frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)$$

En forma de matriz,

$$\dot{V} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}[A\mathbf{x} + B\mathbf{u}] = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{x} + A\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{u}$$

Puesto que $V = \partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{p}$, tenemos

$$\dot{V} = AV + \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{x} + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{u}$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial C\mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial C}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{x} + C\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{p}} = CV + \frac{\partial C}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{x}$$

Nótese que, en las ecuaciones anteriores, la derivada parcial de una matriz con respecto al vector $\mathbf{p}$ se sobreentiende que genera una serie de matrices, cada una de las cuales, cuando se multiplica por $\mathbf{x}$, genera una columna en la matriz resultante. Esto es, $(\partial A/\partial \mathbf{p})\mathbf{x}$ es una matriz con $(\partial A/\partial p_j)\mathbf{x}$ como j-ésima columna. Esto puede verificarse fácilmente, escribiendo de manera explícita todas las ecuaciones escalares y derivándolas término a término.

Clasificación de sistemas por tipo

9.9. En la figura 9-19 se representa el sistema canónico con retroalimentación

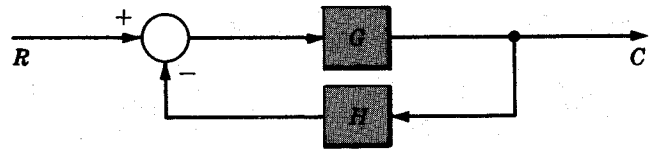


Figura 9-19

Clasifique este sistema de acuerdo con el tipo si

a) $G = \dfrac{1}{s} \qquad H = 1$

b) $G = \dfrac{5}{s(s+3)} \qquad H = \dfrac{s+1}{s+2}$

c) $G = \dfrac{2}{s^2+2s+5} \qquad H = s+5$

d) $G = \dfrac{24}{(2s+1)(4s+1)} \qquad H = \dfrac{4}{4s(3s+1)}$

e) $G = \dfrac{4}{s(s+3)} \qquad H = \dfrac{1}{s}$

a) $GH = \dfrac{1}{s}$; *tipo 1)*

b) $GH = \dfrac{5(s+1)}{s(s+2)(s+3)}$; *tipo 1)*

c) $GH = \dfrac{2(s+5)}{s^2+2s+5}$; *tipo 0)*

d) $GH = \dfrac{96}{4s(2s+1)(3s+1)(4s+1)} = \dfrac{1}{s\left(s+\frac{1}{2}\right)\left(s+\frac{1}{3}\right)\left(s+\frac{1}{4}\right)}$; *tipo 1)*

e) $GH = \dfrac{4}{s^2(s+3)}$; *tipo 2)*

9.10. Clasifique por tipo el sistema dado en la figura 9-20.

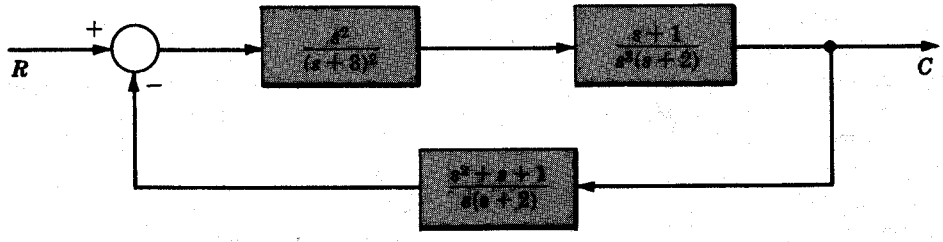


Figura 9-20

La función de transferencia en malla abierta de este sistema es

$$GH = \frac{s^2(s+1)(s^2+s+1)}{s^4(s+2)^2(s+3)^2} = \frac{(s+1)(s^2+s+1)}{s^2(s+2)^2(s+3)^2}$$

Por tanto es un sistema del *tipo 2*.

Constantes de error y errores en estado estacionario

9.11. Demuestre que el error en estado estacionario $e(\infty)$ de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria, cuando la entrada es una función paso unitario, está relacionada con la constante de error de posición, mediante

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = \frac{1}{1+K_p}$$

La razón de error (definición 7.5) en un sistema con retroalimentación unitaria negativa está dada por la ecuación (7.4), con $H = 1$, esto es, $E/R = 1/(1+G)$. Para $R = 1/s$, $E = (1/s)(1/(1+G))$. A partir del teorema del valor final, obtenemos

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s}{s[1+G(s)]}\right) = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0}G(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

en donde se ha utilizado la definición $K_p \equiv \lim_{s\to 0}G(s)$.

9.12. Demuestre que el error en estado estacionario $e(\infty)$ de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria con una función de entrada rampa unitaria, está relacionado con la constante de error de velocidad mediante $e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t) = 1/K_v$.

Tenemos $E/R = 1/(1+G)$, y $E = (1/s^2)(1/(1+G))$ para $R = 1/s^2$. Puesto que $G = KB_1(s)/s^lB_2(s)$, por la definición 9.4,

$$E = \frac{1}{s^2}\left[\frac{s^lB_2(s)}{s^lB_2(s)+KB_1(s)}\right]$$

Para $l > 0$, tenemos

$$sE(s) = \frac{B_2(s)}{sB_2(s)+KB_1(s)/s^{l-1}}$$

en donde $l - 1 \geq 0$. Ahora podemos utilizar el teorema del valor final, como se hizo en el problema anterior, porque se satisface la condición para la aplicación de este teorema. Es decir, para $l > 0$ tenemos

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } l > 1 \\ \dfrac{B_2(0)}{KB_1(0)} & \text{para } l = 1 \end{cases}$$

$B_1(0)$ y $B_2(0)$ son finitas y diferentes de cero, por la definición 9.4; en consecuencia existe el límite (es decir, es finito).

No podemos evocar el teorema del valor final para el caso en que $l = 0$ porque

$$sE(s)|_{l=0} = \frac{1}{s}\left[\frac{B_2(s)}{B_2(s) + KB_1(s)}\right]$$

y el límite de la cantidad del lado derecho no existe cuando $s \to 0$. Sin embargo, podemos utilizar el siguiente argumento para $l = 0$. Puesto que el sistema es estable, $B_2(s) + KB_1(s) = 0$ tiene raíces únicamente en el lado izquierdo del plano. Entonces puede escribirse E con su denominador en la forma factorizada general:

$$E = \frac{B_2(s)}{s^2 \prod_{i=1}^{r} (s + p_i)^{n_i}}$$

en donde $\mathrm{Re}(p_i) > 0$ y $\sum_{i=1}^{r} n_i = n - a$ (*véase* la definición 9.4), esto es, puede haber algunas raíces repetidas. Expandiendo E en fracciones parciales [ecuación (4.10a)], obtenemos

$$E = \frac{c_{20}}{s^2} + \frac{c_{10}}{s} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s + p_i)^k}$$

en donde b_n en la ecuación (*4.10a*) es cero porque el grado del denominador es mayor que el del numerador ($m < n$). Invirtiendo $E(s)$ (sección 4.8), logramos

$$e(t) = c_{20}t + c_{10} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-p_i t}$$

Puesto que $\mathrm{Re}(p_i) > 0$ y c_{20} y c_{10} son constantes finitas diferentes de cero (E es una expresión algebraica racional), entonces

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} (c_{20}t) + c_{10} = \infty$$

Agrupando los resultados, tenemos

$$e(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{para } l = 0 \\ \dfrac{B_2(0)}{KB_1(0)} & \text{para } l = 1 \\ 0 & \text{para } l > 1 \end{cases}$$

O de modo equivalente,

$$\frac{1}{e(\infty)} = \begin{cases} 0 & \text{para } l = 0 \\ \dfrac{KB_1(0)}{B_2(0)} & \text{para } l = 1 \\ \infty & \text{para } l > 1 \end{cases}$$

Estos tres valores para $1/e(\infty)$ definen a K_v; así

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v}$$

9.13. En la figura 9-21, encuentre las constantes de error de posición, velocidad y aceleración.

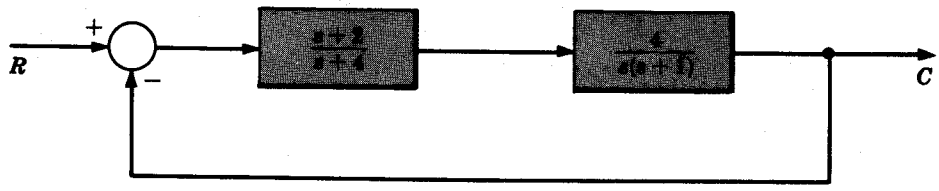


Figura 9-21

La constante de error de posición:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4(s+2)}{s(s+1)(s+4)} = \infty$$

La constante de error de velocidad:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4(s+2)}{(s+1)(s+4)} = 2$$

La constante de error de aceleración:

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{4s(s+2)}{(s+1)(s+4)} = 0$$

9.14. En el sistema del problema 9.13, encuentre el error en estado estacionario para *a*) una entrada paso unitario, *b*) una entrada rampa unitaria, *c*) una entrada parabólica unitaria.

a) El error en estado estacionario para una entrada paso unitario está dado por $e(\infty) = 1/(1 + K_p)$. Utilizando el resultado del problema 9.13 se obtiene $e(\infty) = 1/(1 + \infty) = 0$.

b) El error en estado estacionario para una entrada rampa unitaria está dado por $e(\infty) = 1/K_v$. Utilizando de nuevo el resultado del problema 9.13, logramos $e(\infty) = \frac{1}{2}$.

c) El error en estado estacionario para una entrada parabólica unitaria está dado por $e(\infty) = 1/K_a$. Entonces $e(\infty) = 1/0 = \infty$.

9.15. La figura 9-22 representa de manera aproximada un diferenciador. Su función de transferencia es $C/R = Ks/[s(\tau s + 1) + K]$. Nótese que $\lim_{\tau\to 0\ K\to\infty} C/R = s$, esto es, en el límite, C/R es un diferenciador puro. Encuentre las constantes de error de paso, de rampa y parabólico en este sistema, en donde se supone que el sistema T_d ideal es un diferenciador.

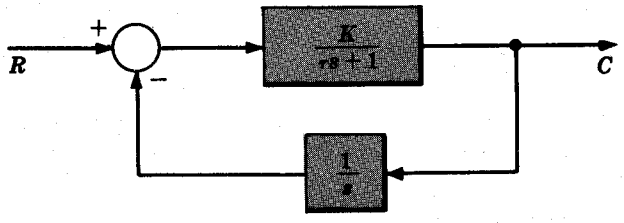


Figura 9-22

Utilizando la notación de la sección 9.10 $T_d = s$ y $T_d - C/R = s^2(\tau s + 1)/[s(\tau s + 1) + K]$. Aplicando las definiciones 9.8, 9.9 y 9.10 se obtiene

$$K_s = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left[T_d - \frac{C}{R}\right]} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left[\frac{s^2(\tau s+1)}{s(\tau s+1)+K}\right]} = \infty$$

$$K_r = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left[T_d - \frac{C}{R}\right]} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left[\frac{s(\tau s+1)}{s(\tau s+1)+K}\right]} = \infty$$

$$K_{pa} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2}\left[T_d - \frac{C}{R}\right]} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\left[\frac{\tau s+1}{s(\tau s+1)+K}\right]} = K$$

9.16. Encuentre el valor en estado estacionario de la diferencia (error) entre las salidas de un diferenciador puro y el diferenciador aproximado del problema anterior, para *a*) una entrada paso unitario, *b*) una entrada rampa unitaria, *c*) una entrada parabólica unitaria.

Del problema 9.15, $K_s = \infty$, $K_r = \infty$ y $K_{pa} = K$.

a) El error en estado estacionario para la entrada paso unitario es $e(\infty) = 1/K_s = 0$.

b) El error en estado estacionario para la entrada rampa unitaria es $e(\infty) = 1/K_r = 0$.

c) El error en estado estacionario para la entrada parabólica unitaria es $e(\infty) = 1/K_{pa} = 1/K$.

9.17. Dado el sistema estable del tipo 2 con retroalimentación unitaria, que se muestra en la figura 9-23, encuentre *a*) las constantes de error de posición, de velocidad y de aceleración, *b*) el error en estado estacionario cuando la entrada es $R = \frac{3}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{2s^3}$.

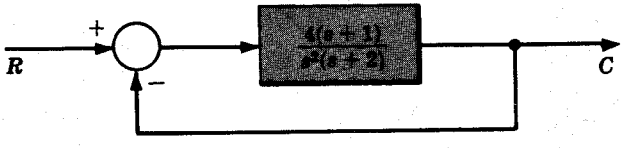


Figura 9-23

a) Utilizando la última fila de la tabla 9.1 (sistemas del *tipo 2*), las constantes de error son

$$K_p = \infty, \quad K_v = \infty, \quad K_a = (4)(1)/2 = 2.$$

b) Los errores en estado estacionario para las entradas paso unitario, rampa unitaria y parabólica unitaria, se obtienen de la misma fila de la tabla y están dadas por: $e_1(\infty) = 0$ para el paso unitario $e_2(\infty) = 0$ para la rampa unitaria; $e_3(\infty) = \frac{1}{2}$ para la parábola unitaria.

Puesto que el sistema es lineal, los errores pueden superponerse. Así, el error en estado estacionario cuando la entrada es $R = \dfrac{3}{s} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{2s^3}$ está dado por

$$e(\infty) = 3e_1(\infty) - e_2(\infty) + \tfrac{1}{2}e_3(\infty) = \tfrac{1}{4}.$$

Problemas suplementarios

9.18. Pruebe la validez de la ecuación (*9.17*). (*Sugerencia: véanse* los problemas 9.11 y 9.12).

9.19. Pruebe la validez de la ecuación (*9.19*). (*Sugerencia: véanse* los problemas 9.11 y 9.12).

9.20. Pruebe la validez de la ecuación (*9.21*). (*Sugerencia: véanse* los problemas 9.11 y 9.12).

9.21. Determine la sensitividad del sistema del problema 7.9, con respecto a las variaciones de cada uno de los parámetros K_1, K_2 y p, individualmente.

9.22. Genere una expresión, en términos de las sensitividades determinadas en el problema 9.21, que relacione la variación total en la función de transferencia del sistema en el problema 7.9, con respecto a las variaciones en K_1 K_2 y p.

9.23. Demuestre que el error en estado estacionario $e(\infty)$ de un sistema estable del tipo l con retroalimentación unitaria, con una entrada parabólica unitaria, está relacionada con la constante de error de aceleración mediante $e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = 1/K_a$. (*Sugerencia: véase* el problema 9.12).

9.24. Verifique las ecuaciones (*9.26*) y (*9.27*) efectuando todas las derivaciones sobre el conjunto total de ecuaciones diferenciales simultáneas que hacen la ecuación (*9.25*).

Respuestas a algunos problemas suplementarios

9.21. $S_{K_1}^{C/R} = \dfrac{s+p}{s+p-K_1K_2}$ $\qquad S_{K_2}^{C/R} = \dfrac{K_1K_2}{s+p-K_1K_2}$ $\qquad S_p^{C/R} = \dfrac{-p}{s+p-K_1K_2}$

9.22. $\Delta\dfrac{C}{R} = \dfrac{(s+p)\Delta K_1 + (K_1K_2)\Delta K_2 - p\Delta p}{s+p-K_1K_2}$

Capítulo 10

Análisis y diseño de sistemas de control con retroalimentación: objetivos y métodos

10.1 Introducción

En los primeros nueve capítulos se han presentado los conceptos básicos, las herramientas matemáticas y las propiedades de los sistemas de control con retroalimentación. Ahora la atención se enfoca hacia nuestra meta principal: *el análisis y el diseño* de los sistemas de control con retroalimentación.

Los métodos que se presentarán en los próximos ocho capítulos son técnicas lineales, aplicables a los modelos lineales. Sin embargo, bajo circunstancias apropiadas, una o más de ellas pueden emplearse para algunos problemas de sistemas de control no lineales, generando de ese modo diseños aproximados cuando el método particular es suficientemente sólido. En el Capítulo 19 se presentan las técnicas para resolver los problemas de sistemas de control representados por modelos no lineales.

Este capítulo se dedica principalmente a hacer explícitos los objetivos y a describir de manera breve la metodología del análisis y el diseño. También incluye, en la sección 10.8, una aproximación al diseño de sistemas digitales, la cual puede considerarse independientemente de las diferentes aproximaciones que se desarrollan en los capítulos siguientes.

10.2 Objetivos del análisis

Los tres objetivos predominantes del análisis de sistemas de control con retroalimentación son la determinación de las siguientes características del sistema:

1. El grado o alcance de la estabilidad del sistema
2. El desempeño en estado estacionario
3. El desempeño transitorio

Saber si un sistema es o no absolutamente estable es una información insuficiente para la mayor parte de los propósitos. Si un sistema es estable, usualmente queremos saber qué tan cerca está de ser inestable. Necesitamos determinar su *estabilidad relativa*.

En el Capítulo 3 aprendimos que la solución completa de las ecuaciones que describen un sistema puede dividirse en dos partes. La primera, la respuesta en estado estacionario, es la parte de la solución completa que no se aproxima a cero cuando el tiempo tiende a infinito. La segunda, la respuesta transitoria, es la parte de la solución completa que se aproxima a cero (o disminuye) cuando el tiempo tiende a infinito. Pronto veremos que hay una fuerte correlación entre la estabilidad relativa y la respuesta transitoria de los sistemas de control con retroalimentación.

10.3 Métodos de análisis

El procedimiento general para analizar un sistema de control lineal es el siguiente:

1. Determinar las ecuaciones o la función de transferencia para cada uno de sus componentes.
2. Escoger un esquema para representarlo (diagrama de bloques o grafo de flujo de señales).
3. Formular el modelo del mismo conectando apropiadamente sus componentes (bloques o nodos y ramas).
4. Determinar las características de su respuesta.

Existen varios métodos para determinar las características de las respuestas de los sistemas lineales. La solución directa del sistema de ecuaciones puede emplearse para encontrar las soluciones en estado estacionario y transitoria (Capítulos 3 y 4). Esta técnica puede ser algo engorrosa para sistemas superiores a los de segundo orden, a la vez que se hace difícil estudiar la estabilidad relativa en el dominio del tiempo.

El analista de sistemas de control dispone de cuatro métodos gráficos, los cuales son más simples y directos que los métodos en el dominio del tiempo para modelos lineales prácticos de sistemas de control con retroalimentación. Ellos son:

1. El método del lugar de las raíces
2. Representaciones de diagramas de Bode
3. Diagramas de Nyquist
4. Cartas de Nichols

Los tres últimos son técnicas en el dominio de la frecuencia. Estos cuatro métodos se consideran en detalle en los Capítulos 13, 15, 11 y 17, respectivamente.

10.4 Objetivos del diseño

La meta básica en el diseño de sistemas de control es alcanzar las *especificaciones de desempeño*, las cuales son las restricciones que se aplican a las características de respuesta del sistema. Estas especificaciones pueden establecerse de diversas maneras, generalmente las dos siguientes:

1. Especificaciones en el dominio de la frecuencia (cantidades pertinentes expresadas como funciones de la frecuencia)
2. Especificaciones en el dominio del tiempo (en términos de respuesta de tiempo)

Las características que se desean para el sistema pueden prescribirse en cualquiera o ambas de las dos maneras anteriores. En general, ellas especifican tres propiedades importantes de los sistemas dinámicos:

1. Velocidad de respuesta
2. Estabilidad relativa
3. Exactitud del sistema o error permisible

Las **especificaciones en el dominio de la frecuencia** tanto para sistemas continuos como para sistemas discretos, a menudo se establecen en una o más de las siguientes siete maneras. Para generalizar, definimos una **función unificada de respuesta de frecuencia en malla abierta** $GH(\omega)$:

$$GH(\omega) \equiv \begin{cases} GH(j\omega) & \text{para sistemas continuos} \\ GH(e^{j\omega T}) & \text{para sistemas discretos} \end{cases} \qquad (10.1)$$

1. Margen de ganancia

El margen de ganancia es una medida de la estabilidad relativa que se define como la magnitud del universo de la función de transferencia en malla abierta, evaluada en la frecuencia ω_π en la cual el ángulo de fase es $-180°$ (*véase* el Capítulo 6). Esto es,

$$\text{Margen de ganancia} \equiv \frac{1}{|GH(\omega_\pi)|} \qquad (10.2)$$

en donde arg $GH(\omega_\pi) = -180° = -\pi$ radianes, y ω_π se llama frecuencia de **cruce de fase**.

2. Margen de fase Φ_{MF}

El margen de fase Φ_{MF} es una medida de la estabilidad relativa, definida como 180° más el ángulo de fase Φ_1 de la función de transferencia en malla abierta a ganancia unitaria. Esto es

$$\Phi_{MF} \equiv [180 + \arg GH(\omega_1)] \text{ grados} \qquad (10.3)$$

en donde $|GH(\omega_1)| = 1$ y ω_1 se llama frecuencia de **cruce de ganancia**.

EJEMPLO 10.1 En la figura 10-1 se ilustran los márgenes de ganancia y de fase de un sistema de control típico continuo en el tiempo con retroalimentación.

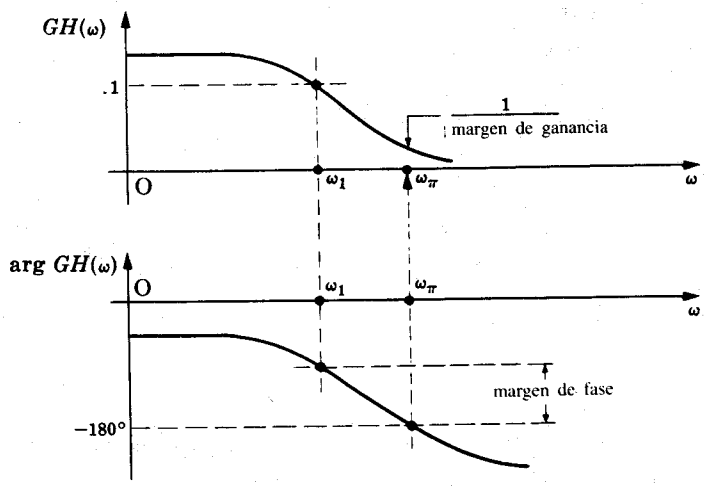


Figura 10-1

3. Tiempo de retardo T_d

El tiempo de retardo T_d, interpretado como una especificación en el dominio de la frecuencia, es una medida de la velocidad de respuesta, y está dado por

$$T_d(\omega) = -\frac{d\gamma}{d\omega} \tag{10.4}$$

en donde $\gamma = \arg(C/R)$. Usualmente se especifica el valor promedio de $T_d(\omega)$ sobre las frecuencias de interés.

4. Ancho de Banda (AB)

El ancho de banda de un sistema se definió en el Capítulo 1, de manera aproximada, como el intervalo de frecuencias sobre el cual el sistema responde satisfactoriamente.

El desempeño satisfactorio se determinó mediante la aplicación y las características del sistema en particular. Por ejemplo, los amplificadores de sonido a menudo se comparan con respecto a su ancho de banda. Un amplificador de sonido ideal de alta fidelidad tiene una *respuesta de frecuencia plana* desde 20 hasta 20,000 Hz. Esto es, tiene una banda de paso o un ancho de banda de 19,980 Hz (usualmente redondeado a 20,000 Hz). Respuesta de frecuencia plana significa que la *relación de magnitudes* de salida a entrada es, en esencia, constante sobre el ancho de banda. Por tanto, un amplificador con ancho de banda de 20,000 Hz reproduce de manera fiel las señales en el espectro de audio. La relación de magnitudes es el valor absoluto de la función de respuesta de frecuencia del sistema.

En la figura 10-2 se muestra la respuesta de frecuencia de un amplificador de sonido de alta fidelidad. La relación de magnitudes es 0.707 de, o aproximadamente, 3 dB por debajo de su máximo en las **frecuencias de corte**

$$f_{c1} = 20 \text{ Hz} \qquad f_{c2} = 20{,}000 \text{ Hz}$$

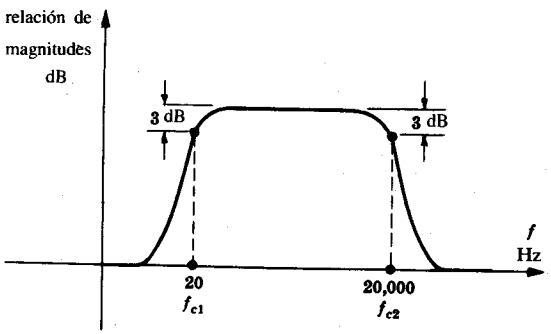


Figura 10-2

"dB" es la abreviatura de **decibel**, definido mediante la siguiente ecuación

$$\text{dB} \equiv 20 \log_{10}(\text{relación de magnitudes}) \tag{10.5}$$

A menudo se define el ancho de banda de un sistema como el intervalo de frecuencias sobre el cual la relación de magnitudes no difiere en más de -3 dB de su valor a la frecuencia especificada. Pero no siempre. En general, se hace claro el significado preciso de ancho de banda mediante la descripción del problema. En cualquier caso, el ancho de banda, generalmente es una medida de la velocidad de respuesta de un sistema.

La frecuencia de cruce de ganancia ω_1 definida en la ecuación (*10.3*) a menudo es una buena aproximación del ancho de banda de un sistema en malla cerrada.

En los Capítulos 1 y 2 (especialmente en la sección 2.4) se presentaron la noción de muestreo de señal, y de *tiempo de muestreo uniforme* T, para sistemas que contienen señales tanto discretas como continuas en el tiempo, y ambos tipos de elementos, los cuales incluyen muestreadores, dispositivos de sostenimiento y computadores. El valor de T es un parámetro de diseño para tales sistemas, y su elección depende de las consideraciones de exactitud y de costos. El *teorema de muestreo* [9.10] proporciona un límite superior para T, al requerir que la tasa de muestreo sea por lo menos el doble de la del componente de mayor frecuencia $f_{\max}$ de la señal muestreada, esto es, $T \leq \dfrac{1}{2f_{\max}}$. En la práctica, podríamos utilizar la frecuencia de corte f_{c2} (como en la figura 10-2) para $f_{\max}$, y una regla práctica sería escoger a T en el rango $\dfrac{1}{10f_{c2}} \leq T \leq \dfrac{1}{6f_{c2}}$. Sin embargo, es posible que otros requerimientos de diseño necesiten valores aún menores de T. De otra parte, el mayor valor de T que sea consistente con las especificaciones a menudo produce el costo más bajo para los componentes.

5. Tasa de corte

La tasa de corte es la tasa de frecuencia a la cual la relación de magnitudes disminuye más allá de la frecuencia de corte ω_c. Por ejemplo, la tasa de corte puede especificarse como 6 dB/octava. Una octava es un cambio por un factor de dos en frecuencia.

6. Pico de resonancia M_p

El pico de resonancia M_p, una medida de la estabilidad relativa, es el valor máximo de la magnitud de la respuesta de frecuencia en malla cerrada. Esto es,

$$M_p \equiv \max_{\omega} \left| \frac{C}{R} \right| \tag{10.6}$$

7. Frecuencia resonante ω_p

La frecuencia resonante ω_p es la frecuencia a la cual ocurre M_p.

EJEMPLO 10.2. En la figura 10-3 se ilustran el ancho de banda (AB), la frecuencia de corte ω_c, el pico de resonancia M_p y la frecuencia resonante ω_p, para un sistema continuo subamortiguado de segundo orden.

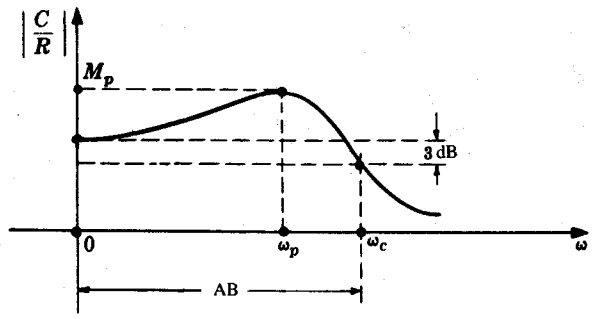


Figura 10-3

Es costumbre definir las **especificaciones en el dominio del tiempo** en términos de las respuestas paso, rampa y parábola unitarios. Cada respuesta tiene un componente en estado estacionario y otro transitorio.

El *desempeño en estado estacionario*, en términos del error en estado estacionario, es una medida de la exactitud del sistema cuando se aplica una entrada específica. Por ejemplo, las constantes K_p, K_v y K_a definidas en el Capítulo 9 son indicadores importantes del desempeño en estado estacionario.

El *desempeño transitorio* a menudo se describe en términos de la respuesta a la función paso unitario. Las especificaciones típicas son:

1. Sobretensión

La sobretensión es la diferencia máxima entre las soluciones transitoria y en estado estacionario para una entrada paso unitario. Es una medida de la estabilidad relativa, y a menudo se representa como un porcentaje del valor final de la salida (solución en estado estacionario).

Las cuatro siguientes especificaciones son medidas de la velocidad de respuesta.

2. Tiempo de retardo T_r

El tiempo de retardo T_r, interpretado como una especificación en el dominio del tiempo, se define a menudo como el tiempo requerido para que la respuesta a una entrada paso unitario alcance el 50% de su valor final.

3. Tiempo de subida T_s

Es costumbre definir el tiempo de subida T_s como el tiempo necesario para que la respuesta a una entrada paso unitario suba del 10% al 90% de su valor final.

4. Tiempo de acomodación T_a

La mayor parte de las veces el tiempo de acomodación se define como el tiempo requerido

para que la respuesta a una entrada paso unitario alcance y permanezca dentro de un porcentaje especificado de su valor final (usualmente el 2% o el 5%).

5. Constante de tiempo dominante

La constante de tiempo dominante τ, una medida alterna del tiempo de acomodación, a menudo se define como la constante de tiempo asociada con el término que domina la respuesta transitoria.

La constante de tiempo dominante se define en términos del carácter exponencialmente decadente de la respuesta transitoria. Por ejemplo, para sistemas continuos subamortiguados de primer y segundo orden, los términos transitorios tienen la forma $Ae^{-\alpha t}$ y $Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \Phi)$, respectivamente ($\alpha > 0$). En cada caso, la disminución está regida por $e^{-\alpha t}$. La constante de tiempo τ se define como el tiempo en el cual el exponente $-\alpha t = -1$, esto es, cuando la exponencial alcanza el 37% de su valor inicial. Por tanto $\tau = 1/\alpha$.

Para sistemas de control continuos con retroalimentación de orden superior dos, la constante de tiempo dominante algunas veces puede calcularse a partir de la constante de tiempo de un sistema subamortiguado de segundo orden que se aproxime al sistema superior. Puesto que

$$\tau \leq \frac{1}{\zeta\omega_n} \tag{10.7}$$

ζ y ω_n (Capítulo 3) son los indicadores de desempeño más significativos, definidos para sistemas de segundo orden pero también útiles para sistemas de orden superior. A menudo las especificaciones se dan en términos de ζ y ω_n.

En el Capítulo 14 este concepto se desarrolla más en detalle para sistemas tanto continuos como discretos, en términos de las aproximaciones de polo-cero dominantes.

EJEMPLO 10.3. En la figura 10-4, la gráfica de la respuesta paso unitario de un sistema continuo subamortiguado de segundo orden ilustra las especificaciones en el dominio del tiempo.

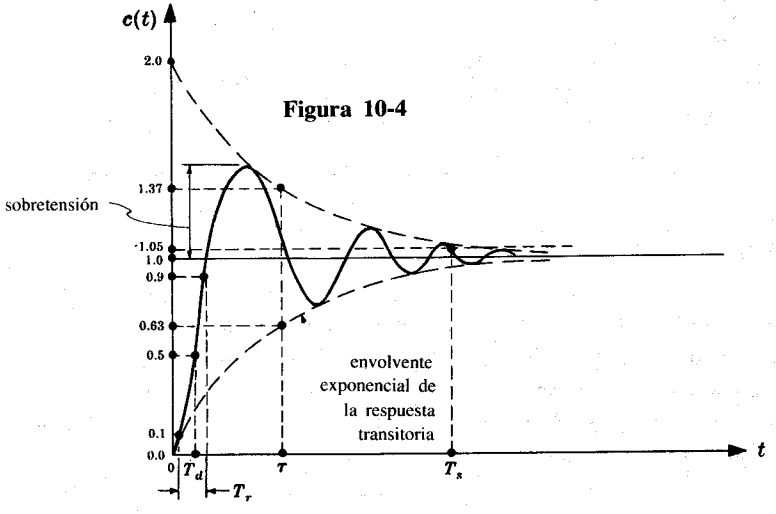


Figura 10-4

10.5 Compensación del sistema

Suponemos primero, que G y H son configuraciones fijas de los componentes sobre las cuales el diseñador no tiene control. Para cumplir las especificaciones de desempeño de los sistemas de control con retroalimentación, normalmente se introducen al sistema apropiados componentes de *compensación* (algunas veces llamados *ecualizadores*) los cuales pueden consistir de elementos pasivos o activos, varios de ellos se trataron en los Capítulos 2 y 6. Estos componentes pueden introducirse en la trayectoria directa (*compensación en cascada*) o en la trayectoria de retroalimentación (*compensación por retroalimentación*), como se muestra en la figura 10-5:

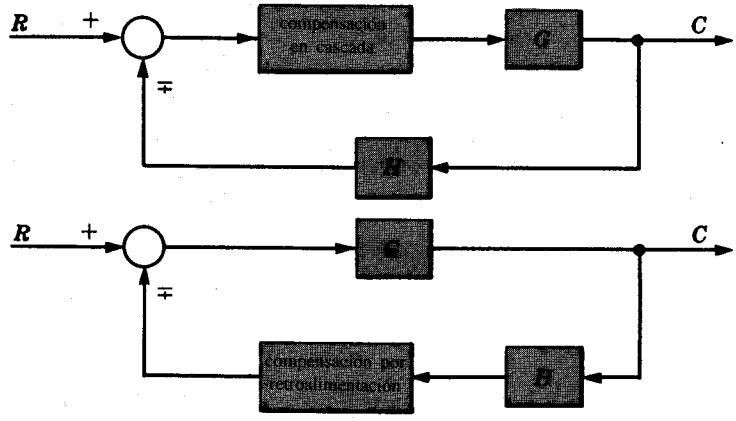


Figura 10-5

La compensación por retroalimentación también puede ocurrir en una de las mallas de retroalimentación menores. (figura 10-6).

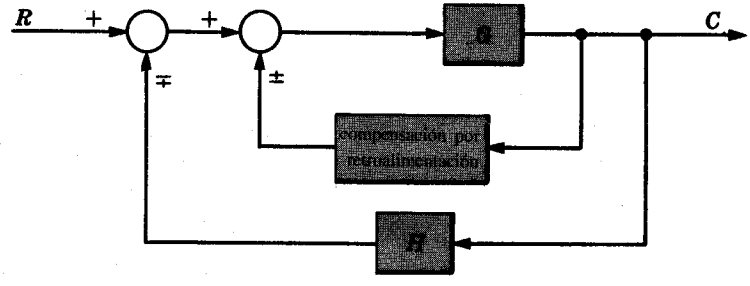


Figura 10-6

Normalmente los compensadores se diseñan de tal forma que todo el sistema (continuo o discreto) tenga una respuesta transitoria aceptable, y por tanto características de estabilidad, y una exactitud deseada o aceptable en estado estacionario (Capítulo 9). A menudo estos objetivos están en conflicto, porque, usualmente, errores pequeños en estado estacionario requieren grandes ganancias en malla abierta, las cuales degradan la estabilidad del sistema. Por esta razón, a menudo los elementos compensadores simples se combinan en un solo diseño. Normalmente consisten de

combinaciones de componentes que modifican la ganancia K y/o las constantes de tiempo τ, o, de algún modo, agregan ceros o polos a GH. Los compensadores *pasivos* comprenden elementos físicamente pasivos, tales como redes de resistores y capacitores, para modificar $K(K < 1)$, constantes de tiempo, ceros o polos; las redes de *atraso*, *adelanto* y *atraso-adelanto* son ejemplos de ellos (Capítulo 6). El compensador activo más común es el amplificador ($K > 1$). El más general de ellos es el controlador PID (proporcional-integral-derivativo), analizado en los capítulos 2 y 6 (ejemplos 2.14 y 6.7), que comúnmente se usa en el diseño de sistemas tanto analógicos (continuos) como discretos en el tiempos (digitales).

10.6 Métodos de diseño

El diseño por análisis es el esquema de diseño que se ha desarrollado en este libro, porque generalmente esta es la aproximacion más práctica, con la excepción de que el diseño directo de sistemas digitales, tratado en la sección 10.8, es una verdadera técnica de síntesis. Los métodos de análisis mencionados anteriormente, reiterados a continuación, se aplican al diseño en los Capítulos 12, 14, 16 y 18.

1. Diagramas Nyquist (Capítulo 12)
2. Lugar de las raíces (Capítulo 14)
3. Diagramas de Bode (Capítulo 16)
4. Cartas de Nichols (Capítulo 18)

Los procedimientos de análisis y diseño de sistemas de control basados en estos métodos se han automatizado en paquetes de aplicación para propósitos especiales en computador, llamados paquetes de *Diseño ayudado por computador* (DAC).

De los cuatro métodos enumerados antes, los de Nyquist, Bode y Nichols son técnicas de *respuesta de frecuencia*, porque en cada uno de ellos se exploran gráficamente las propiedades de $GH(\omega)$, esto es, $GH(j\omega)$ para sistemas continuos, o $GH(e^{j\omega T})$ para sistemas discretos en el tiempo [ecuación (*10.1*)], en función de la frecuencia angular ω. Más importante aún es el hecho de que, utilizando estos métodos, el análisis y el diseño se realizan fundamentalmente del mismo modo para sistemas continuos o discretos, tal como se ilustra en los capítulos siguientes. Las únicas diferencias (en detalles específicos) provienen del hecho de que la región de estabilidad para los sistemas continuos es la mitad izquierda del plano s, y que para sistemas discretos es el círculo unitario en el plano z. Sin embargo, una transformación de variables, llamada *transformada w*, permite el análisis y el diseño de sistemas discretos utilizando los resultados específicos desarrollados para sistemas continuos. Presentamos las principales características y los resultados de la *transformada w* en la siguiente sección, para su uso en el análisis y el diseño de sistemas de control en los capítulos siguientes.

10.7 La transformada w para el análisis y el diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando métodos de sistemas continuos

En el Capítulo 5 se definió la transformada w para el análisis de la estabilidad de sistemas discretos. Esta es una transformación bilineal entre el plano complejo w y el plano complejo z definido por el par:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \qquad z = \frac{1+w}{1-w} \tag{10.8}$$

en donde $z = \mu + jv$. La variable compleja w se define como

$$w = \text{Re}\, w + j\, \text{Im}\, w \tag{10.9}$$

Las siguientes relaciones entre estas variables son útiles en el análisis y el diseño de sistemas de control discretos en el tiempo:

1. $$\text{Re}\, w = \frac{\mu^2 + v^2 - 1}{\mu^2 + v^2 + 2\mu + 1} \tag{10.10}$$

2. $$\text{Im}\, w = \frac{2v}{\mu^2 + v^2 + 2\mu + 1} \tag{10.11}$$

3. $$\text{Si } |z| < 1, \text{ entonces } w < 0 \tag{10.12}$$

4. $$\text{Si } |z| = 1, \text{ entonces } w = 0 \tag{10.13}$$

5. $$\text{Si } |z| > 1, \text{ entonces } w > 0 \tag{10.14}$$

6. Sobre el círculo unitario del plano z

$$z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \operatorname{sen} \omega T \tag{10.15}$$

$$\mu^2 + v^2 = \cos^2 \omega T + \operatorname{sen}^2 \omega T = 1 \tag{10.16}$$

$$w = j\frac{v}{\mu + 1} \tag{10.17}$$

De esta manera, la región dentro del círculo unitario en el plano z representa la mitad izquierda del plano w (MIP); la región de afuera, la mitad derecha del plano w (MDP); y el círculo unitario, el eje imaginario del plano w. Igualmente, las funciones racionales de z se representan en funciones racionales de w.

Por estas razones, las propiedades de estabilidad absoluta y relativa de los sistemas discretos pueden determinarse utilizando métodos desarrollados para sistemas continuos en el plano s. De manera específica, para el análisis y el diseño de respuesta de frecuencia de sistemas discretos en el plano w, generalmente se trata el plano w como si fuera el plano s. Sin embargo, deben tenerse en cuenta las distorsiones en ciertas representaciones, de manera particular en la frecuencia angular, cuando se interpretan los resultados.

A partir de la ecuación (*10.17*), definimos una frecuencia angular ω_w sobre el eje imaginario en el plano w, mediante

$$\omega_w \equiv \frac{v}{\mu + 1} \tag{10.18}$$

Esta nueva frecuencia angular ω_w en el plano w está relacionada con la frecuencia angular verdadera ω en el plano z mediante

$$\omega_w = \tan\frac{\omega T}{2} \qquad \text{u} \qquad \omega = \frac{2}{T}\tan^{-1}\omega_w \tag{10.19}$$

Las siguientes propiedades de ω_w son útiles al hacer gráficas de funciones para el análisis de la respuesta de frecuencia en el plano w:

1. Si $\omega = 0$, entonces $\omega_w = 0$ (10.20)

2. Si $\omega \to \frac{\pi}{T}$, entonces $\omega_w \to +\infty$ (10.21)

3. Si $\omega \to -\frac{\pi}{T}$, entonces $\omega_w \to -\infty$ (10.22)

4. El intervalo $-\frac{\pi}{T} < \omega < \frac{\pi}{T}$ se representa en el intervalo $-\infty < \omega_w < +\infty$ (10.23)

Algoritmo para el análisis y el diseño de la respuesta de frecuencia utilizando la transformada w

El procedimiento puede resumirse como sigue:

1. Sustituir $(1 + w)/(1 - w)$ por z en la función de transferencia $GH(z)$ en malla abierta:

$$GH(z)|_{z=(1+w)/(1-w)} \equiv GH'(w) \tag{10.24}$$

2. Generar las curvas de respuesta de frecuencia, esto es, diagramas de Nyquist, diagramas de Bode, etc., para

$$GH'(w)|_{w=j\omega_w} \equiv GH'(j\omega_w) \tag{10.25}$$

3. Analizar las propiedades de estabilidad relativa del sistema en el plano w (como si fuera el plano s). Por ejemplo, determinar los márgenes de ganancia y de fase, las frecuencias de cruce, la respuesta de frecuencia en malla cerrada, el ancho de banda, o cualquier otra característica deseada y relacionada con la respuesta de frecuencia.
4. Transformar las frecuencias críticas del plano w (valores de ω_w) determinados en el paso 3 a sus frecuencias angulares correspondientes (valores de ω) en el dominio de la frecuencia verdadera (plano z), utilizando la ecuación (10.19).
5. Si se trata de un problema de diseño, diseñar los compensadores apropiados para modificar $GH'(j\omega_w)$ para satisfacer las especificaciones de desempeño.

En los Capítulos 15 al 18 se amplía y aplica este algoritmo.

EJEMPLO 10.4. La función de transferencia en malla abierta

$$GH(z) = \frac{(z+1)^2/100}{(z-1)(z+\frac{1}{3})(z+\frac{1}{2})} \tag{10.26}$$

se transforma al dominio w sustituyendo $z = (1 + w)/(1 - w)$ en la expresión para $GH(z)$, lo que conduce a

$$GH'(w) = \frac{-6(w-1)/100}{w(w+2)(w+3)} \tag{10.27}$$

El análisis de la estabilidad relativa de $GH'(w)$ se pospone hasta el Capítulo 15.

10.8 Diseño algebraico de sistemas digitales, incluyendo sistemas con transitorio mínimo

Cuando hay computadores digitales o microprocesadores como componentes de un sistema discreto, fácilmente pueden implementarse compensadores por medio de programas de aplicación (*software*) o de dispositivos (*firmware*) facilitando de ese modo el diseño directo del sistema mediante la solución algebraica de la función de transferencia del compensador que satisfaga los objetivos dados del diseño. Por ejemplo, suponga que deseamos construir un sistema que tenga una función de transferencia en malla cerrada C/R, la cual podría definirse mediante las características requeridas en malla cerrada, tales como el ancho de banda, la ganancia en estado estacionario, el tiempo de respuesta, etc. Entonces, dada la función de transferencia $G_2(z)$, de la planta, la malla de compensación directa $G_1(z)$ necesaria puede determinarse a partir de la relación para la función de transferencia en malla cerrada del sistema canónico dado en la sección 7.5:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} \tag{10.28}$$

Entonces, el compensador requerido se determina resolviendo la ecuación para $G_1(z)$:

$$G_1 = \frac{C/R}{G_2(1 - HC/R)} \tag{10.29}$$

EJEMPLO 10.5. Se requiere que el sistema con retroalimentación unitaria ($H \equiv 1$) de muestreo uniforme y sincrónico, de la figura 10-7, con $T = 0.1$ s tenga una ganancia en estado estacionario $(C/R)(1) = 1$ y un tiempo de subida T_s de 2 s o menos.

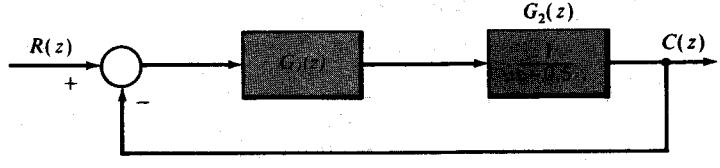


Figura 10-7

La C/R más simple que satisface los requerimientos es $(C/R) = 1$. Sin embargo, el compensador necesario sería

$$G_1 = \frac{\dfrac{C}{R}}{G_2\left(1 - \dfrac{C}{R}\right)} = \frac{1}{\dfrac{1}{z-0.5}(1-1)} = \frac{z-0.5}{0}$$

que tiene una ganancia infinita, un cero en $z = 0.5$, y no tiene polos, lo cual lo hace irrealizable. Para que sea realizable (sección 6.6), G_1 debe tener por lo menos igual número de polos ceros. En consecuencia, aún con la cancelación de los polos y los ceros de G_2 con los polos y los ceros de G_1, C/R debe contener por lo menos $n - m$ polos, en donde n es el número de polos y m es el número de ceros de G_2.

La C/R realizable más simple tiene la forma:

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{z-a}$$

Como se muestra en el problema 10.10, el tiempo de subida de un sistema discreto de primer orden, como el dado por la C/R anterior, es

$$T_r \leq \frac{T \ln \frac{1}{9}}{\ln a}$$

Resolviendo para a se tiene

$$a = \left[\frac{1}{9}\right]^{T_r/T} = \left[\frac{1}{9}\right]^{20} = 0.8959$$

Entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{z-a} = \frac{K}{z-0.8959}$$

y para que la ganancia en estado estacionario $(C/R)(1)$ sea 1, $K = 1 - 0.8959 = 0.1041$. En consecuencia el compensador requerido es

$$G_1 = \frac{\dfrac{C}{R}}{G_2\left(1 - \dfrac{C}{R}\right)} = \frac{\dfrac{0.1041}{z-0.8959}}{\dfrac{1}{z-0.5}\left(1 - \dfrac{0.1041}{z-0.8959}\right)} = \frac{0.1041(z-0.5)}{z-1}$$

Vemos que G_1 ha agregado un polo a G_1G_2 en $z = 1$, haciendo que el sistema sea del tipo 1. Esto se debe al requerimiento de que la ganancia en estado estacionario es igual a 1.

Los *sistemas con transitorio mínimo* son una clase de sistemas discretos en el tiempo que pueden diseñarse fácilmente al utilizar la aproximación directa descrita antes. Por definición, la respuesta *transitoria* en malla cerrada de un **sistema con transitorio mínimo** tiene una duración finita, esto es, se hace cero y permanece en cero después de un número finito de tiempos de muestreo. En respuesta a una entrada paso, la salida en tal sistema es constante en cada tiempo de muestreo después de un periodo finito. Esta se denomina **respuesta con transitorio mínimo**.

EJEMPLO 10.6. Para un sistema con retroalimentación unitaria con función de transferencia directa

$$G_2(z) = \frac{K_1(z+z_1)}{(z+p_1)(z+p_2)}$$

la introducción de un compensador anticipativo con

$$G_1(z) = \frac{(z+p_1)(z+p_2)}{(z-K_1)(z+z_1)}$$

produce la función de transferencia en malla cerrada:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2} = \frac{K_1}{z}$$

La respuesta impulso de este sistema es $c(0) = K_1$ y $c(k) = 0$ para $k > 0$. La respuesta paso es $c(0) = 0$ y $c(k) = K_1$ para $k > 0$.

En general, pueden diseñarse sistemas para que exhiban una respuesta con transitorio mínimo de duración $n - m$ muestras, en donde m es el número de ceros y n es el número de polos de la planta. Sin embargo, para evitar *rizado entre las muestras* (variaciones periódicas o aperiódicas) en sistemas mixtos continuo/discretos en el tiempo, en los cuales $G_2(z)$ tiene una entrada y/o salida continua, el compensador no debería cancelar los ceros de $G_2(z)$, como en el ejemplo 10.5. La respuesta transitoria en estos casos es un mínimo de n muestras de duración, y la función de transferencia en malla cerrada tiene n polos en $z = 0$.

EJEMPLO 10.7. Para un sistema con

$$G_2(z) = \frac{K(z+0.5)}{(z-0.2)(z-0.4)}$$

hagamos

$$G_1(z) = \frac{(z-0.2)(z-0.4)}{(z+a)(z+b)}$$

Entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2} = \frac{K(z+0.5)}{(z+a)(z+b)+K(z+0.5)}$$
$$= \frac{K(z+0.5)}{z^2+(a+b+K)z+ab+0.5K}$$

Para una respuesta con transitorio mínimo, escogemos

$$\frac{C}{R} \equiv \frac{K(z+0.5)}{z^2}$$

y en consecuencia

$$a+b+K \equiv 0$$
$$ab+0.5K \equiv 0$$

Hay muchas soluciones posibles para a, b y K, y una de ellas es $a = 0.3$, $b = -0.75$ y $K = 0.45$.

Si se requiere que el sistema en malla cerrada sea del tipo l, es necesario que $G_1(z)G_2(z)$ contenga l polos en $z = 1$. Si $G_2(z)$ tiene el número requerido de polos, éstos deberían conservarse, es decir, no deben cancelarse con los ceros de $G_1(z)$. Si $G_2(z)$ no tiene todos los polos requeridos en $z = 1$, pueden agregarse en $G_1(z)$.

EJEMPLO 10.8. Para el sistema con

$$G_2(z) = \frac{K}{z-1}$$

suponga que se desea un sistema del tipo 2 en malla cerrada con respuesta con transitorio mínimo. Esto puede lograrse con un compensador de la forma:

$$G_1(z) = \frac{z+a}{z-1}$$

el cual agrega un polo en $z = 1$. Entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2} = \frac{K(z+a)}{(z-1)^2+K(z+a)} = \frac{K(z+a)}{z^2+(K-2)z+1+Ka}$$

Si se desea una respuesta con transitorio mínimo, debemos tener

$$\frac{C}{R} = \frac{K(z+a)}{z^2}$$

y en consecuencia $K - 2 = 0$ y $1 + Ka = 0$, con lo que se obtiene $K = 2$ y $a = -0.5$.

Problemas resueltos

10.1. La gráfica de la figura 10-8 representa las características de entrada-salida de un amplificador-controlador para un sistema de control con retroalimentación cuyos otros componentes son lineales. ¿Cuál es el intervalo lineal de $e(t)$ en este sistema?

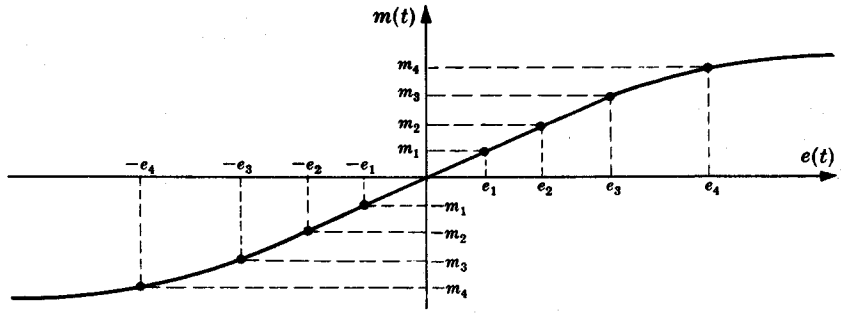


Figura 10-8

El amplificador-controlador opera linealmente sobre el intervalo aproximado de $-e_3 \leq e \leq e_3$.

10.2. Determine el margen de ganancia para el sistema en el cual $GH(j\omega) = 1/(j\omega + 1)^3$.

Escribiendo $GH(j\omega)$ en forma polar, tenemos

$$GH(j\omega) = \frac{1}{(\omega^2+1)^{3/2}} \angle -3\tan^{-1}\omega \qquad \arg GH(j\omega) = -3\tan^{-1}\omega$$

Entonces $-3\tan^{-1}\omega_\pi = -\pi$, $\omega_\pi = \tan(\pi/3) = 1.732$. Por tanto, por la ecuación (*10.2*), el margen de ganancia es $1/|GH(j\omega_\pi)| = 8$.

10.3. Determine el margen de fase para el sistema del problema 10.2.

Tenemos

$$|GH(j\omega)| = \frac{1}{(\omega^2+1)^{3/2}} = 1$$

únicamente cuando $\omega = \omega_1 = 0$. Por tanto

$\phi_{MF} = 180° + (-3\tan^{-1} 0) = 180° = \pi$ radianes

10.4. Determine el valor promedio de $T_d(\omega)$ sobre el intervalo de frecuencia $0 \leq \omega \leq 10$ para $C/R = j\omega/(j\omega + 1)$. $T_d(\omega)$ se obtiene por medio de la ecuación (*10.4*).

$$\gamma = \arg\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\omega \qquad \text{y} \qquad T_d(\omega) = \frac{-d\gamma}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}[\tan^{-1}\omega] = \frac{1}{1+\omega^2}$$

Por tanto $$\text{Avg } T_d(\omega) \text{ Prom} = \frac{1}{10}\int_0^{10} \frac{d\omega}{1+\omega^2} = 0.147 \text{ sec}$$

10.5. Determine el ancho de banda en el sistema con función de transferencia $(C/R)(s) = 1/(s + 1)$.

Tenemos

$$\left|\frac{C}{R}(j\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+1}}$$

En la figura 10-9 se da un esquema de $|(C/R)\ (j\omega)|$ en función de ω.

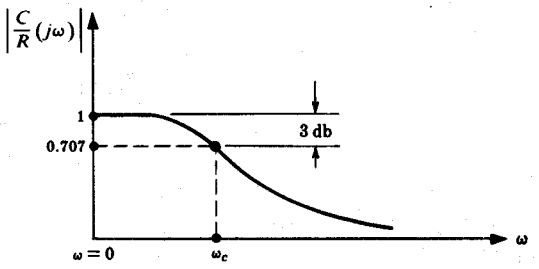


Figura 10-9

ω_c se determina a partir de $1/\sqrt{\omega_c^2+1} = 0.707$. Puesto que $|(C/R)(j\omega)|$ es una función estrictamente decreciente de la frecuencia positiva, tenemos AB $= \omega_c = 1$ rad.

10.6. ¿Cuántas octavas hay entre *a*) 200 Hz y 800 Hz, *b*) 200 Hz y 100 Hz, *c*) 10,048 rad/s (rps) y 100 Hz?

a) Dos octavas

b) Una octava

c) $f = \omega/2\pi = 10{,}048/2\pi = 1.600$ Hz. Por tanto, hay cuatro octavas entre 10,048 rps y 100 Hz.

10.7. Determine el pico de resonancia M_p y la frecuencia resonante ω_p en el sistema cuya función de transferencia es $(C/R)(s) = 5/(s^2 + 2s + 5)$.

$$\left|\frac{C}{R}(j\omega)\right| = \frac{5}{|-\omega^2 + 2j\omega + 5|} = \frac{5}{\sqrt{\omega^4 - 6\omega^2 + 25}}$$

Igualando a cero la derivada de $|(C/R)(j\omega)|$, obtenemos $\omega_p = \pm\sqrt{3}$. En consecuencia

$$M_p = \max_{\omega}\left|\frac{C}{R}(j\omega)\right| = \left|\frac{C}{R}(j\sqrt{3})\right| = \frac{5}{4}$$

10.8. La salida en respuesta a la entrada de una función paso unitario en un sistema de control continuo en particular es $c(t) = 1 - e^{-t}$. ¿Cuál es el tiempo de retardo T_r?

La salida está dada como una función de tiempo. En consecuencia, es aplicable la definición de T_r en el dominio del tiempo, dada en la sección 10.4. El valor final de la salida es $\lim_{t\to\infty} c(t) = 1$. Por tanto T_r (en el 50% del valor final) es la solución de $0.5 = 1 - e^{-T_r}$, y es igual a $\log_e(2) = 0.693$.

10.9. Encuentre el tiempo de subida T_s para $c(t) = 1 - e^{-t}$.

En el 10% del valor final, $0.1 = 1 - e^{-t_1}$, de donde $t_1 = 0.104$ s. En el 90% del valor final, $0.9 = 1 - e^{-t_2}$, así que $t_2 = 2.302$ s. Entonces $T_s = 2.302 - 0.104 = 2.198$ s.

10.10. Determine el tiempo de subida del sistema discreto de primer orden

$$P(z) = (1-a)/(z-a) \quad \text{con } |a| < 1.$$

Para una entrada paso, la transformada de la salida es

$$Y(z) = P(z)U(z) = \frac{(1-a)z}{(z-1)(z-a)}$$

y el tiempo de respuesta es $y(k) = 1 - a^k$ para $k = 0, 1, \ldots$ Puesto que $y(\infty) = 1$, el tiempo de subida T_s es el tiempo necesario para que esta respuesta paso unitario vaya desde 0.1 a 0.9. Puesto que la respuesta muestreada no puede tener los valores exactos de 0.1 y 0.9, debemos encontrar los valores muestreados que limitan estos valores. De esta manera, para el valor inferior $y(k) \leq 0.1$ ó $1 - a^k \leq 0.1$ y por tanto $a^k \geq 0.9$. De modo similar, para $y(k + T_s/T) = 1 - a^{k+T_r/T} \geq 0.9$, $a^{k+T_r/T} \leq 0.1$.

Dividiendo las dos expresiones, obtenemos

$$\frac{a^{k+T_r/T}}{a^k} \leq \frac{1}{9}$$

o

$$a^{T_r/T} \leq \frac{1}{9}$$

Luego, tomando logaritmo a ambos lados, se obtiene

$$T_s \leq \frac{T \ln \frac{1}{9}}{\ln a}$$

10.11. Verifique las seis propiedades de la transformada w en la sección 10.7, ecuaciones (*10.10*) hasta (*10.17*).

A partir de $w = (z-1)/(z+1)$ y $z = \mu + j\nu$,

$$w = \frac{\mu + j\nu - 1}{\mu + j\nu + 1} = \frac{(\mu - 1 + j\nu)(\mu + 1 - j\nu)}{(\mu + 1 + j\nu)(\mu + 1 - j\nu)} = \left(\frac{\mu^2 + \nu^2 - 1}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu + 1}\right) + j\left(\frac{2\nu}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu + 1}\right)$$

Por tanto

1. $$\text{Re } w = \frac{\mu^2 + \nu^2 - 1}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu + 1} \equiv \sigma_w$$

2. $$\text{Im } w = \frac{2\nu}{\mu^2 + \nu^2 + 2\mu + 1} \equiv \omega_w$$

3. $|z| < 1$ significa $\mu^2 + \nu^2 < 1$, lo cual implica $\sigma_w < 0$

4. $|z| = 1$ significa $\mu^2 + \nu^2 = 1$, lo cual implica $\sigma_w = 0$

5. $|z| > 1$ significa $\mu^2 + \nu^2 > 1$, lo cual implica $\sigma_w > 0$

La sexta propiedad se deriva de las identidades trigonométricas elementales.

10.12. Demuestre que la transformada de la frecuencia angular ω_w está relacionada con la frecuencia real ω mediante la ecuación (*10.19*).

A partir del problema 10.11, $|z| = 1$ también implica que $w = j[v/(\mu + 1)] \equiv j\omega_w$ [ecuación (*10.17*)]. Pero $|z| = 1$ implica que $z = e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \operatorname{sen} \omega T = \mu + jv$ [ecuación (*10.15*)]. En consecuencia

$$\omega_w = \frac{\operatorname{sen} \omega T}{\cos \omega T + 1}$$

Finalmente, sustituyendo las siguientes identidades trigonométricas para semiángulos, en la última expresión:

$$2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \operatorname{sen} \omega T$$

$$\cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) = \cos \omega T$$

$$\cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) = 1$$

se tiene

$$\omega_w = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

10.13. Para el sistema uniforme y sincrónicamente muestreado, dado en la figura 10-10, determine $G_1(z)$ tal que el sistema sea del tipo 1 con respuesta con transitorio mínimo.

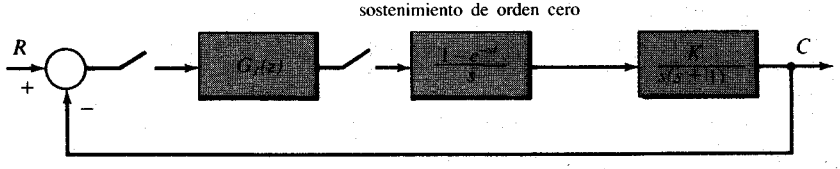


Figura 10-10

La transformada z de la malla directa, suponiendo un muestreo *ficticio* de la salida $c(t)$ (*véase* la sección 6.8), se determina a partir de la ecuación (*6.9*)

$$G_2(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{G(s)}{s}\right)\Big|_{t=kT}\right\} = \frac{K_1(z+z_1)}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

en donde

$$K_1 \equiv K(T + e^{-T} - 1) \quad \text{y} \quad z_1 \equiv \frac{1 - e^{-T} - Te^{-T}}{T + e^{-T} - 1}$$

Se hace que $G_1(z)$ tenga la forma $G_1(z) = (z - e^{-T})/(z + b)$. Entonces, si también suponemos un muestreador ficticio en la entrada $r(t)$, puede determinarse la función de transferencia en malla cerrada en el dominio z:

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2} = \frac{K_1(z + z_1)}{(z-1)(z + b) + K_1(z + z_1)}$$
$$= \frac{K_1(z + z_1)}{z^2 + (b - 1 + K_1)z - b + K_1z_1}$$

Para una respuesta con transitorio mínimo $b - 1 + K_1 = 0$ $(b = 1 - K_1)$ y $-b + K_1z_1 = 0$ $(-1 + K_1 + K_1z_1 = 0)$. Entonces

$$K_1 = \frac{1}{1 + z_1}$$

y

$$b = 1 - K_1 = \frac{z_1}{1 + z_1}$$

Puesto que $K_1 = K(T + e^{-T} - 1)$,

$$K = \frac{K_1}{T + e^{-T} - 1} = \frac{1}{(1 + z_1)(T + e^{-T} - 1)} = \frac{1}{T(1 - e^{-T})}$$

Para este sistema, con señales continuas de entrada y salida, $(C/R)(z)$, determinado como se muestra arriba, origina la relación entrada-salida en malla cerrada únicamente en los tiempos de muestreo.

Problemas suplementarios

10.14. Determine el margen de fase para $GH = 2(s + 1)/s^2$.

10.15. Encuentre el ancho de banda para $GH = 60/s(s + 2)(s + 6)$ para el sistema en malla cerrada.

10.16. Calcule la ganancia y el margen de fase para $GH = 432/s(s^2 + 13s + 115)$.

10.17. Calcule el margen de fase y el ancho de banda para $GH = 640/s(s + 4)(s + 16)$ para el sistema en malla cerrada.

Respuestas a los problemas suplementarios

10.14. $\Phi_{MF} = 65.5°$

10.15. AB = 3 rad/s

10.16. Margen de ganancia = 3.4, margen de fase = 65°

10.17. $\Phi_{MF} = 17°$, AB = 5.5 rad/s

Capítulo 11

Análisis de Nyquist

11.1 Introducción

El análisis de Nyquist, un método de respuesta de frecuencia, es esencialmente un procedimiento gráfico para determinar la estabilidad absoluta y relativa de sistemas de control en malla cerrada. La información acerca de la estabilidad está disponible de manera directa a partir de una gráfica de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta $GH(\omega)$, una vez que el sistema con retroalimentación ha sido convertido a su forma canónica.

Los métodos de Nyquist son aplicables a sistemas de control, continuos y discretos, y aquí se presenta el desarrollo metodológico del análisis de Nyquist para ambos tipos, con cierto énfasis en los sistemas continuos, por propósitos pedagógicos.

Hay varias razones por las cuales puede elegirse el método de Nyquist para determinar la información acerca de la estabilidad del sistema. Los métodos del Capítulo 5 (Routh, Hurwitz, etc.) a menudo son inadecuados porque, con pocas excepciones, ellos sólo pueden usarse para determinar la estabilidad *absoluta*, y son aplicables únicamente a sistemas cuya ecuación característica es un *polinomio finito* en s o en z. Por ejemplo, cuando una señal se retarda T segundos en alguna parte de la malla de un sistema continuo, aparecen términos exponenciales de la forma e^{-Ts} en la ecuación característica. Los métodos del Capítulo 5 pueden aplicarse a tales sistemas si e^{-Ts} se aproxima mediante unos pocos términos de la serie de potencias

$$e^{-Ts} = 1 - Ts + \frac{T^2s^2}{2!} - \frac{T^3s^3}{3!} + \cdots$$

pero esta técnica sólo produce información *aproximada* acerca de la estabilidad. El método de Nyquist maneja sistemas con retardos sin la necesidad de aproximaciones, y en consecuencia produce resultados *exactos* acerca de las estabilidades absoluta y relativa del sistema.

Las técnicas de Nyquist también son útiles para obtener información referente a las funciones de transferencia de componentes o sistemas a partir de datos experimentales de respuesta de frecuencia. El diagrama polar (sección 11.5) puede construirse directamente a partir de las medidas en estado estacionario sinusoidal de los componentes que conforman la función de transferencia en malla abierta. Esta propiedad es muy útil en la determinación de las características de estabilidad del sistema cuando las funciones de transferencia de los componentes de la malla no están disponibles en forma analítica, o cuando los sistemas físicos se ensayan y se evalúan experimentalmente.

En varias de las siguientes secciones presentamos los fundamentos y las técnicas matemáticas necesarias para generar diagramas polares y diagramas de estabilidad de Nyquist de sistemas de control con retroalimentación, y las bases y propiedades matemáticas del criterio de estabilidad de Nyquist. Las demás secciones de este capítulo se relacionan con la interpretación y los usos del análisis de Nyquist para la determinación de la estabilidad *relativa* y la evaluación de la respuesta de frecuencia en malla cerrada.

11.2 Representación gráfica de funciones complejas de una variable compleja

Una función real de una variable real se grafica fácilmente en un conjunto sencillo de ejes de coordenadas. Por ejemplo, la función real $f(x)$, con x real, se grafica en coordenadas rectangulares con x como la abscisa y $f(x)$ como la ordenada. Una función compleja de una variable compleja, tal como la función de transferencia $P(s)$, con $s = \sigma + j\omega$, no puede graficarse en un conjunto sencillo de coordenadas.

La variable compleja $s = \sigma + j\omega$ depende de dos cantidades independientes, las partes real e imaginaria de s. En consecuencia s no puede graficarse mediante una línea. La función compleja $P(s)$ también tiene partes real e imaginaria. Esta tampoco puede graficarse en una sola dimensión. De manera similar, la variable compleja $z = \mu + jv$ y las funciones de transferencia complejas $P(z)$ de sistemas discretos en el tiempo, no pueden graficarse en una dimensión.

En general, para representar gráficamente $P(s)$ con $s = \sigma + j\omega$, se requieren gráficas bidimensionales. La primera es una gráfica de $j\omega$, en función de σ llamada **plano s**, el mismo conjunto de coordenadas que se utilizó para representar los diagramas de polos y ceros en el Capítulo 4. La segunda es la parte imaginaria de $P(s)$. (Im P. *Versus* la parte real de $P(s)$ (Re P) llamado **plano P(s)**. Los planos de coordenadas correspondientes para sistemas discretos son el *plano z* y el **plano P(z)**.

La correspondencia entre los puntos en los dos planos se llama **representación** o **transformación**. Por ejemplo, los puntos en el plano s se transforman en puntos en el plano $P(s)$ mediante la función P (figura 11.1).

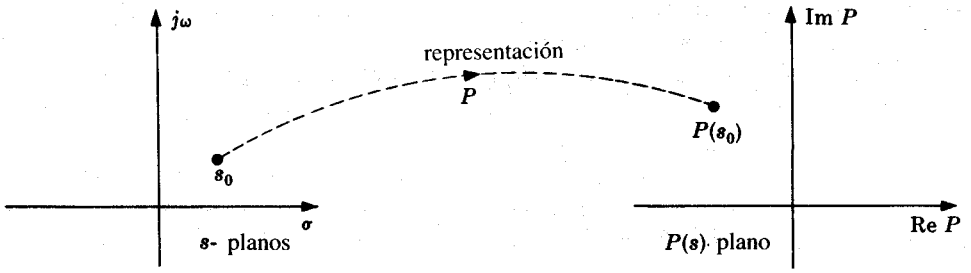


Figura 11-1

En general, solamente un lugar geométrico de puntos muy específico del plano s (o del plano z) se transforma en el plano $P(s)$ [o en el plano $P(z)$]. En los diagramas de estabilidad de Nyquist este lugar geométrico se denomina *Trayectoria de Nyquist*, y será el tema de la sección 11.7.

Para el caso especial en que $\sigma = 0$, $s = j\omega$, el plano s termina siendo una línea, y $P(j\omega)$ puede graficarse en un plano $P(j\omega)$ con ω como parámetro. En el plano $P(j\omega)$ se construyen *diagramas polares* a partir de esta línea ($s = j\omega$) en el plano s.

EJEMPLO 11.1. Considere la función compleja $P(s) = s^2 + 1$. El punto $s_0 = 2 + j4$ se transforma en el punto $P(s_0) = P(2 + j4) = (2 + j4)^2 + 1 = -11 + j\,16$ (figura 11-2).

Figura 11-2

11.3 Definiciones

Las siguientes definiciones son necesarias para entender mejor las próximas secciones.

Definición 11.1: Si la *derivada* de P en s_0 definida mediante

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} \equiv \lim_{s \to s_0} \left[\frac{P(s) - P(s_0)}{s - s_0} \right]$$

existe en todos los puntos de una región del plano s, esto es, si el límite es finito y único, entonces P es **analítica** en esa región [se da la misma definición para $P(z)$ en el plano z, remplazando s por z y s_0 por z_0].

Las funciones de transferencia en los sistemas físicos prácticos (aquellos que se consideran en este libro) son analíticas en el plano s finito (o en el plano z finito) excepto en los polos de $P(s)$ [o en los polos de $P(z)$]. En los desarrollos siguientes, cuando no hay riesgo de ambigüedad y cuando un enunciado dado se aplica tanto a $P(s)$ como a $P(z)$, éstas pueden abreviarse como P sin argumento.

Definición 11.2: Un punto en el cual P [$P(s)$ o $P(z)$] no es analítica es un **punto singular** o una **singularidad** de P [$P(s)$ o $P(z)$].

Un *polo* de P [$P(s)$ o $P(z)$] es un punto singular.

Definición 11.3: Un **contorno cerrado** en un plano complejo es una curva continua que comienza y termina en el mismo punto (figura 11-3).

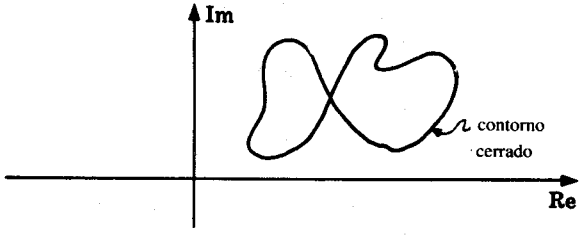


Figura 11-3

Definición 11.4: Todos los puntos a la derecha de un contorno, el cual se recorre en una dirección prescrita, se dice que están **encerrados** en él (figura 11-4).

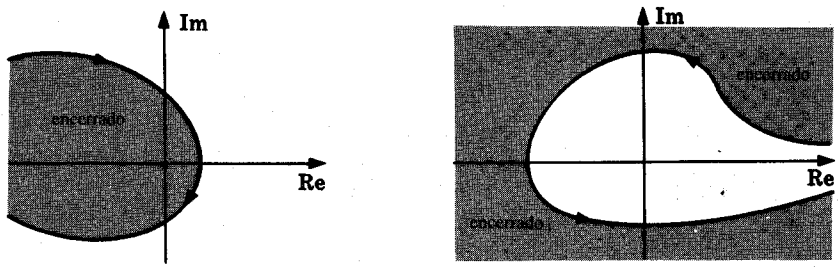


Figura 11-4

Definición 11.5: Un recorrido en el *sentido de giro de las manecillas del reloj* (R*) alrededor de un contorno se define como **dirección positiva** (figura 11-5).

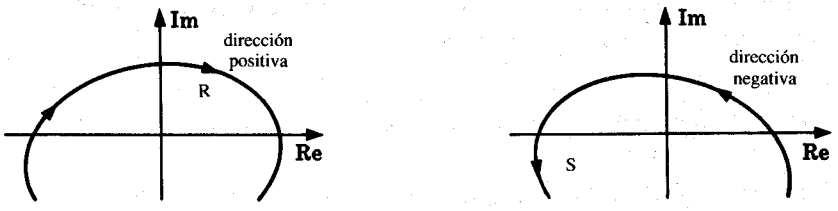


Figura 11-5

Definición 11.6: Un contorno cerrado en el plano P se dice que hace n **rodeos positivos** del origen si una línea radial, dibujada desde el origen hasta un punto en la curva P, gira en el sentido (R) de las manecillas del reloj $360n$ grados en una trayectoria completamente cerrada. Si la trayectoria se recorre en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj (S) se obtiene un rodeo **negativo**. El **número total de rodeos** N_0 es igual a los rodeos R menos los rodeos S.

* **N. del T.:** Para designar estos giros, en el idioma español se adopta la nomenclatura empleada de manera universal en todos los idiomas cuando se hace referencia a la *quiralidad* de los sistemas; esto es, R, para *rectus*, equivalente al sentido de giro de las manecillas del reloj, y S, para *sinister*, equivalente al sentido contrario al de las manecillas del reloj; entre paréntesis se indica otro modo corriente de referirse a estos giros como horario y antihorario. De otra parte, cabe anotar en este punto que ya algunos fabricantes ofrecen relojes cuyas manecillas giran en sentido contrario al tradicional, y es muy probable que las nuevas generaciones desconozcan el sentido de giro de tales manecillas puesto que cada día son más comunes los relojes digitales.

EJEMPLO 11.2. El contorno del plano P, en la figura 11-6, rodea el origen una vez. Esto es, $N_0 = 1$. Comenzando en el punto a, giramos una línea radial trazada desde el origen hasta el contorno, en la dirección R hasta el punto c. El ángulo subtendido es + 270°. De c a d aumenta el ángulo, luego disminuye, y la suma total es 0°. De d a e y de regreso nuevamente a d, el ángulo barrido por la línea radial de nuevo es 0°. De d a c es 0°, y de c hasta a es + 90°. Por tanto, el ángulo total es 270° + 90° = 360°. En consecuencia $N_0 = 1$.

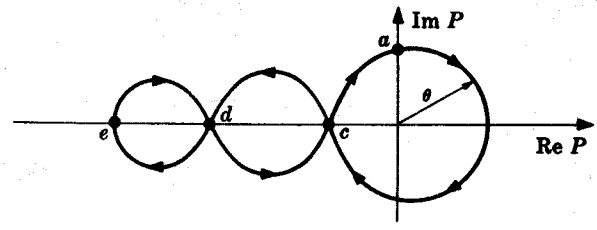


Figura 11-6

11.4 Propiedades de las representaciones $P(s)$ o $P(z)$

Todas las transformaciones P [$P(s)$ o $P(z)$] que se consideran en lo que resta de este capítulo tienen las siguientes propiedades.

1. P es una *función univaluada*. Esto es, todo punto en el plano s (o en el plano z) se transforma en uno y sólo uno en el plano P.
2. Los contornos del plano s (y del plano z) evitan los puntos singulares de P.
3. P es *analítica* excepto posiblemente en un número finito de puntos (singularidades) en el plano s (o en el plano z).
4. Todo contorno cerrado en el plano s (o en el plano z) se transforma en otro en el plano P.
5. P es una *transformación conforme*. Esto significa que la dirección del ángulo y el ángulo en sí entre dos curvas cualesquiera que se cortan en su punto de intersección en el plano s (o en el plano z) se preservan en la transformación de estas curvas en el plano P.
6. La transformación P obedece al *principio de los argumentos*. Esto es, el *número total de rodeos N_0 del origen* hechos por un contorno cerrado P en el plano P, transformado desde un contorno cerrado en el plano s (o en el plano z), es igual al número de ceros C_0 menos el número de polos P_0 de P encerrados por el contorno del plano s (o del plano z). Esto es,

$$N_0 = C_0 - P_0 \qquad (11.1)$$

7. Si el origen está *encerrado* por el contorno P, entonces $N_0 > 0$. Si el origen *no está encerrado* por el contorno P, entonces $N_0 \leq 0$. Esto es,

$$\text{encerrado} \Rightarrow N_0 > 0$$
$$\text{no encerrado} \Rightarrow N_0 \leq 0$$

El *signo de N_0* se determina fácilmente al sombrear la región a la derecha del contorno en la dirección prescrita. Si el origen cae en la región sombreada, $N_0 > 0$; si no, $N_0 \leq 0$.

EJEMPLO 11.3. En la figura 11-7 se ilustra el principio de transformación conforme. Las curvas C_1 y C_2 se transforman en C'_1 y C'_2. El ángulo entre las tangentes a estas curvas en s_0 y $P(s_0)$ es igual a α, y las curvas giran a la derecha en s_0 y en $P(s_0)$, como lo indican las flechas en ambas gráficas.

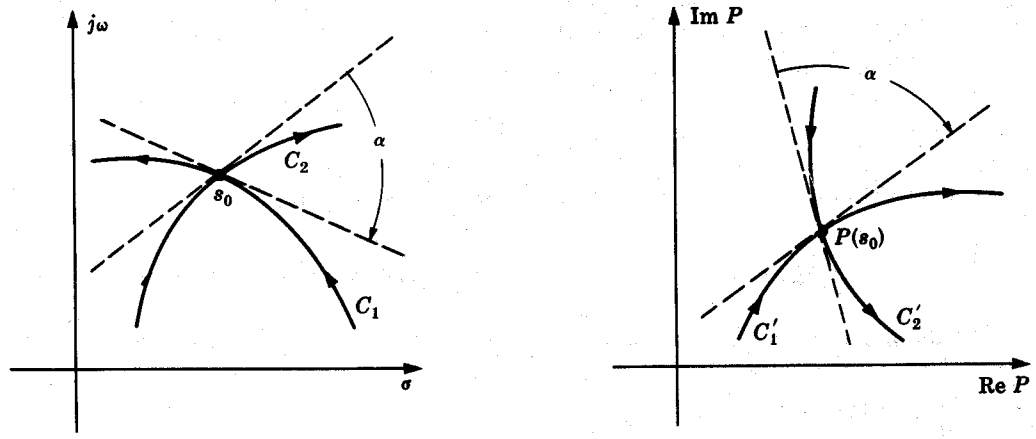


Figura 11-7

EJEMPLO 11.4. Se sabe que cierta función de transferencia $P(s)$ tiene un cero en la mitad derecha del plano s, y que este cero está encerrado por el contorno del plano s transformado al plano $P(s)$, como se muestra en la figura 11-8. Los puntos s_1, s_2, s_3 y $P(s_1)$, $P(s_2)$, $P(s_3)$ determinan las direcciones de sus respectivos contornos. La región sombreada a la derecha del contorno del plano $P(s)$ indica que $N_0 \leq 0$, puesto que el origen no se encuentra dentro de la región sombreada. Pero claramente, el contorno $P(s)$ rodea el origen una sola vez en la dirección S. Por tanto, $N_0 = -1$. Así, el número de polos de $P(s)$ encerrados por el contorno del plano s es $P_0 = C_0 - N_0 = 1 - (-1) = 2$.

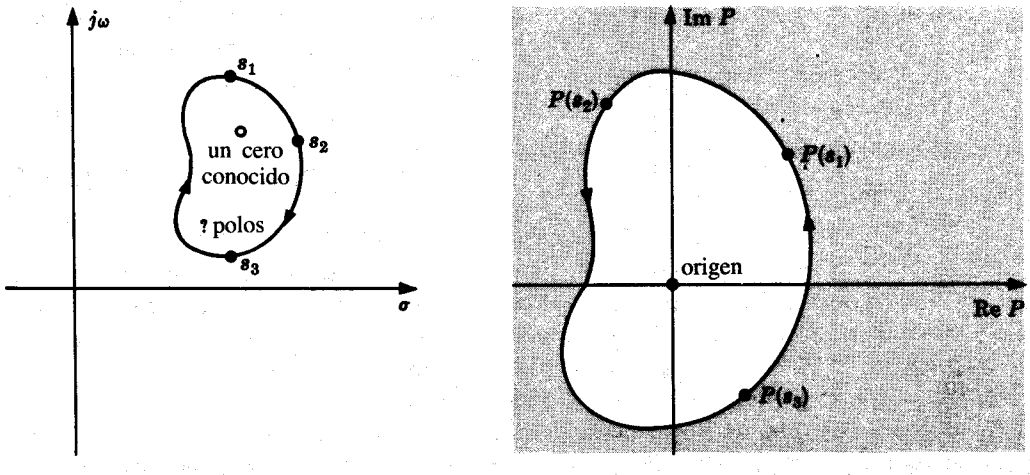


Figura 11-8

11.5 Diagramas polares

Una función de transferencia $P(s)$ en un sistema continuo puede representarse en el dominio de la frecuencia como una función de transferencia sinusoidal al sustituir s por $j\omega$ en la expresión de $P(s)$. La forma $P(j\omega)$ resultante es una función compleja de la variable simple ω. Entonces, ésta puede representarse en dos dimensiones, con ω como parámetro, y puede escribirse en las siguientes formas equivalentes:

$$\textbf{Forma polar:} \quad P(j\omega) = |P(j\omega)| \angle \phi(\omega) \tag{11.2}$$

$$\textbf{Forma de Euler:} \quad P(j\omega) = |P(j\omega)| (\cos\phi(\omega) + j \operatorname{sen}\phi(\omega)) \tag{11.3}$$

$|P(j\omega)|$ es la **magnitud** de la función compleja $P(j\omega)$, y $\phi(j\omega)$ es su **ángulo de fase,** arg $P(j\omega)$

$|P(j\omega)|$ cos $\phi(\omega)$ es la *parte real*, y $|P(j\omega)|$ sen $\phi(\omega)$ es la *parte imaginaria* de $P(j\omega)$. Por consiguiente $P(j\omega)$ también puede escribirse como

$$\textbf{Forma rectangular o compleja:} \quad P(j\omega) = \operatorname{Re} P(j\omega) + j \operatorname{Im} P(j\omega) \tag{11.4}$$

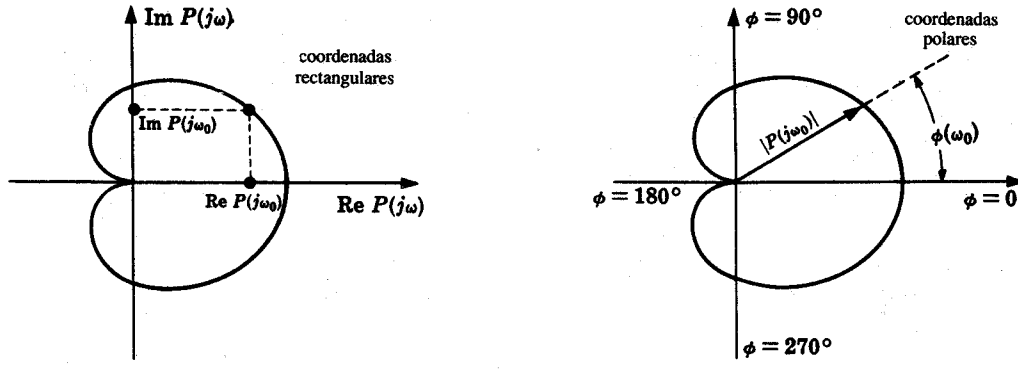
Un **diagrama polar** de $P(j\omega)$ es una representación gráfica de Im $P(j\omega)$ en función de Re $P(j\omega)$ en la parte finita del plano $P(j\omega)$ para $-\infty < \omega < \infty$. En los puntos singulares de $P(j\omega)$ (los polos en el eje $j\omega$), $|P(j\omega)| \to \infty$. Un diagrama polar también puede generarse sobre un papel de coordenadas polares. La magnitud y el ángulo de fase de $P(j\omega)$ se grafican variando a ω desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

El lugar geométrico de $P(j\omega)$ es idéntico en cualquiera de las coordenadas rectangulares o polares. La elección del sistema de coordenadas puede depender de si $P(j_1)$ está disponible en forma analítica o en datos experimentales. Si $P(j\omega)$ está expresada analíticamente, la elección de las coordenadas depende de si es más fácil escribir $P(j\omega)$ en la forma de la ecuación (*11.2*), en cuyo caso se utilizan coordenadas polares, o en la forma de la ecuación (*11.4*) para coordenadas rectangulares. A menudo los datos experimentales de $P(j\omega)$ se expresan en términos de la magnitud y del ángulo de fase. En este caso, la elección natural es coordenadas polares.

EJEMPLO 11.5. Los diagramas polares en la figura 11-9 son idénticos; solamente son diferentes los sistemas de coordenadas.

Para sistemas *discretos en el tiempo*, los diagramas polares se definen de la misma manera en el dominio de la frecuencia. Recordemos que puede escribirse $z \equiv e^{sT}$ (*véase* la sección 4.9). Por consiguiente, una función de transferencia discreta $P(z) \equiv P(e^{sT})$ y, si hacemos $s = j\omega$, $P(z)$ se convierte en $P(e^{j\omega T})$. El **diagrama polar de** $P(e^{j\omega T})$ es una gráfica de $Im\ P(e^{j\omega T})$ en función de Re $P(e^{j\omega T})$ en la parte finita del plano $P(e^{j\omega T})$ para $-\infty < \omega < \infty$.

En las secciones subsiguientes analizamos los diagramas polares, sus propiedades, y muchos resultados que dependen de éstas, de una manera unificada, para los sistemas de control, continuos y discretos en el tiempo. Para hacer esto, adoptamos para nuestra función de transferencia



$P(j\omega) = \text{Re}\,P(j\omega) + j\,\text{Im}\,P(j\omega)$ $\qquad$ $P(j\omega) = |P(j\omega)|\underline{/\phi(\omega)}$

Figura 11-9

general P la representación unificada de las funciones de respuesta de frecuencia que se da en la ecuación (*10.1*) para GH, esto es, usamos la representación genérica $P(\omega)$ definida mediante

$$P(\omega) = \begin{cases} P(j\omega) & \text{para sistemas continuos} \\ P(e^{j\omega T}) & \text{para sistemas discretos} \end{cases}$$

En estos términos, las ecuaciones (*11.2*) a la (*11.4*) se convierten en

$$P(\omega) = |P(\omega)|\underline{/\phi(\omega)} = |P(\omega)|(\cos\phi(\omega) + j\,\text{sen}\,\phi(\omega)) = \text{Re}\,P(\omega) + j\,\text{Im}\,P(\omega)$$

Usamos esta notación unificada en la mayor parte de lo que resta de este capítulo y en los siguientes, particularmente en donde los resultados son aplicables a ambos sistemas.

11.6 Propiedades de los diagramas polares

Las siguientes son varias propiedades útiles de los diagramas polares de $P(\omega)[P(j\omega)$ o $P(e^{j\omega T})]$.

1. El diagrama polar para

$$P(\omega) + a$$

en donde a es cualquier constante compleja, es idéntico al diagrama para $P(\omega)$ con el origen de coordenadas desplazado al punto $-a = -(\text{Re}\ a + j\ \text{Im}\ a)$.

2. El diagrama polar de la función de transferencia en un sistema lineal invariable en el tiempo exhibe *simetría conjugada*. Esto es, la gráfica para $-\infty < \omega < 0$ es la imagen especular alrededor del eje horizontal de la gráfica para $0 \leq \omega < \infty$.

3. El diagrama polar puede construirse directamente a partir de un diagrama de Bode (Capítulo 15), si éste se encuentra disponible. Los valores de la magnitud y del ángulo de fase a diferentes frecuencias ω en el diagrama de Bode representan puntos en el lugar geométricos del diagrama polar.
4. Los incrementos constantes de frecuencia generalmente no se encuentran separados por intervalos iguales en el diagrama polar.

EJEMPLO 11.6. Para $a = 1$ y $P = GH$, el diagrama polar de la función $1 + GH$ está representado por el diagrama para GH, con el origen de coordenadas desplazado al punto $-1 + j0$ en coordenadas rectangulares (figura 11-10).

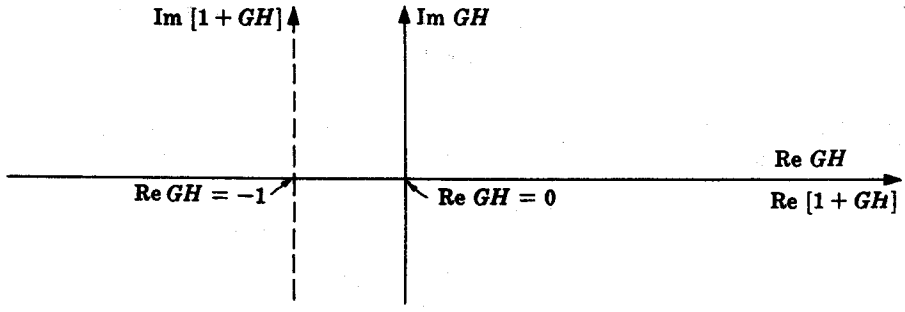


Figura 11-10

EJEMPLO 11.7. Para ilustrar la representación gráfica de funciones de transferencia, considere la función de transferencia del sistema continuo en malla abierta

$$GH(s) = \frac{1}{s+1}$$

Haciendo $s = j\omega$ y escribiendo de nuevo $GH(j\omega)$ en la forma de la ecuación (*11.2*) (forma polar), tenemos

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}} \angle -\tan^{-1}\omega$$

Para $\omega = 0$, $\omega = 1$ y $\omega \to \infty$

$$GH(j0) = 1 \angle 0°$$

$$GH(j1) = (1/\sqrt{2}) \angle -45°$$

$$\lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle -90°$$

La sustitución de algunos otros valores positivos de ω producen un lugar geométrico semicircular para $0 \leq \omega < \infty$. La gráfica para $-\infty < \omega < 0$ es la imagen especular alrededor del diámetro de este semicírculo. Este se muestra en la figura 11-11 mediante una línea de guiones. Note los incrementos de frecuencia marcadamente desiguales entre los arcos *ab* y *bc*

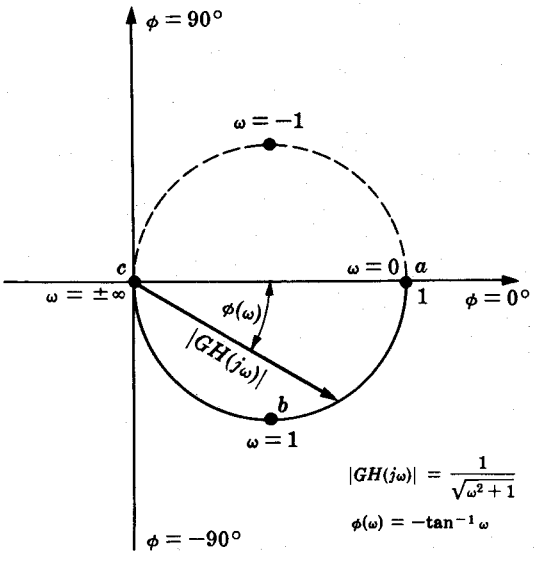


Figura 11-11

Los diagramas polares no son muy difíciles de dibujar para funciones de transferencia muy simples, aunque usualmente son un poco más difíciles de determinar para sistemas discretos, como se ilustra en el ejemplo 11.11. Pero los cálculos para $P(s)$ o $P(z)$ complicadas pueden ser muy dispendiosos. De otra parte, pueden generarse, de manera más conveniente, diagramas polares exactos mediante programas de computador ampliamente difundidos para análisis de respuesta de frecuencia, o, de modo más general, para representar gráficas de funciones complejas de una variable compleja.

11.7 La trayectoria de Nyquist

En sistemas continuos, la **trayectoria de Nyquist** es un contorno cerrado en el plano s, que encierra toda la mitad derecha del plano s (MDP). En sistemas discretos, la correspondiente **trayectoria de Nyquist** encierra la totalidad del plano z por *fuera* del círculo unitario.

En sistemas continuos, para que la trayectoria de Nyquist no pase por ningún polo de $P(s)$, se requieren pequeños semicírculos en la trayectoria del eje imaginario o en el origen de $P(s)$, si $P(s)$ tiene polos sobre el eje $j\omega$ o en el origen. Los radios ρ de estos pequeños círculos se interpretan en el límite como aproximándose a cero.

Para encerrar la MDP en el infinito, y de este modo cualquier polo en el interior de la MDP, se dibuja una trayectoria semicircular grande en la MDP, y el radio R de este semicírculo se interpreta en el límite como infinito.

El contorno del plano s en la figura 11-12 ilustra la **trayectoria generalizada de Nyquist en el plano s**. Es evidente que *todo polo y todo cero de $P(s)$ en la MDP están encerrados por la trayectoria de Nyquist* cuando se transforman al plano $P(s)$.

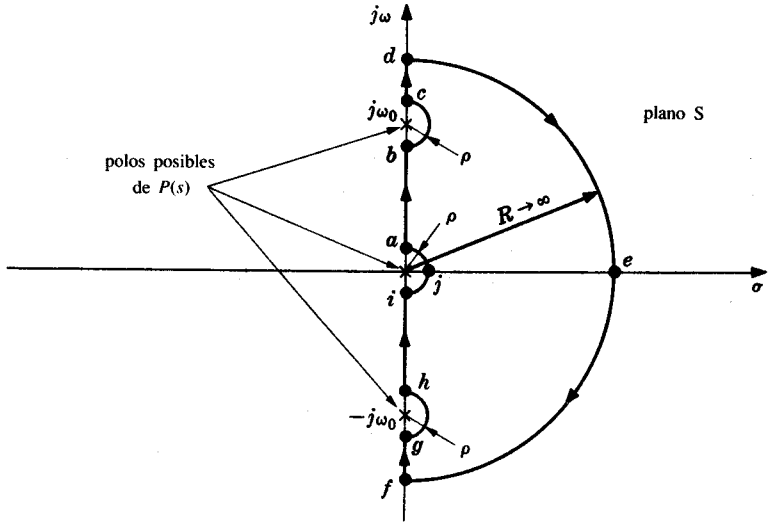


Figura 11-12

Las diferentes partes de la trayectoria de Nyquist pueden describirse analíticamente de la siguiente manera.

Trayectoria $\overline{ab}$: $s = j\omega$ $0 < \omega < \omega_0$ (11.5)

Trayectoria $\overline{bc}$: $s = \lim_{\rho \to 0} \left(j\omega_0 + \rho e^{j\theta} \right)$ $-90° \leq \theta \leq 90°$ (11.6)

Trayectoria $\overline{cd}$: $s = j\omega$ $\omega_0 \leq \omega < \infty$ (11.7)

Trayectoria $\overline{def}$: $s = \lim_{R \to \infty} Re^{j\theta}$ $+90° \leq \theta \leq -90°$ (11.8)

Trayectoria $\overline{fg}$: $s = j\omega$ $-\infty < \omega < -\omega_0$ (11.9)

Trayectoria $\overline{gh}$: $s = \lim_{\rho \to 0} \left(-j\omega_0 + \rho e^{j\theta} \right)$ $-90° \leq \theta \leq 90°$ (11.10)

Trayectoria $\overline{hi}$: $s = j\omega$ $-\omega_0 < \omega < 0$ (11.11)

Trayectoria $\overline{ija}$: $s = \lim_{\rho \to 0} \rho e^{j\theta}$ $-90° \leq \theta \leq 90°$ (11.12)

En la figura 11-13 se presenta la **trayectoria generalizada de Nyquist en el plano** z. Todo polo y todo cero de $P(z)$ por fuera del círculo unitario están encerrados por la trayectoria de Nyquist cuando se transforman al plano $P(z)$. Al recorrer el círculo unitario como una función de frecuencia angular ω creciente, cualquier polo de $P(z)$ sobre el círculo unitario que pueda incluir "integradores" en $z = 1$ (correspondientes a $z \equiv e^{0 \cdot T} \equiv 1$ cuando $s = 0$), se excluyen mediante arcos circulares infinitesimales. Por ejemplo, en la figura 11-13 se muestra un par de polos conjugados complejos sobre el círculo unitario, excluidos mediante arcos de radio $\rho \to 0$. El resto del plano z por fuera del círculo unitario está encerrado por el círculo grande de radio $R \to \infty$ como se muestra en la figura 11-13.

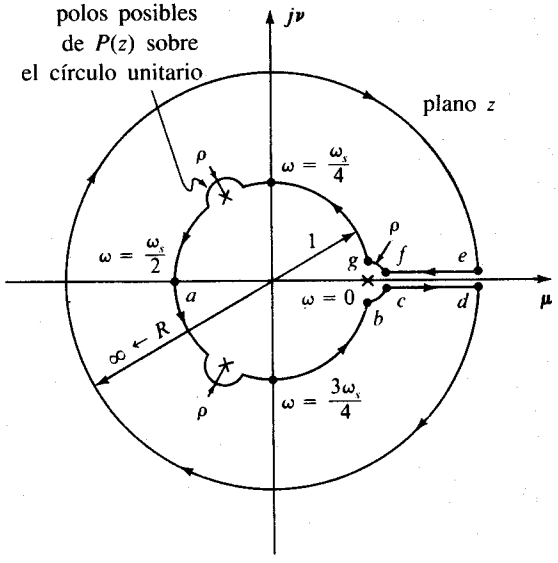


Figura 11-13

El **círculo unitario en el plano** z tiene una característica práctica no compartida por la trayectoria de Nyquist en el plano s, la cual facilita la elaboración de diagramas polares, a la vez que genera otras consecuencias en el diseño de sistemas digitales. Definimos primero la **frecuencia angular de muestreo** $\omega_s = 2\pi/T$ (radianes por unidad de tiempo). La ventaja es que el círculo unitario se repite en cada frecuencia angular de muestreo ω_s a medida que ω aumenta. Esto se muestra en la figura 11-14 (a), la cual ilustra que la parte del eje $j\omega$ en el plano s entre $-j\omega_s/2$ y $+j\omega_s/2$, se transforma en el círculo unitario completo en el plano z. Esta propiedad es útil al dibujar diagramas polares de funciones $P(z) = P(e^{j\omega T})$, porque se obtiene el mismo diagrama polar para $n\omega_s \leq \omega \leq (n + 1)\omega_s$ con cualquier $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ También, puesto que el arco circular desde $\omega = 0$ hasta $\omega_s/2$ es la imagen especular de aquel desde $\omega = -\omega_s/2$ hasta 0, la función P(ejω^T) sólo necesita evaluarse desde $\omega = -\omega_s/2$ hasta 0 para obtener un diagrama polar completo, y tomar ventaja de la simetría de la transformación (propiedad 2, sección 11.6).

Algunas veces también es conveniente tratar la transformación de diagramas polares como una función de ωT en lugar de ω. Entonces la franja $-(\omega_s/2)T \leq \omega T \leq 0$ es equivalente a la franja $-\pi \leq \omega T \leq 0$ (en radianes), porque $\omega_s/2 = \pi/T$; esta franja se transforma en la *mitad*

inferior del círculo unitario en coordenadas polares, desde $-180°$ ($-\pi$ radianes) hasta $0°$ (0 radianes) [figura 11-14*b*)].

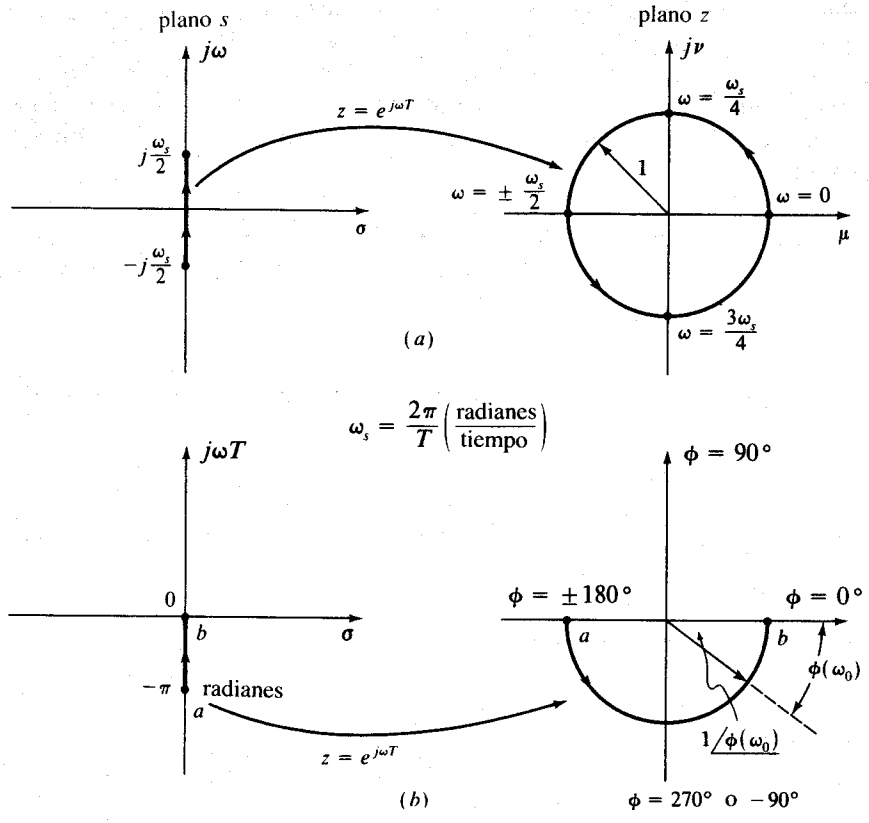


Figura 11-14

11.8 El diagrama de estabilidad de Nyquist

El diagrama de estabilidad de Nyquist, una extensión del diagrama polar, es una transformación de *toda* la trayectoria de Nyquist en el plano P. Se construye utilizando las propiedades de las transformaciones tratadas en las secciones 11.4 y 11.6, y, para los sistemas continuos, las ecuaciones (*11.5*) a la (*11.8*) y la ecuación (*11.12*). Un bosquejo dibujado cuidadosamente es suficiente para la mayor parte de los propósitos.

En los siguientes pasos se esboza un procedimiento general de construcción para los sistemas continuos.

Paso 1: Verifique los polos de $P(s)$ sobre el eje $j\omega$ y en el origen.

Paso 2: Utilizando las ecuaciones (*11.5*) a la (*11.7*), haga un bosquejo de la imagen de la trayectoria $\overline{ad}$ en el plano $P(s)$. Si no hay polos sobre el eje $j\omega$, no necesita emplear la ecuación (*11.6*). En este caso, el paso 2 debe leerse: haga un bosquejo del diagrama polar de $P(j\omega)$.

Paso 3: Dibuje la imagen especular cerca del eje real Re P del bosquejo resultante del paso 2. Esta es la transformación de la trayectoria $\overline{fi}$

Paso 4: Utilice la ecuación (*11.8*) para graficar la imagen de la trayectoria $\overline{def}$. Esta trayectoria en el infinito usualmente representa un punto en el plano $P(s)$.

Paso 5: Emplee la ecuación (*11.12*) para graficar la imagen de la trayectoria $\overline{ija}$.

Paso 6: Conecte todas las curvas dibujadas en los pasos anteriores. Tenga en cuenta que la imagen de un contorno cerrado es, cerrada. La propiedad de transformación conforme de la representación ayuda a determinar la imagen en el plano $P(s)$ de los ángulos de esquina de los semicírculos en la trayectoria de Nyquist.

El procedimiento es similar para sistemas discretos en el tiempo, utilizando a cambio la trayectoria de Nyquist dada en la figura 11-13, como se ilustra en el ejemplo 11.11 y en los problemas 11.65 al 11.72.

11.9 Diagramas de estabilidad de Nyquist de sistemas prácticos de control con retroalimentación

Para el análisis de estabilidad de Nyquist en sistemas de control lineales con retroalimentación, $P(\omega)$ es igual a la función de transferencia en malla abierta $GH(\omega)$. Los sistemas de control más comunes encontrados en la práctica son los clasificados como de los tipos 0, 1, 2, ..., l (Capítulo 9).

EJEMPLO 11.8. *Sistema continuo del tipo 0*

$$GH(s) = \frac{1}{s+1}$$

Por definición, un *sistema del tipo 0* no tiene polos en el origen. Este sistema particular no tiene polos en el eje $j\omega$. En la figura 11-15 se presenta la trayectoria de Nyquist.

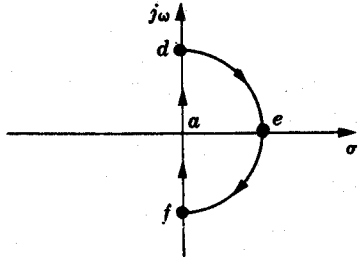


Figura 11-15

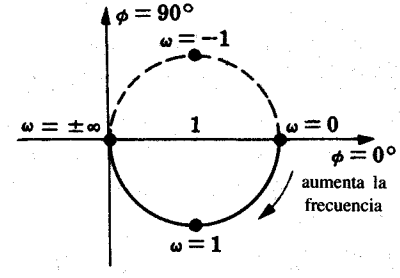


Figura 11-16

El diagrama polar para esta función de transferencia de malla se construyó en el ejemplo 11.7 y se muestra en la figura 11-16. Este diagrama es la imagen del eje $j\omega$, o trayectoria $\overline{fad}$ de la trayectoria de Nyquist, en el plano $GH(s)$. La trayectoria semicircular $\overline{def}$ en el infinito se transforma en el plano $GH(s)$ de la siguiente manera. La ecuación (*11.8*) implica la sustitución de $s = \lim_{R\to\infty} Re^{j\theta}$ en la expresión para $GH(s)$, en donde $90° \leq \theta \leq -90°$. En consecuencia

$$GH(s)|_{\text{trayectoria } \overline{def}} \equiv GH(\infty) = \frac{1}{\lim_{R\to\infty} Re^{j\theta} + 1}$$

Mediante las propiedades elementales de los límites,

$$GH(\infty) = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{Re^{j\theta}+1}\right]$$

Pero, puesto que $|a + b| \geq ||a| - |b||$, entonces

$$|GH(\infty)| = \lim_{R\to\infty}\left|\frac{1}{Re^{j\theta}+1}\right| \leq \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{R-1}\right) = 0$$

y el semicírculo infinito se representa por un punto en el origen. Por supuesto este cálculo fue innecesario para este ejemplo simple porque el diagrama polar produce un contorno completamente cerrado en el plano $GH(s)$. De hecho, los diagramas polares de todos los *sistemas del tipo 0* presentan esta propiedad. El diagrama de estabilidad de Nyquist es una réplica del diagrama polar con los ejes renombrados, como se presenta en la figura 11-17.

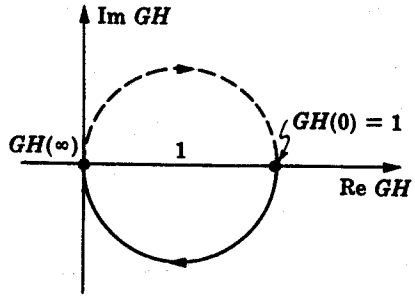


Figura 11-17

EJEMPLO 11.9. *Sistema continuo del tipo 1*

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Hay un polo en el origen. En la figura 11-18 se presenta la trayectoria de Nyquist.

La trayectoria $\overline{ad}$: $s = j\omega$ para $0 < \omega < \infty$, y

$$GH\ (j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}\angle -90° - \tan^{-1}\omega$$

En los valores extremos de ∞ tenemos

$$\lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \infty \angle -90^\circ \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle -180^\circ$$

A medida que ω aumenta en el intervalo $0 < \omega < \infty$, la magnitud de GH disminuye de ∞ a 0 y el ángulo de fase disminuye de manera estacionaria desde $-90°$ hasta $-180°$. Por tanto el contorno no atraviesa el eje real negativo, sino que se aproxima a éste desde abajo, como se muestra en la figura 11-19.

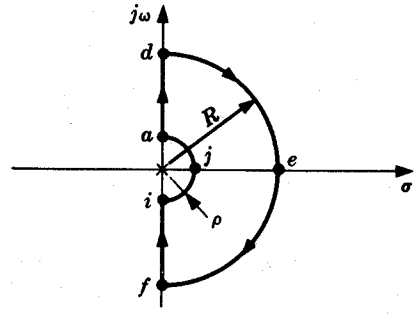


Figura 11-18

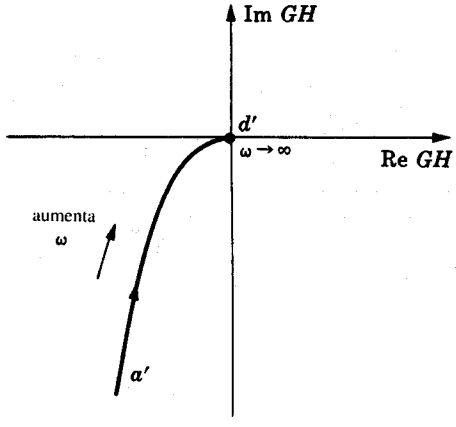


Figura 11-19

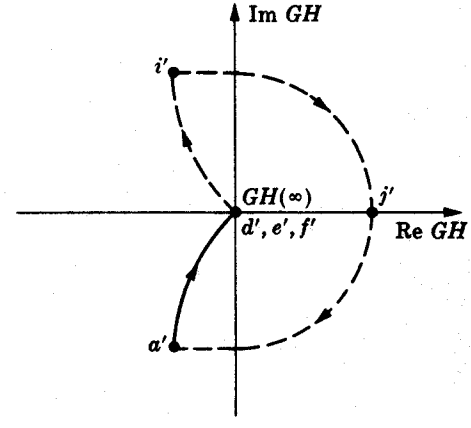


Figura 11-20

La trayectoria $\overline{f'i'}$ es la imagen especular alrededor de Re GH, de la trayectoria $\overline{a'd'}$. Puesto que los puntos d' y f' se encuentran en el origen, claramente éste es la imagen de la trayectoria $\overline{def}$. En consecuencia se hace innecesaria la aplicación de la ecuación (*11.8*).

La trayectoria $\overline{ija}$: $s = \lim_{\rho \to 0} \rho e^{j\theta}$ para $-90° \leq \theta \leq 90°$, y

$$\lim_{\rho \to 0} GH(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{1}{\rho e^{j\theta}(\rho e^{j\theta} + 1)} \right] = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{1}{\rho e^{j\theta}} \right] = \infty \cdot e^{-j\theta} = \infty \angle -\theta$$

en donde hemos utilizado el hecho de que $(\rho e^{j\theta} + 1) \to 1$ cuando $\rho \to 0$. Por tanto la trayectoria $\overline{ija}$ se transforma en un semicírculo de radio infinito. Para el punto i, $GH = \infty \angle 90°$; para el punto j, $GH = \infty \angle 0°$; y para el punto a, $GH = \infty \angle -90°$. El diagrama de estabilidad de Nyquist que resulta se presenta en la figura 11-20.

La trayectoria $\overline{i'j'a'}$ también se podría haber determinado de la siguiente manera. La trayectoria de Nyquist hace un giro de 90° a la derecha en el punto i; por tanto, por transformación conforme, debe hacer un giro de 90° a la derecha en i en el plano $GH(s)$. Lo mismo va para el punto a'. Puesto que tanto i' como a' son puntos en el infinito, y puesto que el diagrama de estabilidad de Nyquist debe ser un contorno cerrado, el punto i' se debe unir al a' mediante un semicírculo de radio infinito en el sentido horario.

Sistemas continuos del tipo *l*

El diagrama de estabilidad de Nyquist de un sistema del tipo l incluye l semicírculos infinitos en su trayectoria. Hay $180l$ grados en el arco que conecta al infinito del plano $GH(s)$.

EJEMPLO 11.10. El sistema del tipo 3 con

$$GH(s) = \frac{1}{s^3(s+1)}$$

tiene tres semicírculos infinitos en su diagrama de estabilidad de Nyquist (figura 11-21).

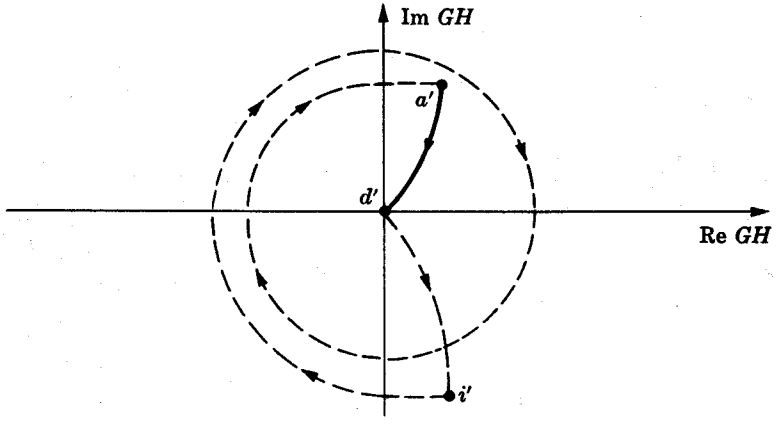


Figura 11-21

Sistemas discretos en el tiempo

Los diagramas de estabilidad de Nyquist en sistemas discretos en el tiempo se dibujan de la misma manera que los anteriores, la única diferencia es que las trayectorias de Nyquist se presentan como en la figura 11-13 en lugar de como se muestran en la figura 11-12.

EJEMPLO 11.11. Considere el sistema de control digital del tipo 1 con la función de transferencia en malla abierta.

$$GH(z) = \frac{K/4}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

El diagrama polar de GH se determina primero transformando la mitad inferior del círculo unitario del plano z en el plano GH. Ello se logra rápidamente con ayuda de la transformación que se ilustra en la figura 11-14 *b*), es decir, evaluamos $GH(e^{j\omega T})$ para valores crecientes de ωT, desde $-180°$ hasta $0°$ (o desde $-\pi$ hasta 0 radianes). Para valores determinados de K y T, por ejemplo, $K = 1$ y $T = 1$,

$$GH(e^{j\omega T}) = \frac{K/4}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}-\frac{1}{2})} = \frac{1/4}{(e^{j\omega}-1)(e^{j\omega}-\frac{1}{2})}$$

Para los cálculos realizados manualmente, resulta útil emplear una combinación de la forma polar, la forma de Euler y la forma compleja al evaluar $GH(e^{j\omega T})$ a diferentes valores de ω, porque $e^{j\omega T} = \angle 1/\omega T(\text{rad}) = \cos(\omega T) + j \operatorname{sen}(\omega T) = \text{Re}(e^{j\omega T}) + j\,\text{Im}(e^{j\omega T})$. En $\omega = -\pi$ rad $(-180°)$, tenemos

$$GH(e^{-j\pi}) = GH(1\angle -180°) = \frac{0.25\angle 0°}{(1\angle -180° - 1\angle 0°)(1\angle -180° - \frac{1}{2}\angle 0°)}$$

$$= \frac{0.25}{(-1+j0-1)(-1+j0-\frac{1}{2})} = \frac{0.25}{(-2)(-\frac{3}{2})}$$

$$= 0.083\angle 0°$$

Entonces, en $\omega = 270°$,

$$GH(e^{j3\pi/2}) = GH(e^{-j\pi/2}) = \frac{0.25\angle 0°}{(1\angle -90° - 1\angle 0°)(1\angle 90° - \frac{1}{2}\angle 0°)}$$

$$= \frac{0.25}{(-j-1)(-j-\frac{1}{2})} = \frac{0.25}{-\frac{1}{2}+j\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2(0.25)}{\sqrt{10}}\angle 180° - \tan^{-1}(3) = 0.158\angle -108.4°$$

De manera similar, encontramos que $GH(e^{j2\pi})$ no existe, pero $\lim_{\phi \to 360°} GH(e^{j\phi}) = \lim_{\omega \to 0} GH(e^{j\omega}) = \infty\angle 90°$.

Para completar el esquema de esta mitad del diagrama polar, necesitamos evaluar $GH(e^{j\omega})$ en algunos cuantos valores más de ω. Fácilmente encontramos $GH(e^{-j\pi/1000}) = 159\angle 90.5°$, $GH(e^{-j\omega/12}) = 1.8\angle 127°$, y $GH(e^{-j\pi/6}) = 0.779\angle 159°$. El resultado se representa por la curva de guiones de a' hasta b' en la figura 11-22, que es la transformación de a hasta b de la figura 11-13. La parte restante del diagrama polar, para $\omega = 0$ hasta π, esto es, desde g' hasta a' en la figura 11-22, es la imagen especular de a' hasta b' alrededor del eje real, mediante la propiedad 2 de la sección 11.6. Esta parte, desde g' hasta a', se ha dibujado como una línea continua, guardando la convención de resaltar los valores positivos de ω, $0 < \omega T < (2n-1)\pi$, con $n = 1, 2, \ldots$ en el diagrama polar.

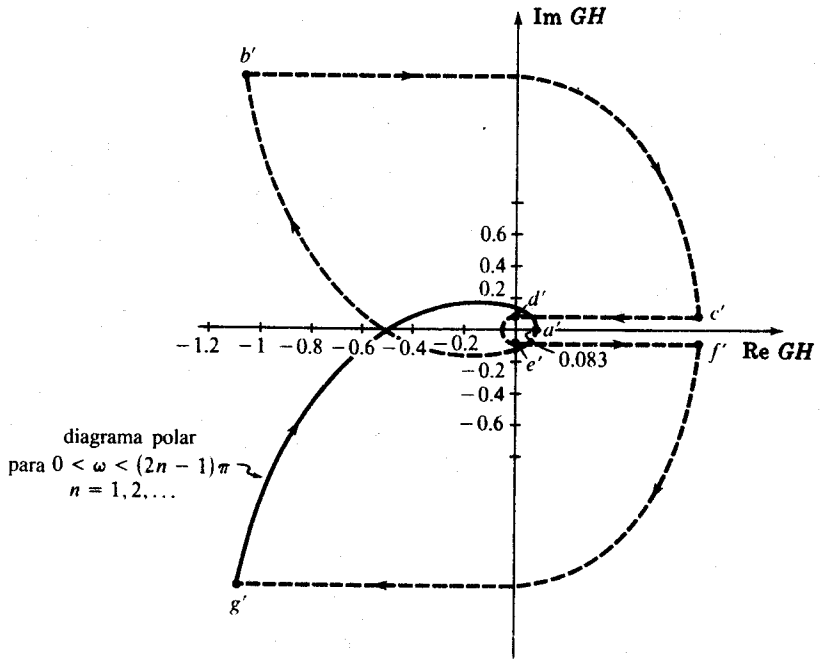


Figura 11-22

El diagrama de estabilidad de Nyquist se determina al completar la proyección de la figura 11-13 para los segmentos b a c, c a d, d a e, y f a g, en el plano GH. Utilizando las propiedades de las transformaciones de la sección 11.4, y calculando los límites, $GH(e^{j\omega})$ da una vuelta a la derecha en b' desde $\infty \angle 90°$ hasta $\infty \angle 0°$ en c', luego hasta $0 \angle 0°$ en d' y en e', y $\infty/0°$ en f' hasta $\infty \angle -90°$ en g', utilizando las operaciones de límites para los radios ρ y R en la figura 11-13. Por ejemplo, $\lim_{\rho \to 0} GH(z = 1 + \rho e^{j\theta})$ para $-90° < \theta < 0°$, proporciona la transformación del arco desde b hasta c en la figura 11-13, en el arco desde $b'(\infty \angle 90°)$ hasta c' $(\infty \angle 0°)$ en la figura 11-22.

11.10 El criterio de estabilidad de Nyquist

Un *sistema de control continuo* lineal en malla cerrada es absolutamente estable si las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas (sección 5.2). O lo que es equivalente, los polos de la función de transferencia en malla cerrada, o los *ceros* del denominador, $1 + GH(s)$, de la función de transferencia en malla cerrada, deben estar en la mitad izquierda del plano (MIP). Para sistemas continuos, el criterio de estabilidad de Nyquist establece de manera directa mediante el diagrama de estabilidad de Nyquist de $GH(s)$, el número de *ceros* de $1 + GH(s)$ *en la MDP*. Para *sistemas de control discretos en el tiempo*, el criterio de estabilidad de Nyquist establece el número de *ceros* de $1 + GH(z)$ *por fuera del círculo unitario* del plano z, la región de inestabilidad para sistemas discretos.

El criterio de estabilidad de Nyquist para cualquier clase de sistemas, continuos o discretos, puede definirse como sigue.

Criterio de estabilidad de Nyquist

El sistema de control en malla cerrada cuya función de transferencia en malla abierta es GH, es estable si y sólo si

$$N = -P_0 \leq 0 \tag{11.13}$$

en donde

$P_0 \equiv$ { *número de polos* (≥ 0) de GH en la MDP para sistemas continuos; *número de polos* (≥ 0) de GH por fuera del círculo unitario (del plano z) para sistemas discretos

$N \equiv$ número total de rodeos R (horarios) del punto $(-1, 0)$ (es decir, $GH = -1$) en el plano GH (continuo o discreto).

Si $N > 0$, *el número de ceros* C_0 *de* $1 + GH$ *en la MDP* para sistemas continuos, o *por fuera del círculo unitario* para sistemas discretos, se determina mediante

$$C_0 = N + P_0 \tag{11.14}$$

Si $N \leq 0$, el punto $(-1, 0)$ no se encuentra encerrado por el diagrama de estabilidad de Nyquist. En consecuencia $N \leq 0$ si la región a la derecha del contorno en la dirección prescrita no incluye el punto $(-1, 0)$. El sombreado de esta región ayuda de manera significativa a determinar si $N \leq 0$ o no.

Si $N \leq 0$ y $P_0 = 0$, el sistema es absolutamente estable, si y sólo si $N = 0$; esto es, si y sólo si el punto $(-1, 0)$ *no* se encuentra en la región sombreada.

EJEMPLO 11.12. En el ejemplo 11.9 se determinó el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = 1/s(s + 1)$, y se presenta en la figura 11-23. Se ha sombreado la región de la derecha del contorno. Claramente el punto $(-1, 0)$ no está en la región sombreada; en consecuencia, no está encerrada por el contorno, así que $N \leq 0$. Los polos de $GH(s)$ están en $s = 0$ y $s = -1$, ninguno de los cuales se encuentra en la MDP; por tanto $P_0 = 0$. Así

$$N = -P_0 = 0$$

y el sistema es absolutamente estable.

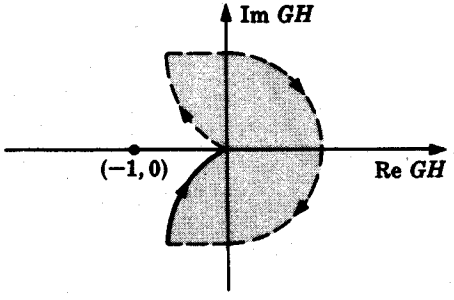


Figura 11-23

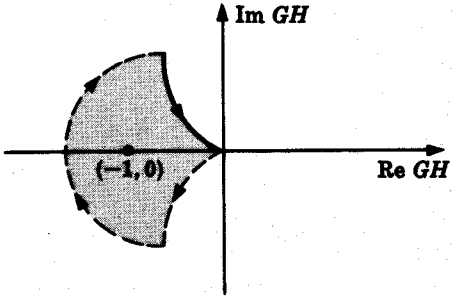


Figura 11-24

EJEMPLO 11.13. En la figura 11-24 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist para $1/s(s-1)$. Se ha sombreado la región a la derecha del contorno, y el punto $(-1, 0)$ está encerrado; entonces $N > 0$. (Es claro que $N = 1$.) Los polos de GH están en $s = 0$ y $s = +1$, y el último polo está en la MDP. Por tanto $P_0 = 1$.

$N \neq -P_0$ indica que el sistema es *inestable*. A partir de la ecuación (*11.14*) tenemos

$$C_0 = N + P_0 = 2$$

ceros de $1 + GH$ en la MDP.

EJEMPLO 11.14. En el ejemplo 11.11 se determinó el diagrama de estabilidad de Nyquist para la función de transferencia discreta en el tiempo en malla abierta

$$GH(z) = \frac{K/4}{(z-1)(z-0.5)}$$

y se repite en la figura 11-25 para $K = 1$. Se ha sombreado la región a la derecha del contorno, y el punto $(-1, 0)$ no está encerrado para $K = 1$. Así, $N \leq 0$, y a partir de la ecuación (*11.13*) no hay polos por fuera del círculo unitario del plano z, esto es, $P_0 = 0$. Por tanto, $N = -P_0 = 0$, y en consecuencia el sistema es estable.

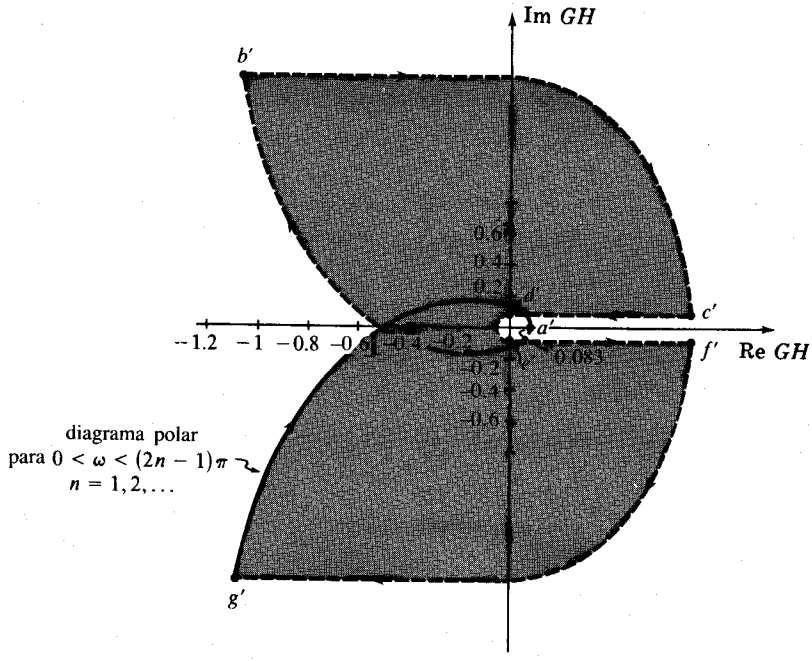


Figura 11-25

11.11 Estabilidad relativa

Los resultados de esta sección y de la siguiente se establecen en términos de $GH(\omega)$, para sistemas continuos $[GH(j\omega)]$ o para sistemas discretos $[GH(e^{j\omega T})]$.

La estabilidad relativa de un sistema de control con retroalimentación se determina fácilmente a partir del diagrama de estabilidad polar o de Nyquist.

La **frecuencia de cruce de fase** (angular) ω_π es aquella a la cual el ángulo de fase de $GH(\omega)$ es $-180°$, es decir, la frecuencia a la que el diagrama polar cruza el eje real negativo. El **margen de ganancia** está dado por

$$\text{margen de ganancia} = \frac{1}{|GH(\omega_\pi)|}$$

Estas cantidades se ilustran en la figura 11-26.

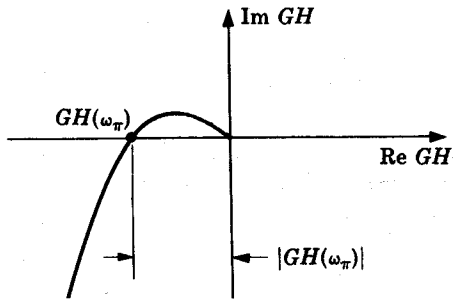


Figura 11-26

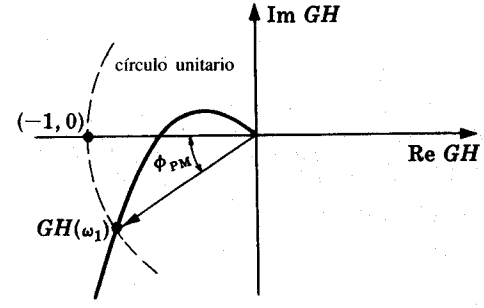


Figura 11-27

La **frecuencia de cruce de ganancia** ω_1 es aquella a la cual $|GH(\omega)| = 1$. El **margen de fase** ϕ_{MF} es el ángulo por el cual debe rotarse el diagrama polar para hacer que pase por el punto $(-1, 0)$. Este se encuentra dado por

$$\phi_{MF} = [180 + \arg GH(\omega_1)] \text{ grados}$$

Estas cantidades se ilustran en la figura 11-27.

11.12 Los círculos *M* y *N**

La respuesta de frecuencia en malla cerrada de un sistema de control con retroalimentación unitaria esta dada por

$$\frac{C}{R}(\omega) = \frac{G(\omega)}{1+G(\omega)} = \left|\frac{G(\omega)}{1+G(\omega)}\right| \angle \tan^{-1}\left[\frac{\text{Im}(C/R)(\omega)}{\text{Re}(C/R)(\omega)}\right] \qquad (11.15)$$

* Las letras M y N, que en esta sección se usan como símbolos para los círculos M y N, no son iguales y no deben confundirse con la variable manipulada $M = M(s)$, definida en el Capítulo 2, ni con el número de rodeos N del punto $(-1, 0)$ de la sección 11.10. Es infortunado que se utilicen los mismos símbolos para representar más de una cantidad. Pero, en virtud de ser consistentes con la mayor parte de los demás textos de sistemas de control, hemos mantenido la terminología de la literatura clásica, y ahora lo hemos aclarado al lector.

Las características de la magnitud y del ángulo de fase de la respuesta de frecuencia en malla cerrada de un sistema de control con retroalimentación unitaria pueden determinarse de manera directa a partir del diagrama polar de $G(\omega)$. Esto se logra dibujando primero las líneas de magnitud constante, llamadas **círculos *M***, y las líneas de ángulo de fase constante, llamadas **círculos *N***, directamente en el plano $G(\omega)$, en donde

$$M \equiv \left| \frac{G(\omega)}{1 + G(\omega)} \right| \tag{11.16}$$

$$N \equiv \frac{\text{Im}(C/R)(\omega)}{\text{Re}(C/R)(\omega)} \tag{11.17}$$

La intersección del diagrama polar con un círculo M específico produce el valor de M a la frecuencia ω de $G(\omega)$ en el punto de intersección. La intersección del diagrama polar con un círculo N determinado produce el valor de N a la frecuencia ω de $G(\omega)$ en el punto de intersección. Puede dibujarse fácilmente M en función de ω y N en función de ω a partir de esos puntos.

En la figura 11-28 se sobreponen varios círculos M en un diagrama polar típico en el plano $G(\omega)$.

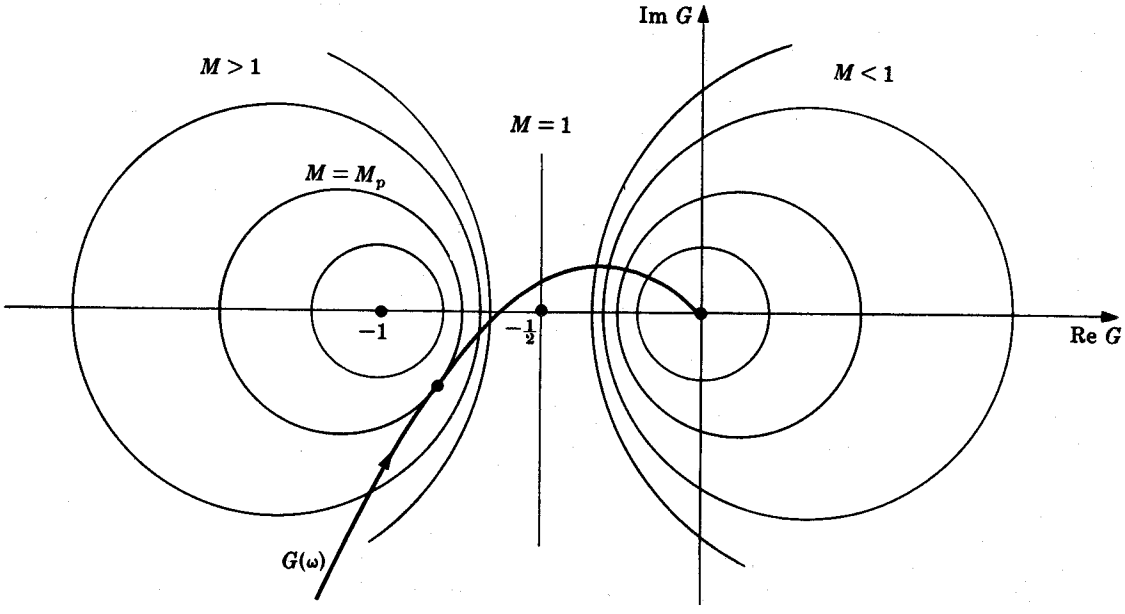


Figura 11-28

El **radio de un círculo** M está dado por

$$\text{radio del círculo } M = \left| \frac{M}{M^2 - 1} \right| \tag{11.18}$$

El **centro de un círculo** M siempre está en el eje Re $G(\omega)$. El punto del centro está dado por

$$\text{centro del círculo } M = \left(\frac{-M^2}{M^2 - 1}, 0 \right) \tag{11.19}$$

El **pico de resonancia** M_p está dado por el mayor valor de M del (de los) círculo(s) M tangente(s) al diagrama polar. (Puede haber más de una tangencia).

La **relación de amortiguamiento** ζ en un sistema continuo de segundo orden con $0 \leq \zeta \leq 0.707$ está relacionada con M_p por medio de

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \tag{11.20}$$

En la figura 11-29 se muestran varios círculos N superpuestos en un diagrama polar. El **radio de un círculo** N está dado por

$$\text{radio del círculo } N = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N} \right)^2} \tag{11.21}$$

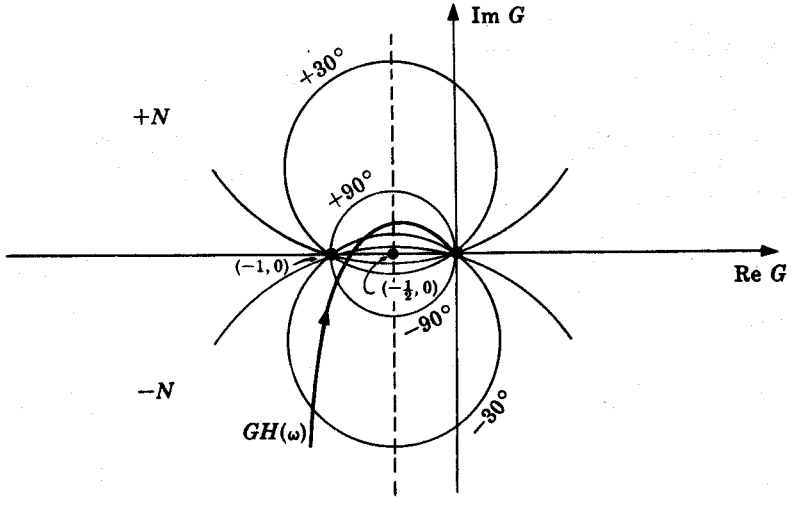


Figura 11-29

El **centro de un círculo** N siempre cae sobre la línea Re $G(\omega) = -\frac{1}{2}$. El punto del centro está dado por

$$\text{centro del círculo } N = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2N}\right) \tag{11.22}$$

Problemas resueltos

Funciones complejas de una variable compleja

11.1. ¿Cuáles son los valores de $P(s) = 1/(s^2 + 1)$ para $s_1 = 2$, $s_2 = j4$, y $s_3 = 2 + j4$?

$$P(s_1) = P(2) = \frac{1}{(2)^2 + 1} = \frac{1}{5} + j0 \qquad P(s_2) = P(j4) = \frac{1}{(j4)^2 + 1} = -\frac{1}{15} + j0$$

$$P(s_3) = P(2 + j4) = \frac{1}{(2 + j4)^2 + 1} = \frac{1}{-11 + j16}$$

$$= \frac{1\angle 0°}{\sqrt{(11)^2 + (16)^2}\angle \tan^{-1}(16/-11)} = \frac{1}{19.4}\angle 0° - 124.6°$$

$$= 0.0514\angle -124.6° = -0.0514\angle 55.4° = -0.0292 - j0.0423$$

11.2. Transforme el eje imaginario del plano s al plano $P(s)$, utilizando la función de transformación $P(s) = s^2$.

Tenemos $s = j\omega$, $-\infty < \omega < \infty$. En consecuencia $P(j\omega) = (j\omega)^2 = -\omega^2$. Ahora, cuando $\omega \to \infty$, $P(j\omega) \to -\infty$ (o si lo prefiere, $-\infty^2$). Cuando $\omega \to +\infty$, $P(j\omega) \to -\infty$, y cuando $\omega = 0$, $P(j0) = 0$. Así, a medida que $j\omega$ aumenta en el eje negativo *imaginario* desde $-j\infty$ hacia $j0$, $P(j\omega)$ aumenta en el eje *real* negativo desde $-\infty$ hasta 0. Cuando $j\omega$ aumenta desde $j0$ hasta $+j\infty$, $P(j\omega)$ disminuye de nuevo hasta $-\infty$, en el eje *real* negativo. La transformación se representa de la siguiente manera (figura 11-30):

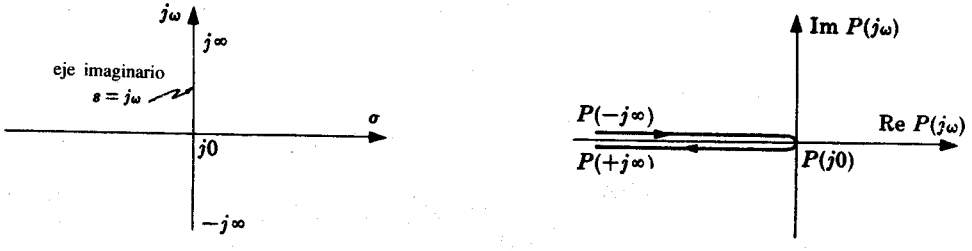


Figura 11-30

Realmente las dos líneas en el plano $P(j\omega)$ están superpuestas, pero aquí, para mayor claridad, se muestran separadas.

11.3. Transforme la región rectangular del plano s, delimitada por las líneas $\omega = 0$, $\sigma = 0$, $\omega = 1$ y $\sigma = 2$, al plano $P(s)$ utilizando la transformación $P(s) = s + 1 - j2$.

Tenemos

$$\omega = 0: \quad P(\sigma) = (\sigma + 1) - j2 \qquad \omega = 1: \quad P(\sigma + j1) = (\sigma + 1) - j1$$
$$\sigma = 0: \quad P(j\omega) = 1 + j(\omega - 2) \qquad \sigma = 2: \quad P(2 + j\omega) = 3 + j(\omega - 2)$$

Puesto que σ varía en todo el intervalo de los números reales ($-\infty < \sigma < \infty$) sobre la línea $\omega = 0$, también lo hace $\sigma + 1$ en $P(\sigma) = (\sigma + 1) - j2$. En consecuencia, $\omega = 0$ se transforma en la línea $-j2$ en el plano $P(s)$. De modo similar, $\sigma = 0$ se transforma en la línea $P(s) = 1$, $\omega = 1$ se transforma en la línea $P(s) = -j1$, y $\sigma = 2$ en la línea $P(s) = 3$. En la figura 11-31 se ilustra la transformación resultante.

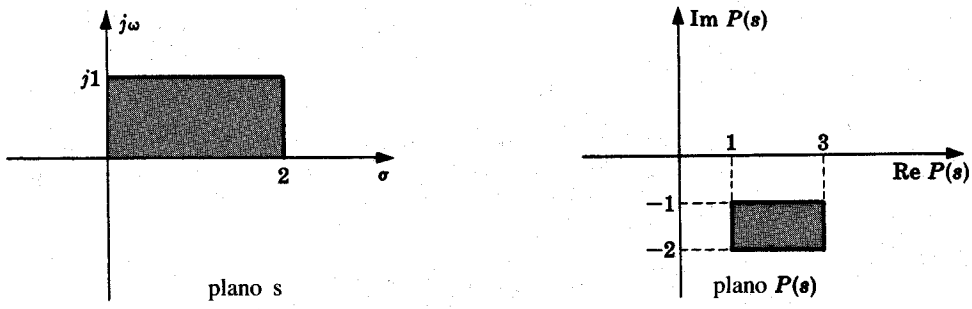


Figura 11-31

Este tipo de representación se llama transformación por **traslación**. Nótese que ésta sería exactamente la misma si $s = \sigma + j\omega$ se remplazara por $z = \mu + j\nu$ en este ejemplo.

11.4. Halle la derivada de $P(s) = s^2$ en los puntos $s = s_0$ y $s_0 = 1$.

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} = \lim_{s \to s_0}\left[\frac{P(s) - P(s_0)}{s - s_0}\right] = \lim_{s \to s_0}\left[\frac{s^2 - s_0^2}{s - s_0}\right] = \lim_{s \to s_0}(s + s_0) = 2s_0$$

En $s_0 = 1$ tenemos $(dP/ds)|_{s=1} = 2$. De modo similar, si $P(z) = z^2$, $(dP/dz)|_{z=1} = 2$.

Funciones analíticas y singularidades

11.5. ¿$P(s) = s^2$ es una función analítica en alguna región del plano s? Si lo es, ¿en cuál región?

Del problema anterior $(dP/ds)|_{s=s_0} = 2s_0$. De donde s^2 es analítica dondequiera que $2s_0$ sea finita (definición 11.1). De esta manera s^2 es analítica en toda la región finita del plano s. Tales funciones a menudo se llaman **funciones completas**. Igualmente z^2 es analítica en toda la región finita del plano z.

11.6. ¿$P(s) = 1/s$ es analítica en alguna región del plano s?

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} = \lim_{s\to s_0}\left[\frac{1/s - 1/s_0}{s - s_0}\right] = \lim_{s\to s_0}\left[\frac{-(s-s_0)}{ss_0(s-s_0)}\right] = \frac{-1}{s_0^2}$$

Esta derivada es única y finita para todo $s_0 \neq 0$. De tal manera que $1/s$ es analítica en todos los puntos del plano, excepto en el origen, $s = s_0 = 0$. El punto $s = 0$ es una *singularidad* (polo) de $1/s$. Existen otras singularidades diferentes de los polos, pero no en las funciones de transferencia de los componentes de los sistemas de control ordinarios.

11.7. ¿$P(s) = |s|^2$ es analítica en alguna región del plano s?

Primero hacemos $s = \sigma + j\omega$, $s_0 = \sigma_0 + j\omega_0$. Entonces

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} = \lim_{(s-s_0)\to 0}\left[\frac{|\sigma+j\omega|^2 - |\sigma_0+j\omega_0|^2}{(\sigma+j\omega)-(\sigma_0+j\omega_0)}\right]$$

$$= \lim_{[(\sigma-\sigma_0)+j(\omega-\omega_0)]\to 0}\left[\frac{(\sigma-\sigma_0)(\sigma+\sigma_0)+(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}{(\sigma-\sigma_0)+j(\omega-\omega_0)}\right]$$

Si existe el límite, éste debe ser único y no debe depender de cómo se aproxime s a s_0, o de manera equivalente cómo $[(\sigma - \sigma_0) + j(\omega - \omega_0)]$ se aproxime a cero. Así que, primero, hagamos que $s \to s_0$ a lo largo del eje $j\omega$ y obtenemos

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} = \lim_{\substack{\omega\to\omega_0\\ \sigma=\sigma_0}}\left[\frac{(\omega-\omega_0)(\omega+\omega_0)}{j(\omega-\omega_0)}\right] = -j2\omega_0$$

Ahora, hagamos que $s \to s_0$ a lo largo del eje σ; es decir,

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} = \lim_{\substack{\sigma\to\sigma_0\\ \omega=\omega_0}}\left[\frac{(\sigma-\sigma_0)(\sigma+\sigma_0)}{\sigma-\sigma_0}\right] = 2\sigma_0$$

De donde *no* existe el límite para valores arbitrarios diferentes de cero de σ_0 y ω_0, y en consecuencia $|s|^2$ no es analítica en parte alguna del plano s excepto posiblemente en el origen. Cuando $s_0 = 0$,

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=0} = \lim_{s\to 0}\left[\frac{|s|^2 - 0}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{(\sigma+j\omega)(\sigma-j\omega)}{\sigma+j\omega}\right] = 0$$

Entonces, $P(s) = |s|^2$ es analítica únicamente en el origen, $s = 0$.

11.8. Si $P(s)$ es analítica en s_0, demuestre que debe ser continua en s_0. Es decir, demuestre que $\lim_{s\to s_0} P(s) = P(s_0)$.

Puesto que
$$P(s) - P(s_0) = \frac{P(s) - P(s_0)}{(s - s_0)} \cdot (s - s_0)$$

para $s \neq s_0$, entonces

$$\lim_{s \to s_0} [P(s) - P(s_0)] = \lim_{s \to s_0} \left[\frac{P(s) - P(s_0)}{(s - s_0)} \right] \cdot \lim_{s \to s_0} (s - s_0) = \left[\frac{dP}{ds} \Big|_{s=s_0} \right] \cdot 0 = 0$$

porque $(dP/ds)|_{s=s_0}$ existe por hipótesis [es decir, $P(s)$ es analítica]. Por tanto

$$\lim_{s \to s_0} [P(s) - P(s_0)] = 0 \qquad \text{o} \qquad \lim_{s \to s_0} P(s) = P(s_0)$$

11.9. Las **funciones polinómicas** se definen mediante $Q(s) \equiv a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$, en donde $a_n \neq 0$, n es un entero positivo llamado **grado del polinomio**, y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes. Demuestre que $Q(s)$ es analítica en toda región limitada (finita) del plano s.

Primero consideremos s^n:

$$\frac{d}{ds}[s^n] \Big|_{s=s_0} = \lim_{s \to s_0} \left[\frac{s^n - s_0^n}{s - s_0} \right] = \lim_{s \to s_0} \left(s^{n-1} + s^{n-2} s_0 + \cdots + s s_0^{n-2} + s_0^{n-1} \right) = n s_0^{n-1}$$

De modo que s^n es analítica en toda región finita del plano s. Entonces, por inducción matemática, $s^{n-1}, s^{n-2}, \ldots, s$ también son analíticas. En consecuencia, mediante los teoremas elementales de los límites de sumas y productos, vemos que $Q(s)$ es analítica en toda región finita del plano s.

11.10. Las **funciones algebraicas racionales** se definen mediante $P(s) \equiv N(s)/D(s)$, en donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios. Demuestre que $P(s)$ es analítica en todo punto s donde $D(s) \neq 0$; es decir, pruebe que las funciones de transferencia de los elementos de sistemas de control que toman la forma de funciones algebraicas racionales son analíticas excepto en sus polos.

Prácticamente la totalidad de los elementos de los sistemas de control lineales se encuentran en esta categoría. El teorema fundamental del álgebra, "un polinomio de grado n tiene n ceros y puede expresarse como un producto de n factores lineales", nos ayuda a introducir a $P(s)$ en una forma más reconocible como función de transferencia de un sistema de control; es decir, $P(s)$ puede escribirse en la forma familiar.

$$P(s) \equiv \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} = \frac{b_m (s + z_1)(s + z_2) \cdots (s + z_m)}{a_n (s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

en donde $-z_1, -z_2, \ldots, -z_n$ son ceros, $-p_1, -p_2, \ldots, -p_n$ son polos, y $m \leq n$.

De la identidad dada por

$$\frac{N(s)}{D(s)} - \frac{N(s_0)}{D(s_0)} \equiv \frac{1}{D(s) D(s_0)} [D(s_0)(N(s) - N(s_0)) - N(s_0)(D(s) - D(s_0))]$$

en donde $D(s) \neq 0$, obtenemos

$$\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} = \lim_{s\to s_0}\left[\frac{\dfrac{N(s)}{D(s)} - \dfrac{N(s_0)}{D(s_0)}}{s - s_0}\right]$$

$$= \lim_{s\to s_0}\left[\frac{1}{D(s)D(s_0)}\left(D(s_0)\left[\frac{N(s)-N(s_0)}{s-s_0}\right] - N(s_0)\left[\frac{D(s)-D(s_0)}{s-s_0}\right]\right)\right]$$

$$= \lim_{s\to s_0}\left[\frac{1}{D(s)}\left(\frac{N(s)-N(s_0)}{s-s_0}\right)\right] - \lim_{s\to s_0}\left[\frac{N(s_0)}{D(s)D(s_0)}\left(\frac{D(s)-D(s_0)}{s-s_0}\right)\right]$$

$$= \lim_{s\to s_0}\left[\frac{1}{D(s)}\right]\cdot\lim_{s\to s_0}\left[\frac{N(s)-N(s_0)}{s-s_0}\right] - \lim_{s\to s_0}\left[\frac{N(s_0)}{D(s)D(s_0)}\right]\cdot\lim_{s\to s_0}\left[\frac{D(s)-D(s_0)}{s-s_0}\right]$$

$$= \frac{1}{D(s_0)}\cdot\left.\frac{dN}{ds}\right|_{s=s_0} - \frac{N(s_0)}{D(s_0)^2}\cdot\left.\frac{dD}{ds}\right|_{s=s_0}$$

en donde hemos usado los resultados de los problemas 11.8, 11.9, y la definición 11.1. En consecuencia, la derivada de $P(s)$ existe ($P(s)$ es analítica) para todos los puntos s en donde $D(s) \neq 0$.

Nótese que hemos determinado una fórmula para la derivada de una función algebraica racional (la última parte de la ecuación anterior) en términos de las derivadas de su numerador y su denominador, además de resolver el problema pedido.

11.11. Demuestre que e^{-sT} es analítica en toda región limitada del plano s.

En la teoría de las variables complejas e^{-sT} se define por medio de la serie de potencias

$$e^{-sT} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-sT)^k}{k!}$$

Mediante la prueba de relación, a medida que $k \to \infty$ tenemos

$$\left|\frac{(-sT)^k/k!}{(-sT)^{k+1}/(k+1)!}\right| = \left|\frac{k+1}{-sT}\right| \to \infty$$

En consecuencia el radio de convergencia de esta serie de potencias es infinito. La suma de una serie de potencias es analítica dentro de su radio de convergencia. Así que, e^{-sT} es analítica en cada región limitada del plano s.

11.12. Demuestre que $e^{-sT}P(s)$ es analítica dondequiera que $P(s)$ sea analítica. En consecuencia los sistemas que contienen una combinación de funciones de transferencia algebraicas racionales y operadores de retardo de tiempo (es decir, e^{-sT}) son analíticas excepto en los polos del sistema.

A partir del problema 11.11, e^{-sT} es analítica en toda región limitada del plano s; y a partir del problema 11.10, $P(s)$ es analítica excepto en sus polos. Ahora

$$\frac{d}{ds}\left[e^{-sT}P(s)\right]\Big|_{s=s_0} = \lim_{s\to s_0}\left[\frac{e^{-sT}P(s) - e^{-s_0T}P(s_0)}{s - s_0}\right]$$

$$= \lim_{s\to s_0}\left[e^{-sT}\left(\frac{P(s) - P(s_0)}{s - s_0}\right) + P(s_0)\left(\frac{e^{-sT} - e^{-s_0T}}{s - s_0}\right)\right]$$

$$= e^{-s_0T}\frac{dP}{ds}\Big|_{s=s_0} + P(s_0)\frac{d}{ds}(e^{-sT})\Big|_{s=s_0}$$

Por tanto, $e^{-sT}\,P(s)$ es analítica dondequiera que $P\,(s)$ sea analítica.

11.13. Considere la función dada por $P(s) = e^{-sT}\,(s^2 + 2s + 3)/(s^2 - 2s + 2)$. ¿En dónde están las singularidades de esta función? ¿En dónde es analítica $P\,(s)$?

Los puntos singulares son los polos de $P(s)$. Puesto que $s^2 - 2s + 2 = (s - 1 + j1)(s - 1 - j1)$, los dos polos están dados por $-p_1 = 1 - j1$ y $-p2 = 1 + j1$. $P(s)$ es analítica en toda región limitada del plano s, excepto en los puntos $s = -p_1$ y $s = -p_2$.

Contornos y rodeos

11.14. ¿Qué puntos son *encerrados* por los siguientes contornos (figura 11-32)?

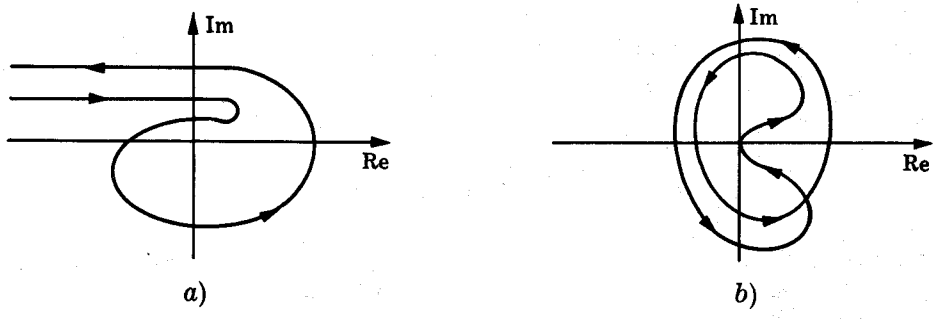


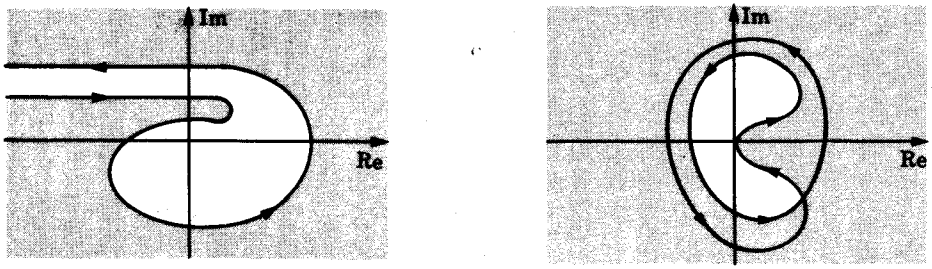
Figura 11-32

Sombreando la región a la derecha de cada contorno a medida que se recorre en la dirección prescrita, obtenemos la figura 11-33. Todos los puntos de las regiones sombreadas están encerrados.

11.15. ¿Qué contornos del problema 11.14 son *cerrados*?

Claramente el contorno de la parte *b*) es cerrado. El de la parte *a*) puede o no cerrarse sobre sí mismo en el infinito en el plano complejo. Esto no puede determinarse en la gráfica dada.

11.16. ¿Cuál es la *dirección* (positiva o negativa) de cada contorno en el problema 11.14 *a*) y 11.14 *b*)?



(*a*) (*b*)

Figura 11-33

Utilizando el origen como base, se dirige cada contorno en dirección S (antihoraria), dirección *negativa* alrededor del origen.

11.17. Determine el número de rodeos N_0 del origen para el contorno de la figura 11-34.

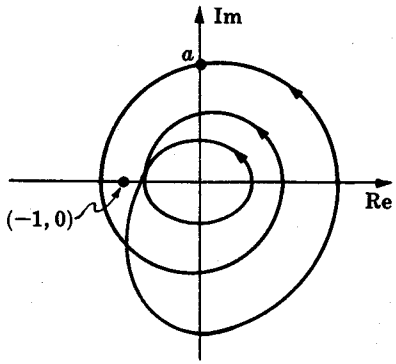


Figura 11-34

Comenzando en el punto *a*, giramos una línea radial desde el origen hasta el contorno en la dirección de las flechas. Tres giros de 360° en sentido S (antihorario) producen el retorno de la línea radial al punto *a*. Por tanto $N_0 = -3$.

11.18. Determine el número de rodeos N_0 del origen para el contorno de la figura 11-35.

Al comenzar en el punto *a*, el contorno barre un ángulo de + 180° cuando se alcanza *b* por primera vez. Al seguir desde *b* hasta *c* y luego regresar a *b*, la ganancia neta angular es cero. Al regresar de *b* hasta *a* produce + 180°. De modo que $N_0 = +1$.

11.19. Determine el número de rodeos *N* del punto (−1, 0) (esto es, el punto −1 del eje real) para el contorno del problema 11.17.

Al comenzar de nuevo en el punto *a*, giramos una línea radial *desde el punto* (−1, 0) hasta el contorno en la dirección de las flechas que se muestran en la figura 11-36. Al seguir de *a* hasta *b* y

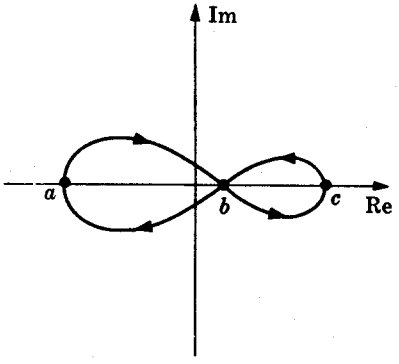


Figura 11-35

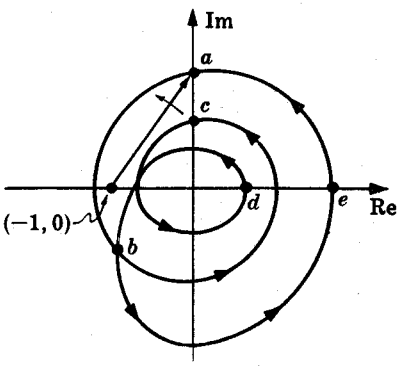


Figura 11-36

hasta c, la línea radial barre algo menos de $-360°$. Pero de c a d y de regreso a b, el ángulo se incrementa de nuevo hacia el valor alcanzado al ir de a hasta b únicamente. Entonces, de b a e hasta a el ángulo resultante es $-360°$. Así que $N = -1$.

Propiedades de las transformaciones P

11.20. Las siguientes funciones: *a)* $P(s) = s^2$, *b)* $P(s) = s^{1/2}$, ¿son univaluadas?

a) La sustitución de cualquier número complejo s en $P(s) = s^2$ produce un valor único para $P(s)$. En consecuencia $P(s) = s^2$ es una función univaluada.

b) En la forma polar tenemos $s = |s|e^{j\theta}$, en donde $\theta = \arg(s)$. En consecuencia $s^{1/2} = |s|^{1/2} e^{j\theta/2}$. Ahora, si aumentamos θ en 2π regresamos al mismo punto s. Pero

$$P(s) = |s|^{1/2}e^{j(\theta+2\pi)/2} = |s|^{1/2}e^{j\theta/2}e^{j\pi} = P(s)\,e^{j\pi}$$

que es *otro* punto en el plano $P(s)$. En consecuencia $P(s) = s^{1/2}$ tiene dos puntos en el plano $P(s)$ por cada punto en el plano s. Esta no es una función univaluada, es una **función multivaluada** (con dos valores).

11.21. Demuestre que todo contorno cerrado que contenga puntos no singulares de $P(s)$ en el plano s se transforma en un contorno cerrado en el plano $(P(s)$.

Supongamos que no. Entonces, en algún punto s_0 en donde el contorno del plano s se cierra sobre sí mismo, el contorno en el plano $P(s)$ no es cerrado. Esto significa que un punto (no singular) s_0 del plano s se transforma en más de un punto en el plano $P(s)$ (las imágenes del punto s_0). Esto contradice el hecho de que $P(s)$ sea una función univaluada (propiedad 1, sección 11.4).

11.22. Demuestra que P es una transformación conforme dondequiera que P sea analítica y $dP/ds \neq 0$.

Considérense dos curvas: C en el plano s y C', la imagen de C, en el plano $P(s)$. Dejemos que la curva en el plano s sea descrita por el parámetro t; es decir, cada t corresponde a un punto $s = s(t)$ a

lo largo de la curva C. En consecuencia, C' se describe por medio de $P[s(t)]$ en el plano $P(s)$. Las derivadas ds/dt y dP/dt representan los vectores tangentes a los puntos correspondientes en C y C'. Ahora

$$\left.\frac{dP[s(t)]}{dt}\right|_{P(s)=P(s_0)} = \frac{ds}{dt}\cdot\left.\frac{dP(s)}{ds}\right|_{s=s_0}$$

en donde se ha utilizado el hecho de que P es analítica en algún punto $s_0 \equiv s(t_0)$. Poniendo $dP/dt \equiv r_1 e^{j\phi}$, $dP/ds \equiv r_2 e^{j\alpha}$, y $ds/dt \equiv r_3 e^{j\theta}$. Entonces

$$r_1(s_0)\,e^{j\phi(s_0)} = r_2(s_0)\cdot r_3(s_0)\,e^{j[\theta(s_0)+\alpha(s_0)]}$$

Igualando los ángulos, tenemos $\phi(s_0) = \theta(s_0) + \alpha(s_0) = \theta(s_0) + \arg\,(dP/ds)|_{s=s_0}$, y vemos que la tangente a C en s_0 ha rotado un ángulo $\arg\,(dP/ds)|_{s=s_0}$ en $P(s_0)$ sobre C' en el plano $P(s)$.

Ahora consideremos dos curvas C_1 y C_2 que intersecan en s_0, con imágenes C_1' y C_2' en el plano $P(s)$ (figura 11-37).

Sea θ_1 el ángulo de inclinación de la tangente a C_1, y θ_2 el de C_2. Entonces, los ángulos de inclinación para C_1' y C_2' son $\theta_1 + \arg(dP/ds)|_{s=s_0}$, y $\theta_2 + \arg(dP/ds)|_{s=s_0}$. En consecuencia el ángulo $(\theta_1 - \theta_2)$ entre C_1 y C_2 es igual en magnitud y sentido al ángulo entre C_1' y C_2',

$$\theta_1 + \arg\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} - \theta_2 - \arg\left.\frac{dP}{ds}\right|_{s=s_0} = \theta_1 - \theta_2$$

Nótese que el $\arg(dP/ds)|_{s=s_0}$ es indeterminado si $(dP/ds)|_{s=s_0} 0$.

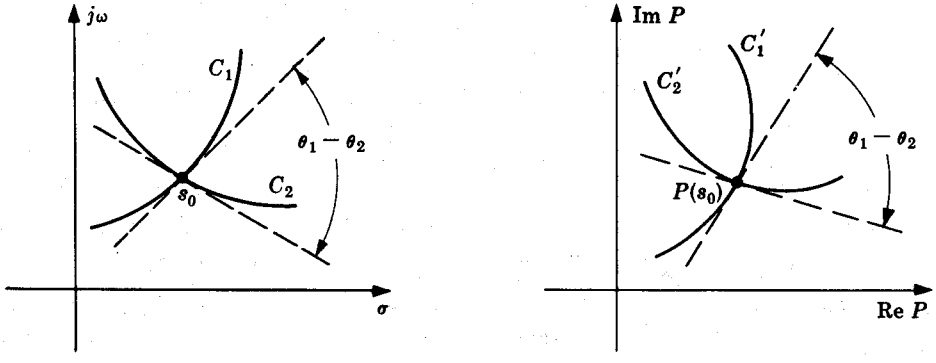


Figura 11-37

11.23. Demuestre que $P(s) = e^{-sT}$ es conforme en toda región limitada del plano s.

e^{-sT} es analítica (problema 11.11). Más aún, $(d/ds)(e^{-sT}) = -Te^{-sT} \neq 0$ en cualquier región limitada (finita) del plano s. Entonces, a partir del problema 11.12, $P(s) = e^{-sT}$ es conforme.

11.24. Demuestre que $P(s)e^{-sT}$ es conforme para $P(s)$ racional y $dP/ds \neq 0$.

A partir del problema 11.12, Pe^{-sT} es analítica excepto en los polos de P, y también,

$$\frac{d}{ds}[Pe^{-sT}] = e^{-sT}\frac{dP}{ds} - PTe^{-sT} = e^{-sT}\left(\frac{dP}{ds} - TP\right)$$

Supóngase $(d/ds)[Pe^{-sT}] = 0$. Entonces, puesto que $e^{-sT} \neq 0$ para cualquier s finito, se tiene $dP/ds - TP = 0$ cuya solución general es $P(s) = ke^{sT}$, con k constante. Pero P es racional y e^{sT} no lo es. Por tanto $(d/ds)[Pe^{-sT}] \neq 0$.

11.25. Dos contornos C_1 y C_2 en el plano s intersecan en un ángulo de 90° en la figura 11-38. La función analítica $P(s)$ transforma estos contornos en el plano $P(s)$, y $dP/ds \neq 0$ en s_0. Dibuje la imagen del contorno C_2 cerca de $P(s_0)$. También se da la imagen de C_1.

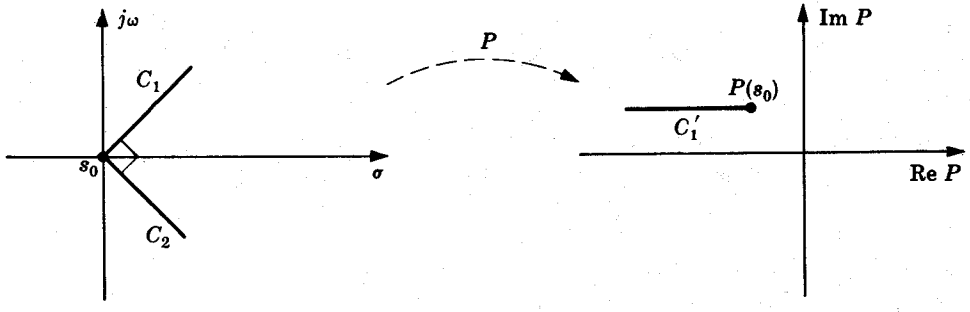


Figura 11-38

A partir del problema 11.22, P es conforme; en consecuencia el ángulo entre C_1' y C_2' es 90°. Puesto que C_1 hace un giro a la izquierda en torno a C_2 en s_0, entonces C_1' también debe girar a la izquierda en $P(s_0)$ (figura 11-39).

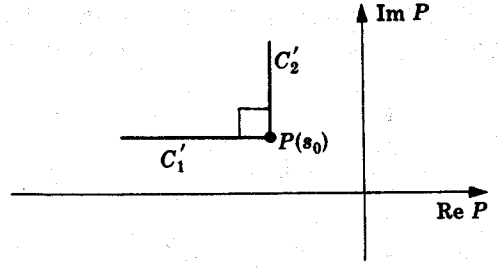


Figura 11-39

11.26. Pruebe la ecuación *(11.1)*: $N_0 = C_0 - P_0$.

La prueba exhaustiva implica mucho más de lo que podemos manejar con lo que se presenta en este libro acerca de la teoría de variables complejas. Así que asumimos que se tiene conocimiento

de un teorema bien conocido de funciones de una variable compleja, y continuamos a partir de allí. El teorema establece que si C es un contorno cerrado en el plano s, $P(s)$ es una función analítica en C y dentro de C excepto en los posibles polos, y $P(s) \neq 0$ en C, entonces

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{P'(s)}{P(s)}\,ds = C_0 - P_0$$

en donde C_0 es el número total de polos dentro de C, P_0 el número de polos dentro de C y $P' \equiv dP/ds$. Los polos y los ceros múltiples se cuentan uno por uno; es decir, un polo doble en un punto son dos polos del total, un cero triple son tres ceros del total.

Ahora, puesto que $d[\ln P(s)] = [P'(s)/P(s)]ds$ y $\ln P(s) \equiv \ln |P(s)| + j \arg P(s)$, tenemos

$$\frac{1}{2\pi j}\int_C \left[\frac{P'(s)}{P(s)}\right] ds = \frac{1}{2\pi j}\int_C d[\ln P(s)] = \frac{1}{2\pi j}[\ln P(s)]\Big|_C = \frac{1}{2\pi j}[\ln|P(s)| + j \arg P(s)]\Big|_C$$

$$= \frac{1}{2\pi j}[\ln|P(s)|]\Big|_C + \frac{1}{2\pi j}[j \arg P(s)]\Big|_C$$

Ahora, puesto que $\ln|P(s)|$ devuelve su valor original cuando vamos una vez alrededor de C, el primer término en la última ecuación es cero. Por tanto

$$C_0 - P_0 = \frac{1}{2\pi}[\arg P(s)]\Big|_C$$

Puesto que C es cerrado, la imagen de C en el plano $P(s)$ es cerrada, y el cambio neto en el ángulo $\arg P(s)$ alrededor del contorno $P(s)$ es 2π veces el número de rodeos N_0 del origen en el plano $P(s)$. Entonces $C_0 - P_0 = 2N_0\pi/2\pi = N_0$. A menudo este resultado se llama *principio del argumento*. Nótese que éste sería el mismo si reemplazamos s por z en todo lo anterior. Por tanto, la ecuación (*11.1*) también es válida para sistemas discretos en el tiempo.

11.27. Determine el número N_0 de rodeos del contorno en el plano P para el contorno del plano complejo, transformado en el primero, como se muestra en la figura 11-40.

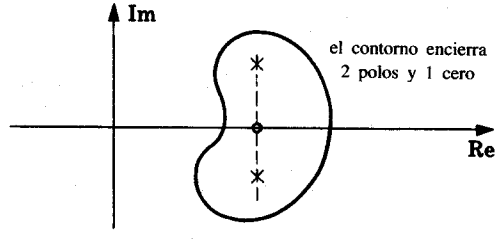


Figura 11-40

$P_0 = 2$, $C_0 = 1$. Por tanto $N_0 = 1 - 2 = -1$.

11.28. Determine el número C_0 de ceros encerrados por el contorno del plano complejo de la figura 11-41, en donde $P_0 = 5$.

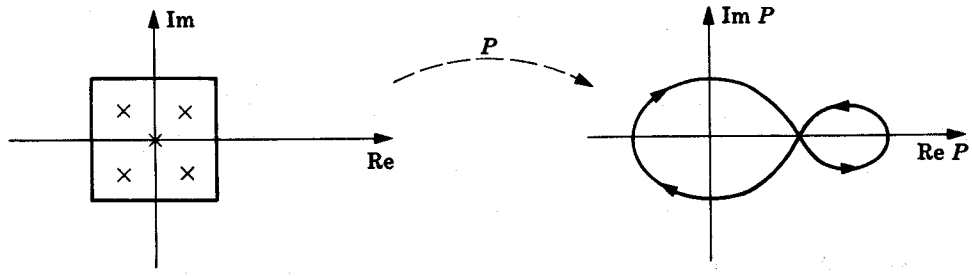


Figura 11-41

$N_0 = 1$ se calculó en el problema 11.8 a partir del contorno dado en el plano P. Puesto que $P_0 = 5$, entonces $C_0 = N_0 + P_0 = 1 + 5 = 6$.

11.29. Determine el número P_0 de polos encerrados por el contorno del plano complejo en la figura 11-42, en donde $C_0 = 0$.

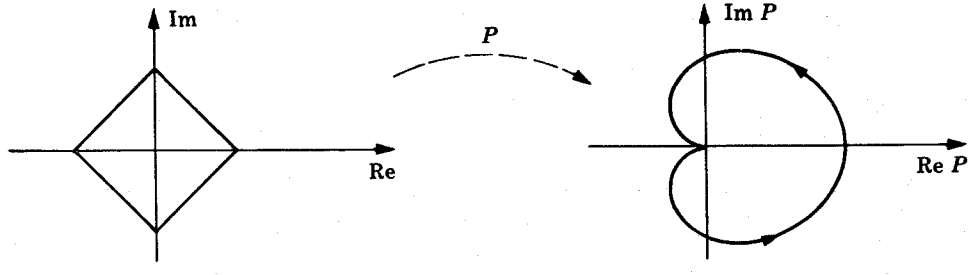


Figura 11-42

Claramente, $N_0 = -1$. En consecuencia $P_0 = C_0 - N_0 = 0 + 1 = 1$.

11.30. Determine N_0 [ecuación (*11.1*)] para la función de transferencia (transformación) y el contorno del plano s de la figura 11-43.

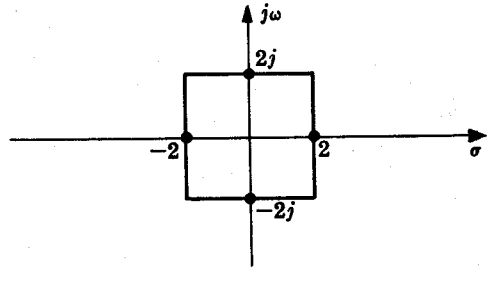


Figura 11-43

La transformación de polos y ceros de $P(s)$ se presenta en la figura 11-44. De donde, hay tres polos (dos en $s = 0$ y uno en $s = -1$) y ningún cero encerrados por el contorno. Así $P_0 = 3$, $C_0 = 0$ y $N_0 = -3$.

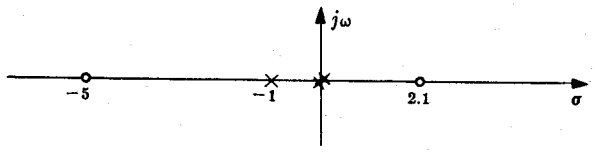


Figura 11-44

11.31. En la figura 11-45, ¿el origen está *encerrado* por el contorno?

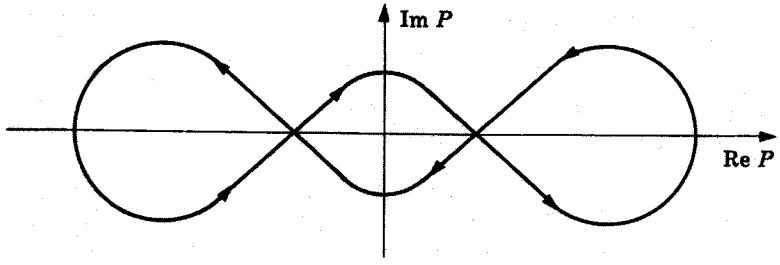


Figura 11-45

Se ha sombreado la región a la derecha del contorno. El origen cae en la región sombreada y, en consecuencia, está *encerrado* por el contorno.

11.32. ¿Cuál es el signo de N_0 en el problema 11.31?

Puesto que el origen está encerrado por el contorno en la dirección R (horaria), $N_0 > 0$.

Diagramas polares

11.33. Verifique la propiedad 1 de la sección 11.6.

Sea $P(\omega) \equiv P_1(\omega) + j_2P(\omega)$, y $a \equiv a_1 + ja_2$, en donde $P_1(\omega)$, $P_2(\omega)$, a_1 y a_2 son reales. Entonces

$$P(\omega) + a = (P_1(\omega) + a_1) + j(P_2(\omega) + a_2)$$

y la imagen de cualquier punto $(P_1(\omega), P_2(\omega)$ en el plano $P(\omega$ es $(P_1(\omega) + a_1, P_2(\omega + a_2)$ en el plano $(P(\omega) + a)$. Por tanto la imagen de un contorno $P(\omega)$ es simplemente una *traslación* (*véase* el problema 11.3). De manera clara puede verse que la traslación del contorno en a unidades es equivalente a la traslación (del origen) de los ejes $-a$ unidades.

11.34. Verifique la propiedad 2 de la sección 11.6.

La función de transferencia $P(s)$ de un sistema lineal con coeficientes constantes es, en general, una relación de polinomios con coeficientes constantes. Las raíces complejas de tales polinomios se presentan en pares conjugados; esto es, si $a + jb$ es una raíz, entonces $a - jb$ también es una raíz. Si representamos con un asterisco (*) la conjugada compleja, entonces, $a + jb = (a - jb)^*$, y si $a = 0$, entonces $jb = (-jb)^*$. Entonces $P(j\omega) = P(-j\omega)^*$. Gráficamente esto significa que el diagrama para $P(-j\omega)$ es la imagen especular alrededor del eje real de la gráfica para $P(j\omega)$ ya que sólo cambia de signo la parte imaginaria de $P(j\omega)$.

11.35. Dibuje el diagrama polar para cada una de las siguientes funciones complejas:

$a)$ $P(j\omega) = \omega^2 \angle 45°$, $b)$ $P(j\omega) = \omega^2(\cos 45° + j \operatorname{sen} 45°)$, $c)$ $P(j\omega) = 0.707\omega^2 + 0.707j\omega^2$.

$a)$ $\omega^2 \angle 45°$ está en la forma de la ecuación (*11.2*). En consecuencia se utilizan coordenadas polares en la figura 11-46.

$b)$ $P(j\omega) = \omega_2(\cos 45° + j \operatorname{sen} 45°) = \omega_2\ (0.707j)$
Es decir, $P(j\omega)$ tiene la forma de la ecuación (*11.3*) o la (*11.4*). En consecuencia la elección natural son las coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura 11-47.

Nótese que esta gráfica es idéntica a la de la parte $a)$ excepto por las coordenadas. En efecto, $\omega^2(0.707 + 0.707j) = \omega^2 \angle 45°$.

$c)$ Claramente puede verse que $c)$ es idéntica a $b)$ y en consecuencia a $a)$. Entre otras cosas, este problema ha ilustrado cómo puede escribirse de tres formas diferentes pero matemática y gráficamente equivalentes a una función compleja de frecuencia ω: la forma polar, ecuación (*11.2*); la *forma de Euler* o *trigonométrica*, ecuación (*11.3*) y la forma rectangular (compleja) equivalente, ecuación (*11.4*).

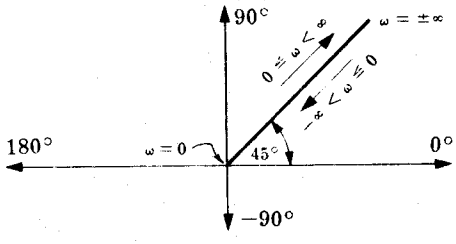


Figura 11-46

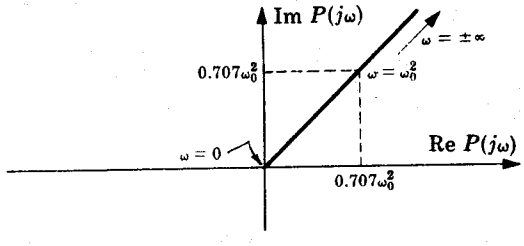


Figura 11-47

11.36. Dibuje el diagrama polar de

$$P(j\omega) = 0.707\omega^2(1 + j) + 1$$

En el problema 11.35 $b)$ se dibujó el diagrama polar de $0.707\omega^2(1 + j)$. A partir de la propiedad 1 de la sección 11.6, el diagrama polar pedido es igual al dado en el problema 11.35 $b)$ con su origen desplazado a $-a = -1$, como se muestra en la figura 11-48.

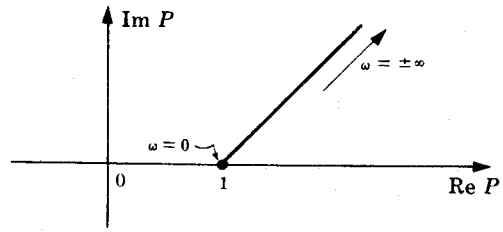


Figura 11-48

11.37. Construya un diagrama polar a partir de las gráficas de la magnitud y del ángulo de fase de $P(j\omega)$ de la figura 11-49, que representan la respuesta de frecuencia de un sistema lineal con coeficientes constantes.

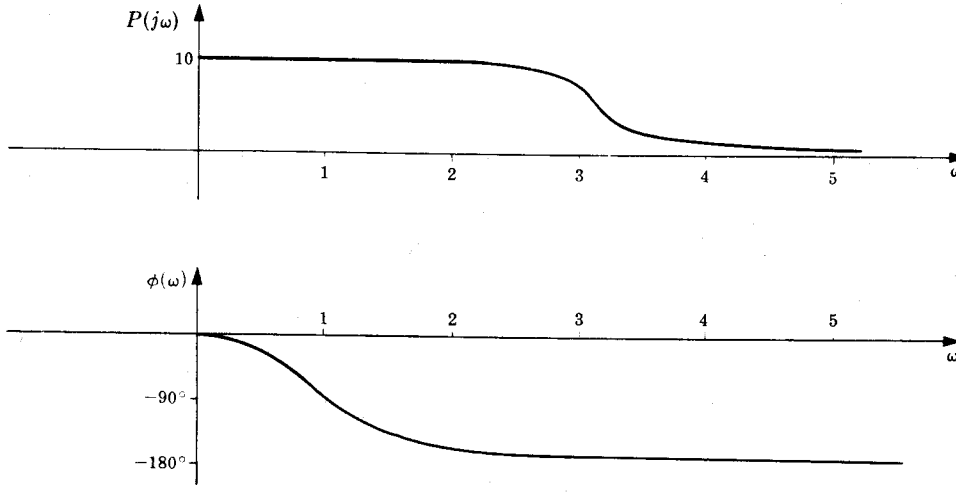


Figura 11-49

Las gráficas que se presentan antes difieren poco de las *representaciones de Bode*, que se discuten en detalle en el Capítulo 15. El diagrama polar se construye transformando este conjunto de gráficas en el plano $P(j\omega)$. Solamente es necesario escoger los valores de ω y los correspondientes de $|P(j\omega)|$ y $\phi(\omega)$ de las gráficas, y representar estos puntos en el plano $P(j\omega)$. Por ejemplo en $\omega = 0$, $|P(j\omega)| = 10$ y $\phi(\omega) = 0$. En la figura 11-50 se presenta el diagrama polar resultante.

La parte de la gráfica para $-\infty < \omega < 0$ se ha dibujado utilizando la propiedad de simetría conjugada (sección 11.6).

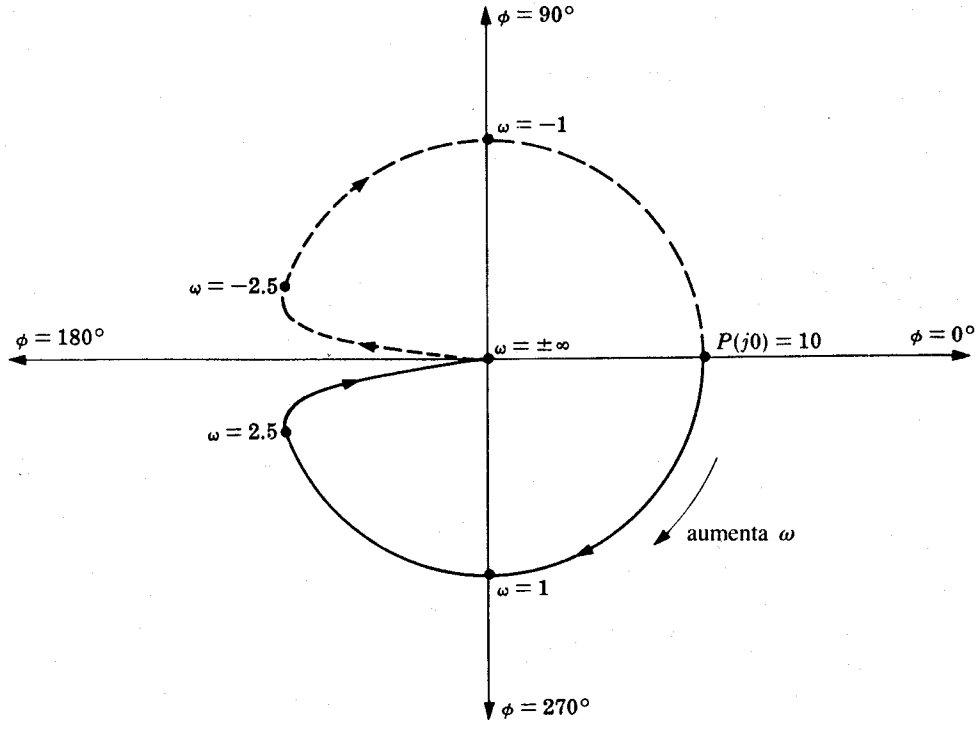


Figura 11-50

11.38. Dibuje el diagrama polar para

$$GH(s) = \frac{1}{s^4(s+p)} \qquad p > 0$$

Sustituyendo s por $j\omega$ y aplicando la ecuación (*11.2*), obtenemos

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j^4\omega^4(j\omega + p)}$$

$$= \frac{1}{\omega^4\sqrt{\omega^2 + p^2}} \angle -\tan^{-1}(\omega/p)$$

Para $\omega = 0$ y $\omega \to \infty$, tenemos

$$GH(j0) = \infty \angle 0° \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle -90°$$

Claramente, a medida que ω aumenta desde cero hasta infinito, el ángulo de fase permanece negativo y disminuye a $-90°$, y su magnitud disminuye de manera monótona a cero. Así, el

diagrama polar puede dibujarse como se muestra en la figura 11-51. La línea de guiones representa la imagen especular de la gráfica para $0 < \omega < \infty$ (sección 11.6, propiedad 2). En consecuencia esta es la gráfica polar para $-\infty < \omega < 0$.

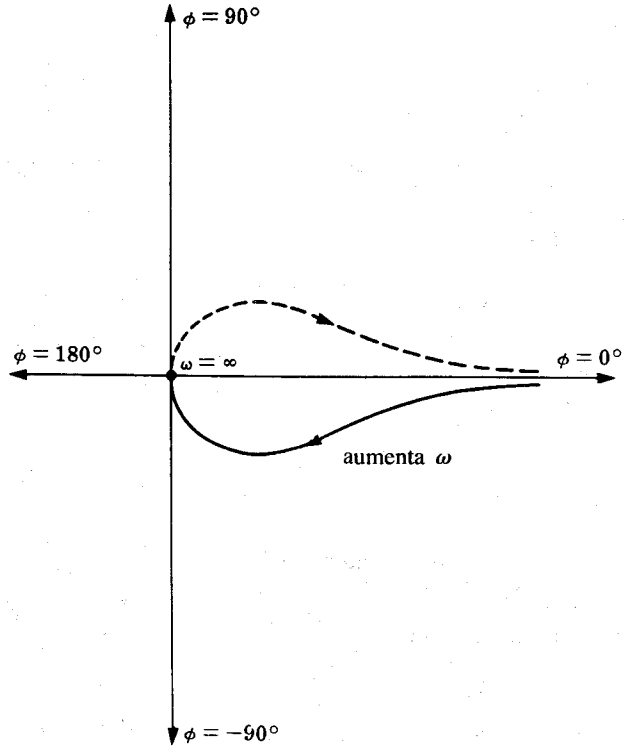


Figura 11-51

La trayectoria de Nyquist

11.39. Demuestre que el semicírculo infinito, la parte $\overline{def}$ de la trayectoria de Nyquist, se transforma en el origen $P(s) = 0$ en el plano $P(s)$ para todas las funciones de transferencia de la forma:

$$P(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)}$$

en donde $n > 0$, K es una constante, y $-p_i$ es cualquier polo finito.

Para $n > 0$,

$$\left| \lim_{R\to\infty} P(Re^{j\theta}) \right| \equiv |P(\infty)| = \lim_{R\to\infty} \left| \frac{K}{\prod_{i=1}^{n} (Re^{j\theta} + p_i)} \right|$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{|K|}{\prod_{i=1}^{n} |Re^{j\theta} + p_i|} \leq \lim_{R\to\infty} \frac{|K|}{\prod_{i=1}^{n} |R - |p_i||} = 0$$

Puesto que $|P(\infty)| \leq 0$, entonces claramente $|P(\infty)| \equiv 0$.

11.40. Demuestre que el semicírculo infinito, la parte $\overline{def}$ de la trayectoria de Nyquist, se transforma en el origen $P(s) = 0$ en el plano $P(s)$ para todas las funciones de transferencia de la forma:

$$P(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)}$$

en donde $m < n$, K es una constante, y $-p_i$ y $-z_i$ son polos y ceros finitos, respectivamente.

Para $m < n$,

$$\left| \lim_{R\to\infty} P(Re^{j\theta}) \right| \equiv |P(\infty)| = \lim_{R\to\infty} \left| \frac{K \prod_{i=1}^{m} (Re^{j\theta} + z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (Re^{j\theta} + p_i)} \right|$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{|K| \prod_{i=1}^{m} |Re^{j\theta} + z_i|}{\prod_{i=1}^{n} |Re^{j\theta} + p_i|} \leq \lim_{R\to\infty} \frac{|K| \prod_{i=1}^{m} |R + |z_i||}{\prod_{i=1}^{n} |R - |p_i||} = 0$$

Puesto que $|P(\infty)| \leq 0$, entonces $|P(\infty)| \equiv 0$.

Diagramas de estabilidad de Nyquist

11.41. Pruebe que un sistema continuo del tipo l incluye l semicírculos infinitos en el lugar geométrico de su diagrama de estabilidad de Nyquist. Es decir, demuestre que la porción $\overline{ija}$ de la trayectoria de Nyquist se transforma en un arco de $180l$ grados al infinito en el plano $P(s)$.

La función de transferencia de un sistema continuo del tipo l tiene la forma:

$$P(s) = \frac{B_1(s)}{s^l B_2(s)}$$

en donde $B_1(0)$ y $B_2(0)$ son finitos y diferentes de cero. Si hacemos $B_1(s)/B_2(s) \equiv F(s)$, entonces

$$P(s) = \frac{F(s)}{s^l}$$

en donde $F(0)$ es finita y diferente de cero. Ahora, hacemos $s = \rho e^{j\theta}$, como se requiere en la ecuación (*11.12*). Claramente $\lim_{\rho \to 0} F(\rho e^{j\theta}) = F(0)$. Entonces $P(\rho e^{j\theta}) = F(\rho e^{j\theta})/\rho^l e^{jl\theta}$ y

$$\lim_{\rho \to 0} P(\rho e^{j\theta}) = \infty \cdot e^{-jl\theta} \qquad -90° \leq \theta \leq +90°$$

En $\theta = -90°$, el límite es $\infty \cdot e^{j90l}$. En $\theta = +90°$, el límite es $\infty \cdot e^{-j90l}$. Por tanto el ángulo subtendido en el plano $P(s)$ al transformar el lugar geométrico del semicírculo infinitesimal de la trayectoria de Nyquist en las vecindades del origen en el plano s, es $90l - (-90l) = 180l$ grados, lo cual representa l semicírculos infinitos en el plano $P(s)$.

11.42. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para la función de transferencia en malla abierta dada por

$$GH(s) = \frac{1}{(s+p_1)(s+p_2)} \qquad p_1, p_2 > 0$$

En la figura 11-52 se presenta la trayectoria de Nyquist para este sistema del tipo 0.

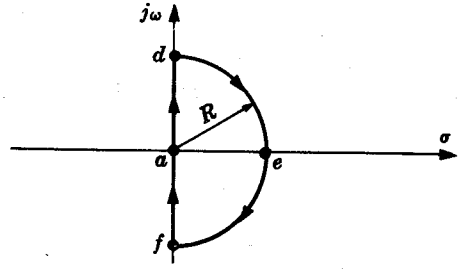


Figura 11-52

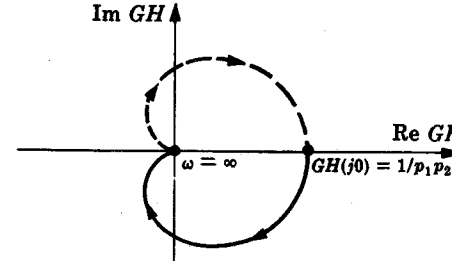


Figura 11-53

Puesto que no hay polos en el eje $j\omega$, el paso 2 de la sección 11.8 indica que el diagrama polar de $GH(j\omega)$ produce la imagen de la trayectoria $\overline{ad}$ (y en consecuencia $\overline{fad}$) en el plano $GH(s)$. Haciendo $s = j\omega$ para $0 < \omega < \infty$, obtenemos

$$GH(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)} = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2+p_1^2)(\omega^2+p_2^2)}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p_2}\right)$$

$$GH(j0) = \frac{1}{p_1 p_2}\angle 0° \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle 180°$$

Para $0 < \omega < \infty$, el diagrama polar pasa por el tercero y cuarto cuadrantes porque $\phi = -[\tan^{-1}(\omega/p_1) + \tan^{-1}(\omega/p^2)]$ varía desde 0° hasta 180° cuando aumenta ω.

A partir del problema 11.39, la trayectoria $\overline{def}$ se dibuja en el origen $P(s) = 0$. Por tanto el diagrama de estabilidad de Nyquist es una réplica del diagrama polar. Esta se dibuja fácilmente a partir de las derivaciones anteriores, como se muestra en la figura 11-53.

11.43. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = 1/s$.

En la figura 11-54 se presenta la trayectoria de Nyquist para este sistema simple del tipo 1.

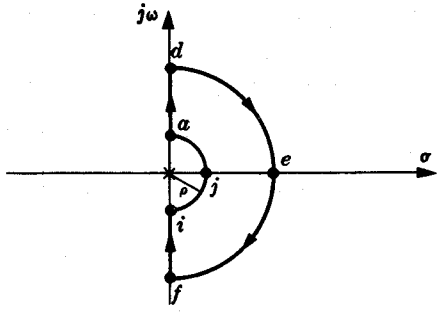


Figura 11-54

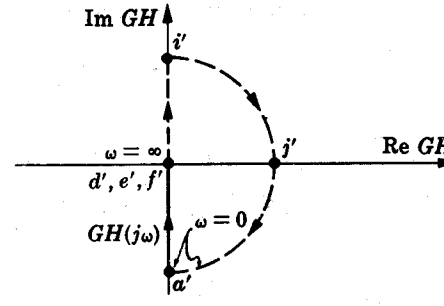


Figura 11-55

Para la trayectoria $\overline{ad}$, $s = j\omega$ $0 < \omega < \infty$, y

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega}\angle -90° \qquad \lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \infty \angle -90° \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle -90°$$

La trayectoria $\overline{def}$ se transforma en el origen (*véase* el problema 11.39).

La trayectoria $\overline{f'i}$ es la imagen especular de $\overline{a'd}$ alrededor del eje real.

La imagen de la trayectoria $\overline{ija}$ se determina a partir de la ecuación (*11.12*) haciendo $s = \lim_{p \to 0} \rho e^{j\theta}$, en donde $-90° \leq \theta \leq 90°$:

$$\lim_{\rho \to 0} GH(\rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{1}{\rho} e^{-i\theta}\right] = \infty \cdot e^{-i\theta} = \infty \angle -\theta$$

Para el punto i, $\theta = -90°$; entonces i se transforma en i' en $\infty \angle 90°$. En el punto j, $\theta = 0°$; entonces el punto j se transforma en j' en $\infty \angle 0°$. De manera similar, a se transforma en a' en $\infty \angle -90°$. La trayectoria $\overline{i'j'a'}$ también pudo haberse obtenido a partir de la propiedad de la representación conforme de la transformación, como se explicó en el ejemplo 11.9, además de la afirmación probada en el problema 11.41.

El diagrama de estabilidad de Nyquist resultante se muestra en la figura 11-55.

11.44. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = 1/s(s + p_1)(s + p_2)$, $p_1, p_2 > 0$.

La trayectoria de Nyquist para este sistema del tipo 1 es la misma que para el problema anterior Para la trayectoria $\overline{ad}$, $s = j\omega$, $0 < \omega < \infty$, y

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)} = \frac{1}{\omega\sqrt{(\omega^2 + p_1^2)(\omega^2 + p_2^2)}} \angle -90° - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p_2}\right)$$

$$\lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \infty \angle -90° \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle -270° = 0 \angle +90°$$

Puesto que el ángulo de fase cambia de signo a medida que ω aumenta, la gráfica atraviesa el eje real. A valores intermedios de frecuencia, el ángulo de fase ϕ está dentro del rango $90° < \phi < -270°$. Por tanto la gráfica está en el segundo y tercer cuadrantes. Se encuentra una asíntota de $GH(j\omega)$ para $\omega \to 0$, al escribir $GH(j\omega)$ como una parte real más una imaginaria, y tomar *luego* el límite cuando $\omega \to 0$:

$$GH(j\omega) = \frac{-(p_1 + p_2)}{(\omega^2 + p_1^2)(\omega^2 + p_2^2)} - \frac{j(p_1 p_2 - \omega^2)}{\omega(\omega^2 + p_1^2)(\omega^2 + p_2^2)} \qquad \lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \frac{-(p_1 + p_2)}{p_1^2 p_2^2} - j\infty$$

De aquí que la línea $GH = -(p_1 + p_2)/p_1^2 p_2^2$ sea una asíntota del diagrama polar.

La trayectoria $\overline{def}$ se transforma en el origen (*véase* el problema 11.39). La trayectoria $\overline{f'i'}$ es la imagen especular de $\overline{a'd'}$ alrededor del eje real. La trayectoria $\overline{i'j'a'}$ se determina más fácilmente mediante la propiedad de la transformación conforme y por el hecho de que un sistema del tipo 1 tiene *un* semicírculo infinito en su trayectoria (problema 11.41). En la figura 11-56 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist resultante.

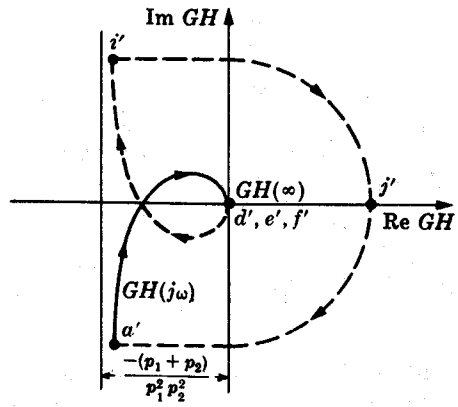


Figura 11-56

11.45. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = 1/s^2$.

La trayectoria de Nyquist para este sistema del tipo 2 es la misma que para el problema anterior, excepto que en lugar de uno hay dos polos en el origen. Para $\overline{ad}$,

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j^2\omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \angle 180° \qquad \lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \infty \angle 180° \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle 180°$$

Con claridad puede verse que el diagrama polar se encuentra a lo largo del eje real negativo, aumentando desde $-\infty$ hasta 0 a medida que aumenta ω. La trayectoria $\overline{def}$ se transforma en el origen, y la trayectoria $\overline{ija}$, en *dos* semicírculos infinitos en el infinito (*véase* el problema 11.41). Puesto que la trayectoria de Nyquist gira a la derecha en i y en a, también el diagrama de estabilidad de Nyquist lo hace en i' y a'. En la figura 11-57 se presenta el lugar geométrico resultante.

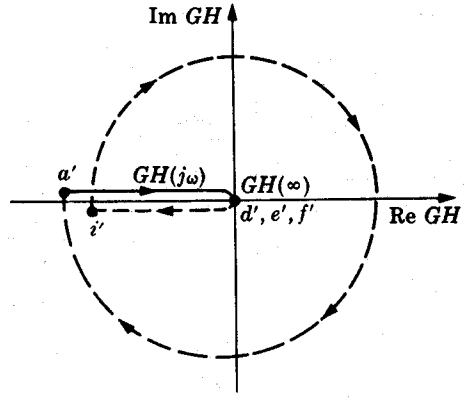


Figura 11-57

11.46. Dibuje la gráfica de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = 1/s^2(s+p)$, $p > 0$.

La trayectoria de Nyquist para este sistema del tipo 2 es la misma que la del problema anterior. Para $\overline{ad}$,

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j^2\omega^2(j\omega + p)} = \frac{1}{\omega^2\sqrt{\omega^2 + p^2}} \angle -180° - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

$$\lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \infty \angle -180° \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle -270°$$

Para $0 < \omega < \infty$ el ángulo de fase varía continuamente desde $-180°$ hasta $-270°$; así el diagrama se localiza en el segundo cuadrante. El resto del diagrama de Nyquist se transforma en el plano GH como en el problema anterior. En la figura 11-58 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist resultante.

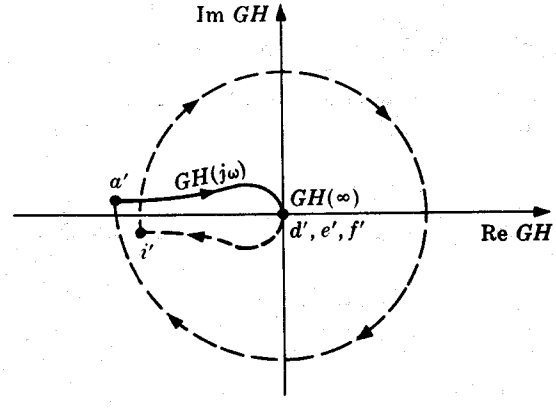


Figura 11-58

11.47. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = 1/s^4(s+p)$, $p > 0$.

Hay cuatro polos en el origen en el plano s, y la trayectoria de Nyquist es la misma que la del problema anterior. El diagrama polar para este sistema se determinó en el problema 11.38. El resto de la trayectoria de Nyquist se transforma al utilizar los resultados de los problemas 11.39 y 11.41, y la propiedad conforme de la transformación. En la figura 11-59 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist resultante.

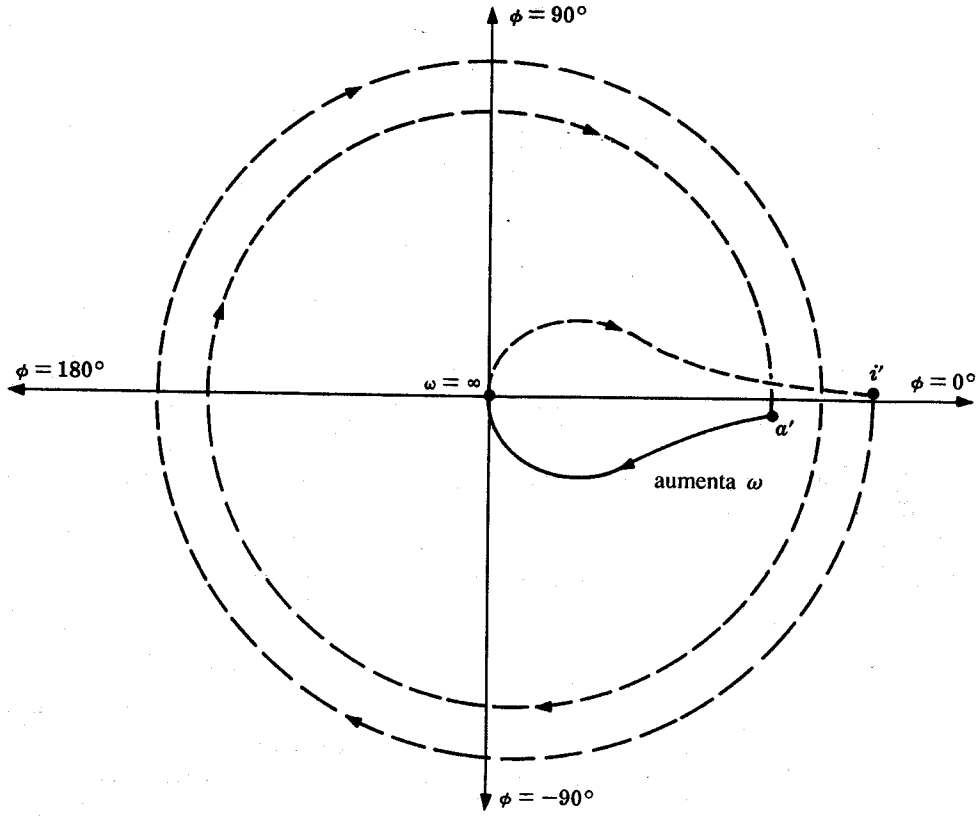


Figura 11-59

11.48. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = e^{-Ts}/(s+p)$, $p > 0$.

El término e^{-Ts} representa el retardo en el tiempo de T segundos en la trayectoria directa o en la de retroalimentación. Por ejemplo, en la figura 11-60 se representa un grafo de flujo de señales de tal sistema.

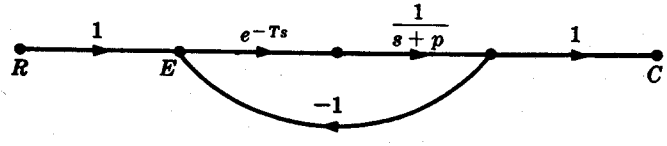


Figura 11-60

En el ejemplo 11.8 se dibujó el diagrama de estabilidad de Nyquist para $1/(s+1)$. El diagrama se modifica de la siguiente manera por la inclusión del término e^{-Ts}. Para la trayectoria $\overline{ad}$,

$$GH(j\omega) = \frac{e^{-Tj\omega}}{j\omega + p} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + p^2}} \angle -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right) - T\omega \qquad GH(j0) = \frac{1}{p}\angle 0°$$

El límite de $GH(j\omega)$ cuando $\omega \to \infty$ no existe. Pero $\lim_{\omega \to \infty} |GH(j\omega)| = 0$ y $|GH(j\omega)|$ disminuye de manera monótona a medida que ω aumenta. El término del ángulo de fase

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right) - T\omega$$

da vueltas repetidamente alrededor del origen entre 0° y −360° a medida que ω aumenta. En consecuencia el diagrama polar es una espiral decreciente, la cual comienza en $(1/p)\angle 0°$ y se aproxima al origen en dirección R (horaria). Los puntos en donde el lugar geométrico atraviesa el eje real negativo se determinan haciendo $\phi = -180° = -\pi$ radianes:

$$-\pi = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega_\pi}{p}\right) - T\omega_\pi$$

u $\omega_\pi = p\tan(T\omega_\pi)$ que puede resolverse fácilmente cuando p y T son conocidos. El resto de la trayectoria de Nyquist se transforma al utilizar los resultados de los problemas 11.41 y 11.42. En la figura 11-61 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist. Por claridad se ha omitido la imagen de la trayectoria $\overline{fa}$ $(s = -j\omega)$

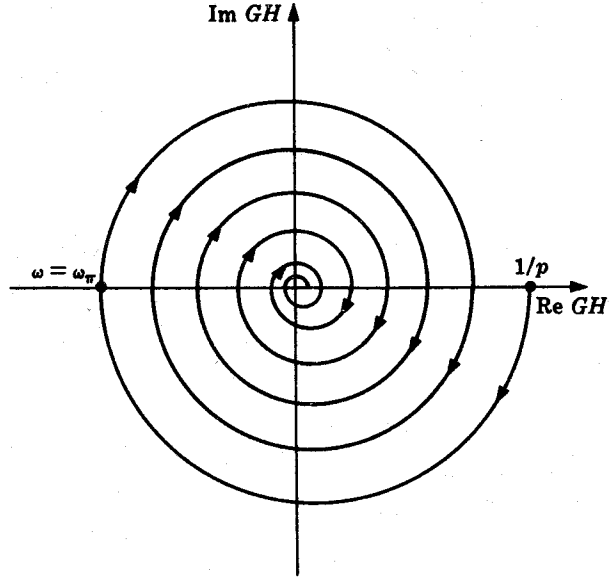


Figura 11-61

11.49. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = 1/(s^2 + a^2)$.

Los polos de $GH(s)$ están en $s = \pm ja \equiv \pm j\omega_0$. En consecuencia, en la figura 11-62 se presenta la trayectoria de Nyquist para este sistema.
Para la trayectoria $\overline{ab}$, $\omega < a$, y

$$GH(j\omega) = \frac{1}{a^2 - \omega^2}\angle 0° \qquad GH(j0) = \frac{1}{a^2}\angle 0° \qquad \lim_{\omega \to a} GH(j\omega) = \infty\angle 0°$$

Para la trayectoria $\overline{bc}$, hacemos $s \equiv ja + \rho e^{j\theta}$, $-90° \leq \theta \leq 90°$; entonces

$$\lim_{\rho \to 0} GH(ja + \rho e^{j\theta}) = \lim_{\rho \to 0}\left[\frac{1}{\rho e^{j\theta}(2ja + \rho e^{j\theta})}\right] = -j\infty \cdot e^{-j\theta} = \infty\angle -\theta^0 - 90°$$

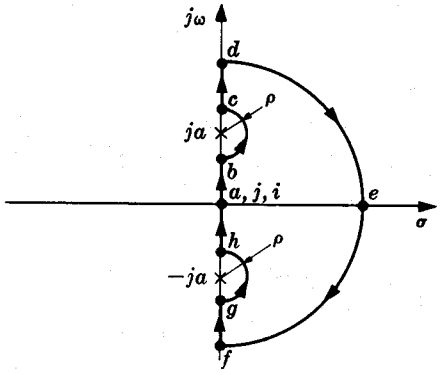


Figura 11-62

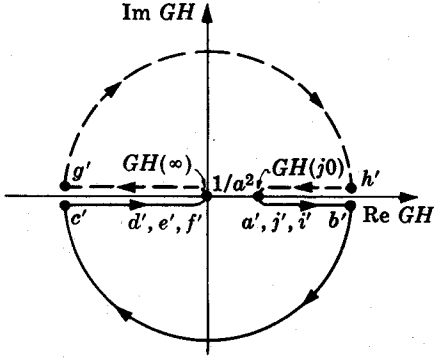


Figura 11-63

En $\theta = -90°$ el límite es $\infty\angle 0°$; en $\theta = 0°$ es $\infty\angle -90°$; en $\theta = 90°$ es $\infty\angle -180°$.
Para la trayectoria $\overline{cd}$, $\omega > a$, y

$$\lim_{\omega \to a} GH(j\omega) = \infty \angle 180^\circ \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle 180^\circ$$

La trayectoria $\overline{def}$ se transforma en el origen por medio del problema 11.39, y $\overline{f'g'h'a'}$ es la imagen especular de $\overline{a'b'c'd'}$ alrededor del eje real. En la figura 11-63 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist resultante.

11.50. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH(s) = (s - z_1)/s(s + p)$, $z_1, p > 0$.

La trayectoria de Nyquist para este sistema del tipo 1 es la misma que para el problema 11.43. Para la trayectoria $\overline{ad}$,

$$GH(j\omega) = \frac{j\omega - z_1}{j\omega(j\omega + p)} = \frac{\sqrt{\omega^2 + z_1^2}}{\omega\sqrt{\omega^2 + p^2}} \angle 90^\circ - \tan^{-1}\left[\frac{\omega(p + z_1)}{pz_1 - \omega^2}\right]$$

en donde hemos utilizado

$$\tan^{-1}x \pm \tan^{-1}y \equiv \tan^{-1}\left[\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right]$$

Ahora

$$\lim_{\omega \to 0} GH(j\omega) = \infty \angle +90^\circ \qquad GH(j\sqrt{pz_1}) = \frac{1}{p\sqrt{pz_1}} \angle 0^\circ \qquad \lim_{\omega \to \infty} GH(j\omega) = 0 \angle -90^\circ$$

Así, el lugar geométrico viene del primer cuadrante, atraviesa el eje real positivo hacia el cuarto cuadrante, y se aproxima al origen en un ángulo de -90°.

La trayectoria $\overline{def}$ se transforma en el origen, y la trayectoria $\overline{ija}$ se transforma en un semicírculo en el infinito. En la figura 11-64 se presenta la gráfica resultante.

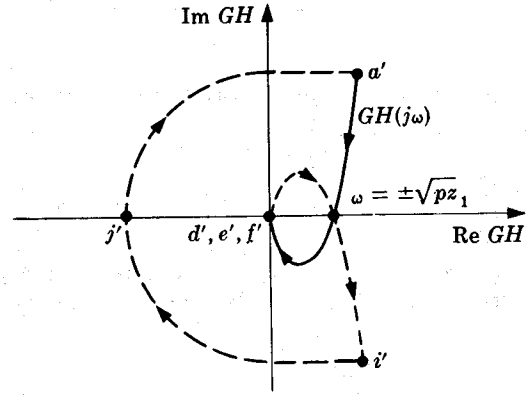


Figura 11-64

El criterio de estabilidad de Nyquist

11.51. Demuestre el criterio de estabilidad de Nyquist.

La ecuación (*11.11*) establece que el número N_0 de rodeos R (horarios) del origen, hechos por un contorno cerrado en el plano P, transformados desde un contorno cerrado en el plano complejo, es igual al número de ceros C_0 menos el número de polos P_0 de P encerrados por el contorno del plano complejo: $N_0 = C_0 - P_0$. Esto se demostró en el problema 11.26.

Ahora hacemos $P \equiv 1 + GH$. Entonces, el origen para $1 + GH$ en el plano GH está en $GH = -1$ (*Véanse* el ejemplo 11.6 y el problema 11.33). Por tanto hagamos que N represente el número de rodeos R (horarios) de este punto $-1 + j0 \equiv (-1, 0)$, y hagamos que el contorno en el plano complejo sea la trayectoria de Nyquist definida en la sección 11.7. Entonces $N \doteq C_0 - P_0$, en donde C_0 y P_0 son el número de ceros y de polos de $1 + GH$ encerrados por la trayectoria de Nyquist. P_0 también es el número de polos de GH encerrados, puesto que $GH \equiv N/D$, entonces $1 + GH = 1 + N/D = (D + N)/D$. Esto es, GH y $1 + GH$ tienen el mismo denominador.

Sabemos, a partir del Capítulo 5, que un sistema con retroalimentación (continuo o discreto) es absolutamente estable si y sólo si los ceros del polinomio característico $1 + GH$ (las raíces de la ecuación característica $1 + GH = 0$) están en la MIP (o en el círculo unitario), es decir, $C_0 = 0$. Por tanto, $N = -P_0$, y claramente $P_0 \geq 0$.

11.52. Extienda el criterio de estabilidad de Nyquist a una clase superior de sistemas lineales continuos distintos a los ya considerados en este capítulo.

Desoer [5] ha extendido el criterio de estabilidad de Nyquist. El siguiente enunciado es una modificación de esta generalización, la cual se encuentra con su prueba en la referencia.

Un criterio generalizado de estabilidad de Nyquist: Considérese el sistema lineal invariable en el tiempo descrito por el diagrama de bloques de la figura 11-65. Si $g(t)$ satisface las condiciones que se dan a continuación y el diagrama de estabilidad de Nyquist de $G(s)$ *no* encierra el punto $(-1, 0)$, entonces el sistema es *estable*. Si el punto $(-1, 0)$ está encerrado, el sistema es inestable.

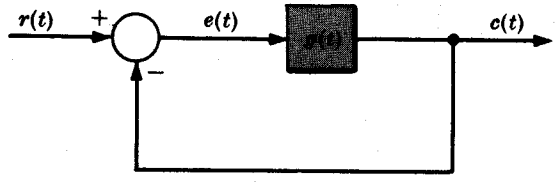


Figura 11-65

1. $G(s)$ representa un elemento de sistema causal lineal invariable en el tiempo.
2. La relación de entrada-salida en $g(t)$ es

$$c(t) = c_a(t) + \int_0^t g(t-\tau)\, e(\tau)\, d\tau \qquad t \geq 0$$

en donde $c_a(t)$, la respuesta libre del sistema $g(t)$, está limitada para todo $t \geq 0$ y para todas las condiciones iniciales, y tiende a un valor finito, dependiendo de las condiciones iniciales, a medida que $t \to \infty$.

3. La respuesta impulso unitario para $g(t)$ es

$$g(t) = [k + g_1(t)]\mathbf{1}(t)$$

en donde $k \geq 0$, $\mathbf{1}(t)$ es la función paso unitario, $g_1(t)$ está limitada y es integrable para todo $t \geq 0$, y $g_1(t) \to 0$ a medida que $t \to \infty$.

Estas condiciones se cumplen muy a menudo en los sistemas físicos descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, y ecuaciones de diferencia-diferenciales. La forma del diagrama de bloques en malla cerrada que se muestra en la figura 11-65 no es necesariamente restrictiva. Muchos sistemas de interés pueden transformarse a esta configuración.

11.53. Suponga que la trayectoria de Nyquist para $GH(s) = 1/s(s + p)$ se modificara de tal modo que el polo del origen esté encerrado, como se muestra en la figura 11-66. ¿Cómo modifica esto la aplicación del criterio de estabilidad de Nyquist?

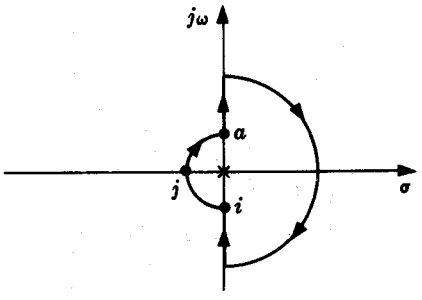


Figura 11-66

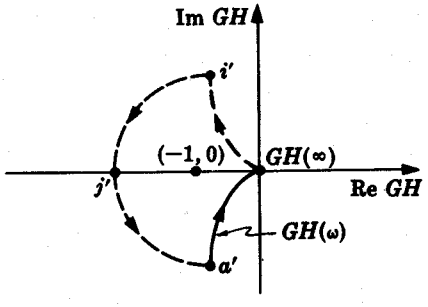


Figura 11-67

El diagrama polar permanece igual, pero la imagen de la trayectoria $\overline{ija}$ hace giros a la *izquierda* en lugar de hacerlo a la derecha en i' y a', igual que en la trayectoria de Nyquist. Entonces, en la figura 11-67 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist. Con claridad se ve que $N = -1$. Pero, puesto que el polo de GH en el origen está encerrado por la trayectoria de Nyquist, entonces $P_0 = 1$ y $C_0 = N + P_0 = -1 + 1 = 0$. Entonces el sistema es estable. La aplicación del criterio de estabilidad de Nyquist no depende de la trayectoria elegida en el plano s.

11.54. El sistema del problema 11.42, ¿es estable o inestable?

Al sombrear la región a la derecha del contorno en la dirección prescrita se produce la figura 11-68. Resulta claro que $N = 0$. El punto $(-1, 0)$ no está en la región sombreada. Ahora, puesto que $p_1 > 0$ y $p_2 > 0$, entonces $P_0 = 0$. En consecuencia $N = -P_0 = 0$, o $C_0 = N + P_0$, y el sistema es estable.

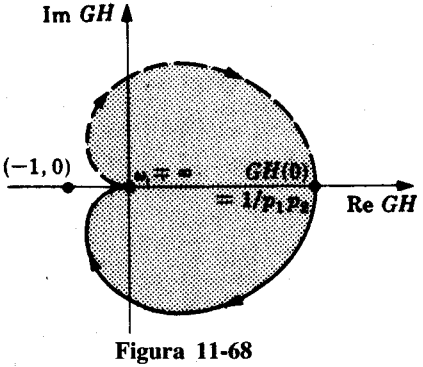


Figura 11-68

11.55. El sistema del problema 11.43, ¿es estable o inestable?

En la figura 11-69 se ha sombreado la región a la derecha del contorno. El punto $(-1, 0)$ no está encerrado, y $N = 0$. Puesto que $P_0 = 0$, entonces $C_0 = P_0 + N = 0$, y el sistema es estable.

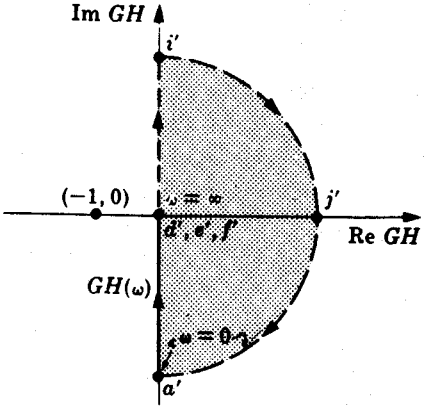


Figura 11-69

11.56. Determine la estabilidad del sistema del problema 11.44.

En la figura 11.70 se ha sombreado la región a la derecha del contorno. Si el punto $(-1, 0)$ se encuentra a la izquierda del punto k, entonces $N = 0$; si éste se encuentra a la derecha, entonces $N = 1$. Puesto que $P_0 = 0$, entonces $C_0 = 0$ ó 1. Por tanto el sistema es estable si y sólo si el punto $(-1, 0)$ se halla a la izquierda del punto k. El punto k puede determinarse resolviendo para $GH(j\omega_\pi)$, en donde

$$-\pi = \frac{-\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_\pi}{p_1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_\pi}{p_2}\right)$$

cuando se dan p_1 y p_2, ω_π puede determinarse fácilmente a partir de esta ecuación.

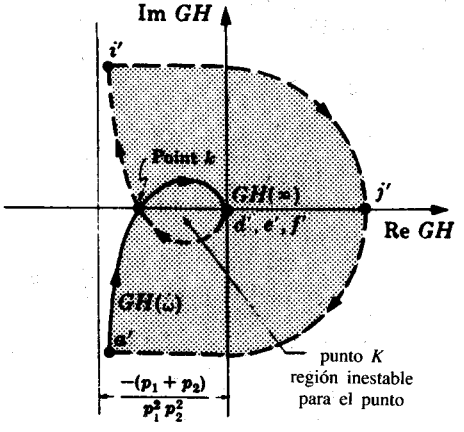


Figura 11-70

11.57. Determine la estabilidad del sistema del problema 11.46.

En la figura 11-71 se ha sombreado la región a la derecha del contorno. Claramente puede verse que $N = 1$, $P_0 = 0$ y $C_0 = 1 + 0 = 1$. En consecuencia el sistema es inestable para todo $p > 0$.

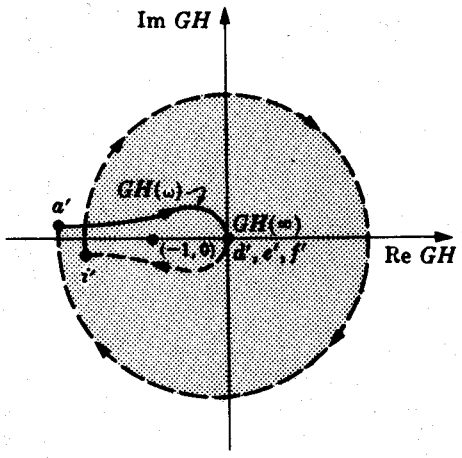


Figura 11-71

11.58. Determine la estabilidad del sistema del problema 11.47.

En la figura 11.72 se ha sombreado la región a la derecha del contorno. Resulta claro que $N > 0$. Puesto que $P_0 = 0$ para $p > 0$, entonces $N \neq -P_0$. En consecuencia el sistema es inestable. Figura 11-72

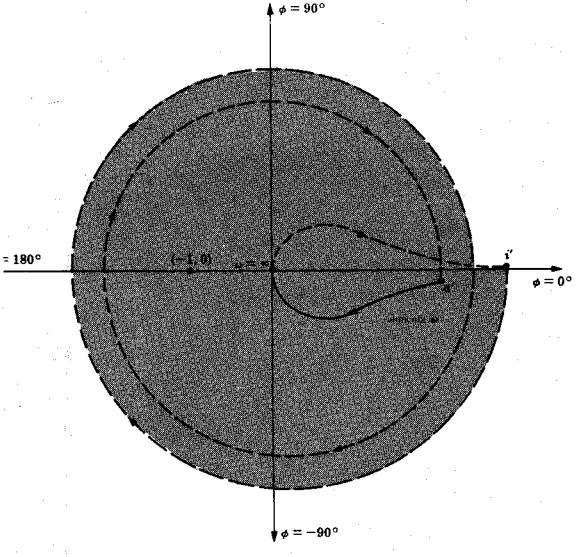


Figura 11-72

Estabilidad relativa

11.59. Determine: *a*) la frecuencia de cruce de fase ω_π, *b*) la frecuencia de cruce de ganancia ω_1, *c*) el margen de ganancia, y *d*) el margen de fase, para el sistema del problema 11.44 con $p_1 = 1$ y $p_2 = \frac{1}{2}$.

a) Haciendo $\omega = \omega_\pi$, tenemos

$$\phi(\omega_\pi) = -\pi = \frac{-\pi}{2} - \tan^{-1}\omega_\pi - \tan^{-1}2\omega_\pi = \frac{-\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{3\omega_\pi}{1-2\omega_\pi^2}\right)$$

o

$$3\omega_\pi/(1-2\omega_\pi^2) = \tan(\pi/2) = \infty. \quad \text{Por tanto} \quad \omega_\pi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0.707.$$

b) De $|GH(\omega_1)| = 1$, tenemos $/\omega_1\sqrt{(\omega_1^2+1)(\omega_1^2+0.25)} = 1$ u $\omega_1 = 0.82$.

c) El margen de ganancia $1/|GH(\omega_\pi)|$ puede determinarse de manera fácil de la gráfica, como se muestra en la figura 11.73. También puede calcularse analíticamente: $|GH(\omega_\pi)| = |GH|(j0.707)| = 4/3$; por tanto el margen de ganancia = 3/4.

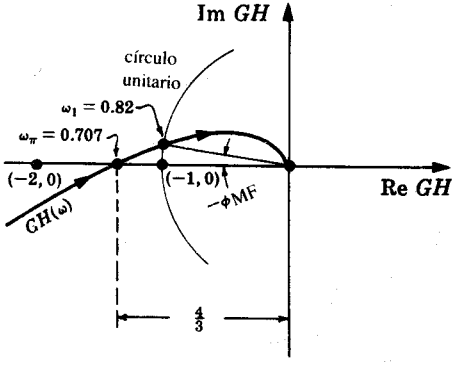


Figura 11-73

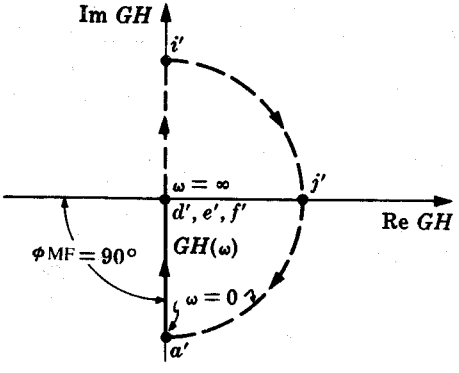


Figura 11-74

d) El margen de fase puede determinarse con facilidad a partir de la gráfica o analíticamente:

$$\arg GH(\omega_1) = \arg GH(0.82) = -90° - \tan^{-1}(0.82) - \tan^{-1}(1.64) = -187.8°$$

En consecuencia $\phi_{MF} = 180° + \arg GH(\omega) = -7.8°$. El margen de fase negativo significa que el sistema es inestable.

11.60. Determine los márgenes de fase y de ganancia en el sistema ($GH = 1/s$) del problema 11.43.

El diagrama de estabilidad de Nyquist de $1/s$, como se muestra en la figura 11-74, nunca atraviesa el eje real negativo; en consecuencia el margen de ganancia es indefinido para este sistema. El margen de fase es $\phi_{MF} = 90°$.

Círculos *M* y *N*

11.61. Verifique las ecuaciones (*11.18*) y (*11.19*), las cuales dan el radio y el centro de un círculo M, respectivamente.

Hagamos $G(\omega) = x + jy$. Entonces

$$M \equiv \left| \frac{G(\omega)}{1 + G(\omega)} \right| = \left| \frac{x + jy}{1 + x + jy} \right|$$

Elevando al cuadrado ambos lados y reordenando, se produce

$$\left[x - \left(\frac{M^2}{1 - M^2} \right) \right]^2 + y^2 = \left(\frac{M}{1 - M^2} \right)^2 \qquad M < 1$$

$$\left[x + \left(\frac{M^2}{M^2 - 1} \right) \right]^2 + y^2 = \left(\frac{M}{M^2 - 1} \right)^2 \qquad M > 1$$

Para M = constante, estas ecuaciones son círculos con radios $|M/(M^2 - 1)|$ y centros en $(-M^2/(M^2 - 1), 0)$.

11.62. Verifique la ecuación (*11.20*).

La función de transferencia G para un sistema continuo de segundo orden, cuyo grafo de flujo de señales se muestra en la figura 11-75, es $G = \omega_n^2/s(s + 2\zeta\omega_n)$. Ahora

$$M^2 = \left| \frac{G}{1 + G} \right|^2 = \frac{\omega_n^4}{\left(\omega_n^2 - \omega^2\right)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2}$$

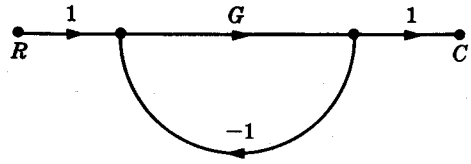


Figura 11-75

Para encontrar ω_p, hallamos el máximo de la expresión anterior:

$$\frac{d}{d\omega}(M^2) = \frac{\omega_n^4\left[2(\omega_n^2 - \omega^2)(-2\omega) + 8\zeta^2\omega_n^2\omega\right]}{\left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega^2\right]^2} = 0$$

de la cual $\omega = \omega_p = \pm\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$. Por tanto para $0 \le \zeta \le 0.707$,

$$M_p = \left[\frac{\omega_n^4}{\left[\omega_n^2 - \omega_n^2(1-2\zeta^2)\right]^2 + 4\zeta^2\omega_n^4(1-2\zeta^2)}\right]^{1/2} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

11.63 Verifique las ecuaciones (*11.21*) y (*11.22*), las cuales dan el radio y el centro de un círculo N.

Hagamos $G(\omega) \equiv x + jy$. Entonces

$$\frac{C(\omega)}{R(\omega)} = \frac{x^2 + x + y^2 + jy}{(1+x)^2 + y^2} \qquad \text{y} \qquad N \equiv \frac{\text{Im}(C/R)(\omega)}{\text{Re}(C/R)(\omega)} = \frac{y}{x^2 + x + y^2}$$

lo cual produce

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{N^2}\right)$$

Para N igual a un parámetro constante, ésta es la ecuación de un círculo de radio $\sqrt{\frac{1}{4} + (1/2N)^2}$ y centro en $(-\frac{1}{2}, 1/2N)$.

11.64. Encuentre M_p y ζ para el sistema con retroalimentación unitaria dado por $G = 1/s(s+1)$.

La función de transferencia general en malla abierta para un sistema de segundo orden es $G = \omega_n^2/s(s + 2\zeta\omega_n)$. Entonces $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.5$, y $M_p = 1/(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}) = 0.866$.

Problemas misceláneos

11.65. Determine el diagrama polar en

$$P(z) = \frac{z}{z-1}$$

para un periodo de muestreo $T = 1$.

La solución requiere la transformación de la franja desde $-j\omega_s/2$ hasta $j\omega_s/2$ sobre el eje $j\omega$ del plano s, o, de modo equivalente, $\omega = -\pi$ hasta $\omega = \pi$ radianes en el círculo unitario del plano z al plano $P(e^{j\omega})$. Tenemos $P(e^{\pm j\pi}) = 0.5\angle 0°$, y $P(e^{j0}) = \infty \angle \pm 90°$. La evaluación de $P(e^{j\omega})$ para diferentes valores de ω entre $-\pi$ y 0 da una línea recta paralela al eje imaginario en el plano P, como se muestra en la figura 11-76, en donde los segmentos desde a hasta b y desde g hasta a transforman los segmentos correspondientes del círculo unitario en la figura 11-13.

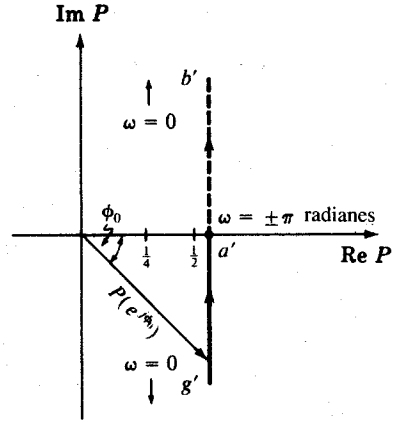


Figura 11-76

11.66. Determine el diagrama polar de la función de transferencia en malla abierta del sistema discreto del tipo 0.

$$GH(z) = \frac{\frac{3}{8}(z+1)(z+\frac{1}{3})K}{z(z+\frac{1}{2})}$$

para $K = 1$ y $T = 1$.

En este caso, el diagrama polar, como se muestra en la figura 11-77, se ha dibujado mediante un computador. El programa de computador evalúa $GH(e^{j\omega})$ para valores de $\omega T = \omega$ en el rango de $-\pi$ hasta π radianes, separa cada resultado en las partes real e imaginaria (forma compleja) y luego genera la gráfica rectangular a partir de estas coordenadas.

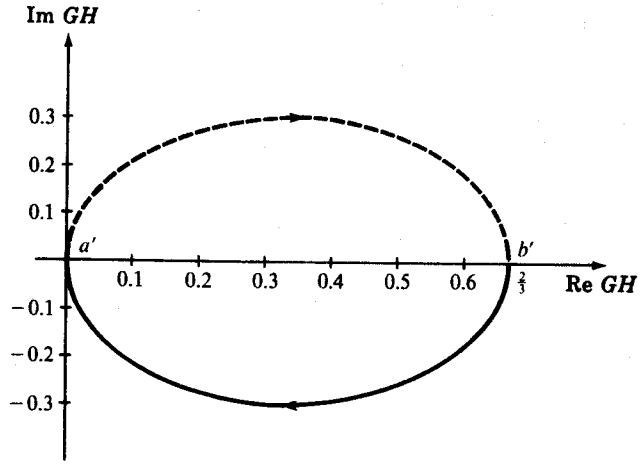


Figura 11-77

11.67. Determine el diagrama polar de la función de transferencia en malla abierta del sistema discreto del tipo 1.

$$GH(z) = \frac{K(z+1)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{3})(z+\frac{1}{2})}$$

para $K = 1$ y $T = 1$.

Como en el problema 11.66, el diagrama polar que se presenta en la figura 11-78 fue generado por computador, exactamente de la misma manera como se describió en el problema anterior.

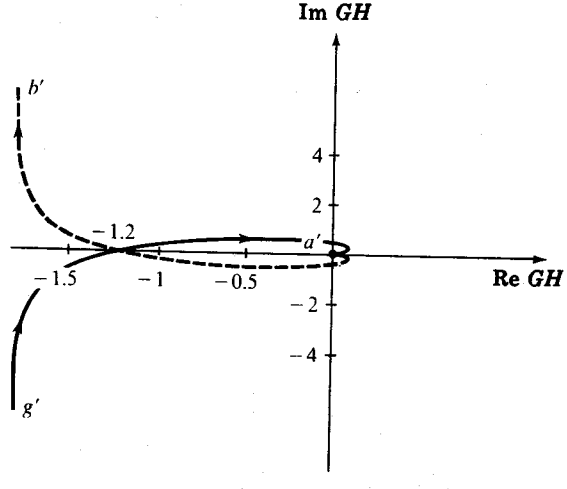


Figura 11-78

11.68. Determine la estabilidad absoluta del sistema dado en los ejemplos 11.11 y 11.14, para $K \geq 2$ y $T = 1$.

En la figura 11-79 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist para $K = 2$. La región a la derecha se ha sombreado y la gráfica pasa exactamente por $(-1, 0)$. Así, $N > 0$ y $N \neq -P_0$, el cual es cero para este problema. En consecuencia el sistema es marginalmente estable para $K = 2$. Para $K > 2$, el punto $(-1, 0)$ está encerrado por completo $N = 1$, y el sistema en malla cerrada es inestable.

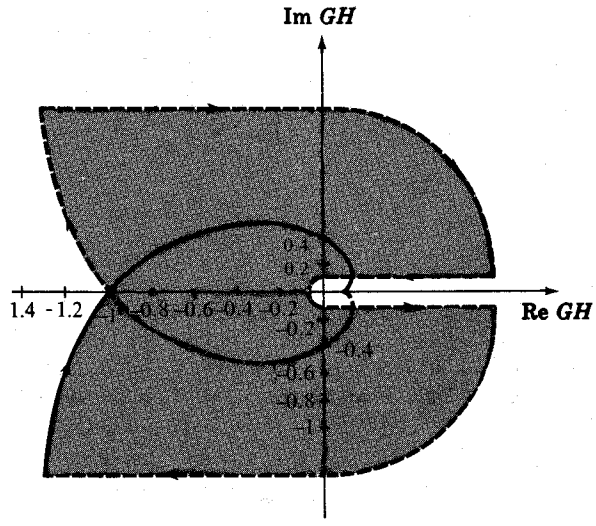


Figura 11-79

11.69. Determine el diagrama de estabilidad de Nyquist en el sistema dado en el problema 11.65.

Notamos que $P(z) = z/(z - 1)$ tiene un polo en 1, así que debemos comenzar transformando al plano P el segmento desde b hasta c del semicírculo infinitesimal cerca de $z = 1$, en la figura 11-13. En su conjunto, tenemos una transformación conforme, así que la gráfica debe girar a la derecha en b'. Entre b y c, $z = 1 + \rho e^{j\phi}$, con ϕ aumentando desde $-90°$ hasta $0°$. En consecuencia

$$P(1 + \rho e^{j\phi}) = \frac{1 + \rho e^{j\phi}}{\rho e^{j\phi}} \qquad \text{y} \qquad \lim_{\rho \to 0} P(1 + \rho e^{j\phi}) = \frac{1}{\lim_{\rho \to 0} \rho e^{j\phi}} = \infty \angle -\phi$$

Por tanto, el arco desde b hasta c en el plano z se transforma en el semicírculo infinito desde b' hasta c', desde $+90°$ hasta $0°$, como se muestra en la figura 11-80. Para obtener la transformación de la línea desde c hasta d en la figura 11-13, notamos que ésta es la transformación de $P(z)$ desde $z = 1 \angle 0°$ hasta $z = \infty \angle 0°$ (ángulo ϕ constante), esto es,

$$P(1) = \infty \angle 0° \qquad \text{a} \qquad \lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{1 + \alpha}{1 + \alpha - 1} \right) = \lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha} \right) = 1 \angle 0°$$

en donde hemos remplazado z en $P(z)$ por $1 + \alpha$ al obtener el límite. La línea c' a d' ($\infty \to 1$) en la figura 11-80 muestra la transformación resultante.

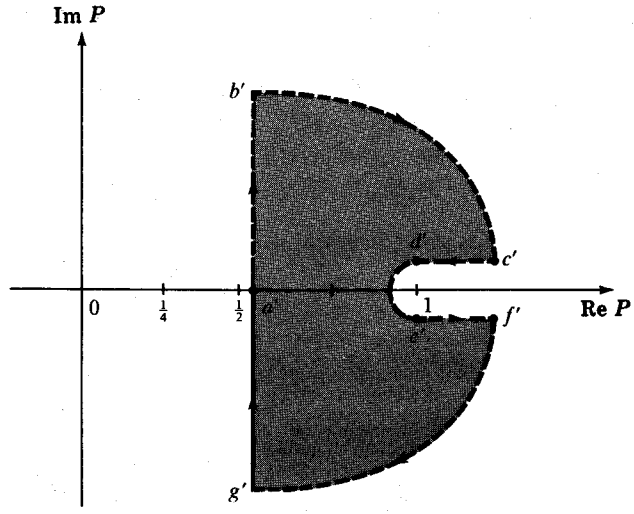


Figura 11-80

El círculo infinito de 0° a −360°, desde d hasta e en la figura 11-13, se transforma en el semicírculo infinitesimal alrededor del punto $z = 1$ en el plano P, porque

$$P(Re^{j\phi}) = \frac{Re^{j\phi}}{Re^{j\phi} - 1} = \frac{e^{j\phi}}{e^{j\phi} - \dfrac{1}{R}}$$

y $P \to 1$ a medida que $R \to \infty$ para cualquier ϕ; unas pocas evaluaciones del arg $P(Re^{j\phi})$ para valores de ϕ entre 0° y −360° muestran que el límite se aproxima desde valores en el primer cuadrante de P cuando $0 < \phi < -180°$, y desde el cuarto cuadrante cuando $-180° < \phi < -360°$, con $P(Re^{j}\phi) = 1/(1 + 1/R) < 1$ para $R > 0$ en $\phi = 180°$. En la figura 11-80 se muestra el arco d' a e' resultante.

El arco e' a f' en la figura 11-80 se obtiene de la misma manera que el de c' a d', tomando los límites de $(\alpha + 1)/\alpha$ a medida que $\alpha \to \infty$ y 0. Y el cierre final del diagrama de estabilidad de Nyquist, el arco f' a g' se obtiene, como se muestra, de la misma manera que el de b' a c'.

11.70. Para $GH = P = z/(z - 1)$ del problema 11.69, ¿es estable el sistema en malla cerrada?

En la figura 11-80 se ha sombreado la región a la derecha del contorno y ésta no encierra el punto $(-1, 0)$. En consecuencia $N \leq 0$. El único polo de GH está en $z = 1$, el cual no está por fuera del círculo unitario. Así $P_0 = 0$, $N = -P_0 = 0$, y el sistema es absolutamente estable.

11.71. Determine la estabilidad del sistema dado en el problema 11.66.

La función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{\frac{3}{8}(z+1)(z+\frac{1}{3})}{z(z+\frac{1}{2})}$$

En la figura 11-77 se presenta el diagrama polar de GH, que es la transformación de los arcos desde a hasta b y desde g hasta a de la figura 11-13. No hay polos de GH en el círculo unitario, así que no se necesitan los arcos infinitesimales de b a c y de f a g de la figura 11-13. Haciendo $z = 1 + \alpha$ y utilizando los mismos procedimientos para hallar el límite, mostrados en el problema 11.70, las líneas rectas hacia el infinito y desde el infinito, b a d y e a f en la figura 11-13, se transforman en las líneas de b a d y de e a f entre Re $GH\frac{3}{8}$ y $\frac{2}{3}$. De modo similar, remplazando a z por $1 + Re^{j\phi}$, y cuando $R \to \infty$, el arco infinito desde d hasta e se transforma en el semicírculo infinitesimal alrededor de Re$GH = \frac{3}{8}$, como se muestran todos en la figura 11-81.

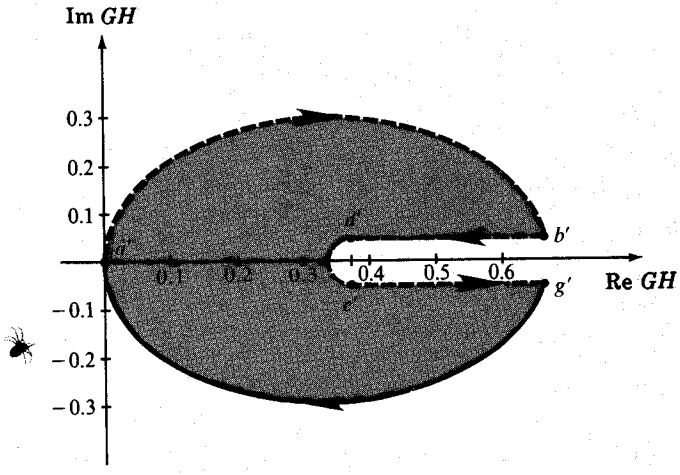


Figura 11-81

Como se muestra, el punto $(-1, 0)$ no está encerrado por este contorno, $N = 0$ $P_0 = 0$, y el sistema en malla cerrada es absolutamente estable.

11.72. Determine la estabilidad del sistema dado en el problema 11.67.

La función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{(z+1)^2}{(z-1)\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

En la figura 11-78 se presenta el diagrama polar de GH. La conclusión de la transformación del contorno cerrado del exterior del círculo unitario en el plano z (figura 11-13) resulta muy parecida a la descrita en el problema 11.69 y en el ejemplo 11.11. En este caso, el punto $(-1, 0)$ está encerrado una sola vez por el contorno, esto es, $N = 1$. Puesto que $P_0 = 0$ y $C_0 = N + P_0 = 1$, entonces un cero de $1 + GH$ está por fuera del círculo unitario del plano z, y el sistema en malla cerrada en consecuencia es inestable (figura 11-82).

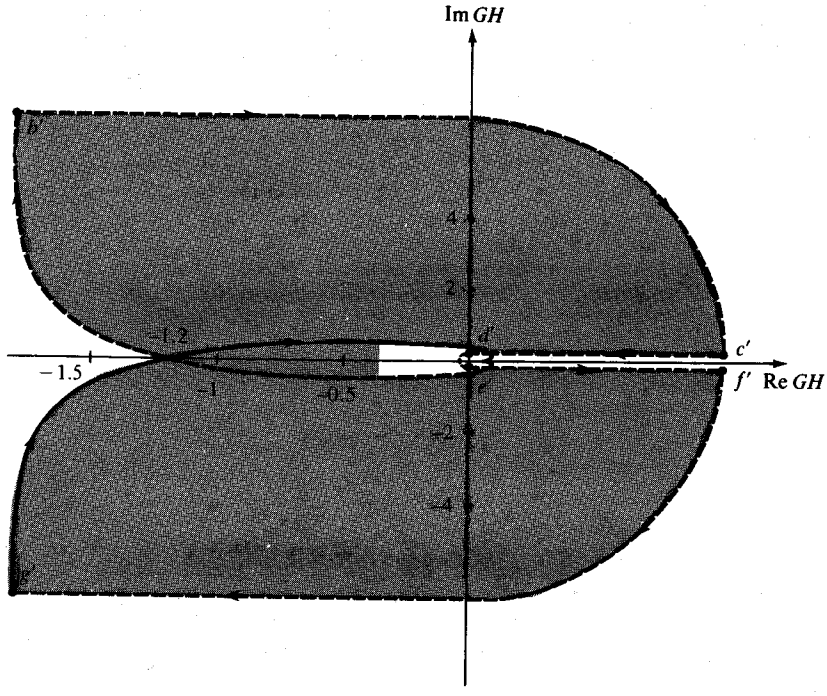


Figura 11-82

Problemas suplementarios

11.73. Si en el problema 11.48, $T = 2$ y $p = 5$, ¿es estable este sistema?

11.74. ¿Es estable o inestable el sistema del problema 11.49?

11.75. ¿Es estable o inestable el sistema del problema 11.50?

11.76. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{K(s+z_1)(s+z_2)}{s^3(s+p_1)(s+p_2)}$, $z_i, p_i > 0$.

11.77. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{K}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$, $p_i > 0$.

11.78. Encuentre la respuesta de frecuencia en malla cerrada del sistema con retroalimentación unitaria descrito por $G = \dfrac{10(s+0.5)}{s^2(s+1)(s+10)}$. Utilizando los círculos M y N.

11.79. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{K(s+z_1)}{s^2(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$, $z_1, p_i > 0$.

11.80. Dibuje el diagrama de estabilidad de Nyquist para $GH = \dfrac{Ke^{-Ts}}{s(s+1)}$.

11.81. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{s+z_1}{s(s+p_1)}$, $z_1, p_1 > 0$.

11.82. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{s+z_1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$, $z_1, p_i > 0$.

11.83. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{K}{s^2(s+p_1)(s+p_2)}$, $p_i > 0$.

11.84. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{s+z_1}{s^2(s+p_1)}$, $z_1, p_1 > 0$.

11.85. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{s+z_1}{s^2(s+p_1)(s+p_2)}$, $z_1, p_i > 0$.

11.86. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{(s+z_1)(s+z_2)}{s^2(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$, $z_i, p_i > 0$.

11.87. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{K}{s^3(s+p_1)(s+p_2)}$, $p_i > 0$.

11.88. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{(s+z_1)}{s^3(s+p_1)(s+p_2)}$, $z_1, p_i > 0$.

11.89. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{s+z_1}{s^4(s+p_1)}$, $z_1, p_1 > 0$.

11.90. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{e^{-Ts}(s+z_1)}{s^2(s+p_1)}$, $z_1, p_1 > 0$.

11.91. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{e^{-Ts}(s+z_1)}{s^2(s^2+a)(s^2+b)}$, $z_1, a, b > 0$.

11.92. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{(s-z_1)}{s^2(s+p_1)}$, $z_1, p_1 > 0$.

11.93. Dibuje el diagrama polar para $GH = \dfrac{s}{(s+p_1)(s-p_2)}$, $p_i > 0$.

11.94. En la figura 11-12 se presentan diferentes partes de la trayectoria de Nyquist para sistemas continuos, y los diferentes segmentos se definen matemáticamente por medio de las ecuaciones (*11.5*) a

la (*11.12*). Escriba las ecuaciones correspondientes a cada segmento de la trayectoria de Nyquist para los sistemas discretos en el tiempo que se dan en la figura 11-13. (Una de éstas se presenta en el problema 11.11. *Véanse* también los problemass 11.69 y 11.70).

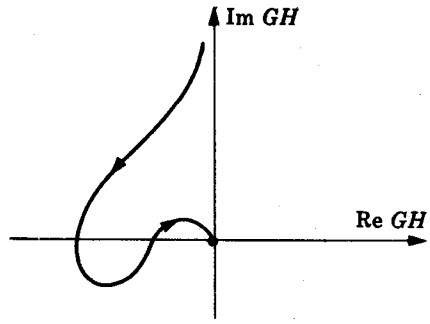
Respuestas a algunos problemas suplementarios

11.73. Sí

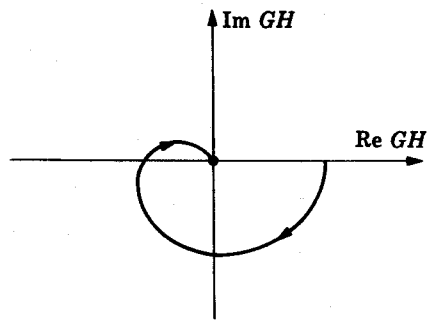
11.74. Inestable

11.75. Inestable

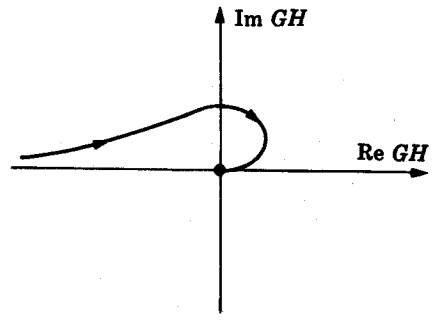
11.76.



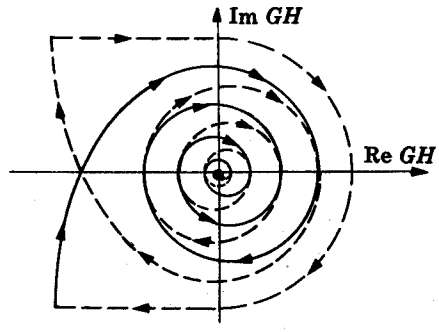
11.77.



11.79.



11.80.



Capítulo 12

Diseño utilizando el análisis de Nyquist

12.1 Filosofía del diseño

El diseño mediante el análisis en el dominio de la frecuencia utilizando las técnicas de Nyquist se realiza de la misma manera general que los otros métodos de diseño descritos en este libro: se introducen redes de compensación apropiadas en las trayectorias directa o de retroalimentación, y se analiza y reanaliza críticamente el comportamiento del sistema resultante. De este modo se da forma y se reforma el diagrama polar hasta que se cumplan las especificaciones de desempeño. El procedimiento se facilita notablemente cuando se utilizan programas de computador para generar diagramas polares.

Puesto que el diagrama polar es una representación gráfica de la función de respuesta de frecuencia $GH(\omega)$ en malla abierta, muchos tipos de componentes de compensación pueden utilizarse en la trayectoria directa o en la de retroalimentación, llegando a ser parte de G o de H. A menudo, la compensación en una sola trayectoria, o una combinación de compensación por retroalimentación y en cascada, pueden utilizarse para satisfacer las especificaciones. En este capítulo se hace énfasis en la compensación en cascada.

12.2 Compensación del factor de ganancia

En el Capítulo 5 se destacó que un sistema inestable con retroalimentación puede estabilizarse algunas veces, o que un sistema estable puede desestabilizarse, al ajustar de manera apropiada el factor de ganancia K de GH. El método del lugar de las raíces, descrito en los Capítulos 13 y 14, ilustra claramente este fenómeno, pero también se evidencia en los diagramas de estabilidad de Nyquist.

EJEMPLO 12.1. La figura 12-1 indica un sistema *continuo* inestable cuando el factor de ganancia es K_1, en donde

$$GH(s) = \frac{K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)} \qquad p_1, p_2, K_1 > 0 \qquad P_0 = 0 \qquad N = 2$$

Como se ilustra en la figura 12-2, una disminución suficiente en el factor de ganancia a $K_2 (K_2 < K_1)$ estabiliza el sistema.

$$GH(s) = \frac{K_2}{s(s+p_1)(s+p_2)} \qquad 0 < K_2 < K_1 \qquad P_0 = 0 \qquad N = 0$$

La disminución adicional de K no altera la estabilidad.

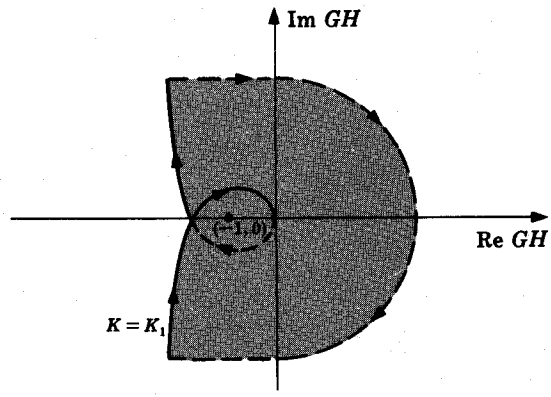


Figura 12-1

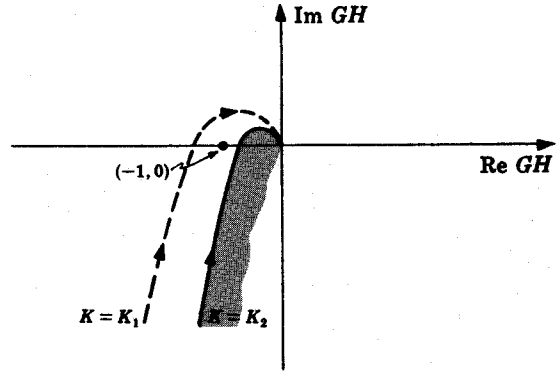


Figura 12-2

EJEMPLO 12.2. El sistema de control del tipo 1 *discreto en el tiempo* con

$$GH_1 = \frac{1}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

es inestable, como se muestra en la figura 11-79 y en el problema 11.68. Esto es, la función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{K/4}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$$

se encontró inestable para $K \geq 2$. Por tanto puede utilizarse compensación del factor de ganancia para estabilizar GH_1, atenuando el factor de ganancia $K_1 = 1$ de GH_1 por un factor menor que 0.5. Por ejemplo, si al atenuador se le da un valor de 0.25, la $GH \equiv GH_2$ resultante tendría el diagrama de estabilidad de Nyquist de la figura 11-25, el cual se mostró en el ejemplo 11.14 para representar un sistema estable.

EJEMPLO 12.3. En la figura 12-3 se indica la región estable para el punto $(-1, 0)$ mediante la parte no sombreada del eje real:

$$GH(s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{s^2(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)} \qquad z_1, z_2 > 0 \qquad p_i > 0 \qquad P_0 = 0$$

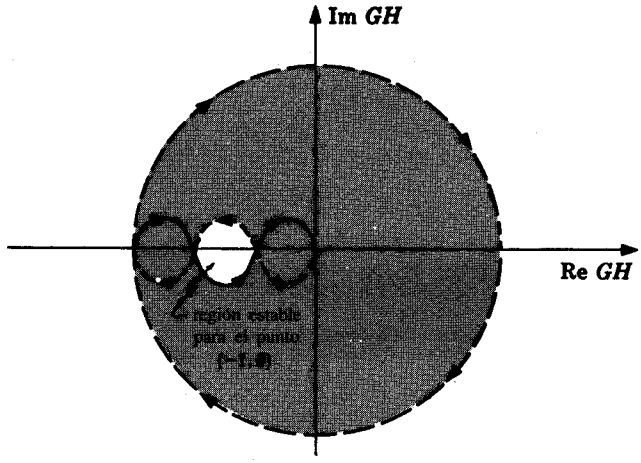


Figura 12-3

Si el punto $(-1, 0)$ cae en la región estable, un aumento o disminución de K puede causar un desplazamiento en el contorno de GH, hacia la izquierda o hacia la derecha, suficiente para desestabilizar el sistema. Esto puede suceder porque la región sombreada (inestable) aparece a la derecha y a la izquierda de la región no sombreada (estable). Este fenómeno se llama **estabilidad condicional**.

Aunque a menudo la estabilidad absoluta puede alterarse al ajustar sólo el factor de ganancia, otros criterios de desempeño tales como los relacionados con la *estabilidad relativa*, usualmente requieren compensadores adicionales.

12.3 Compensación del factor de ganancia utilizando círculos M

El factor de ganancia K de G en un sistema con *retroalimentación unitaria* puede determinarse para un pico resonante específico M_p por medio del siguiente procedimiento, el cual requiere dibujar el diagrama polar una sola vez.

Paso 1: Dibuje el diagrama polar de $G(\omega)$ para $K = 1$.

Paso 2: Calcule Ψ_p, dado por

$$\Psi_p = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{M_p}\right) \qquad (12.1)$$

Paso 3: Dibuje una línea radial $\overline{AB}$ a un ángulo Ψ_p por debajo del eje real negativo, como se muestra en la figura 12-4.

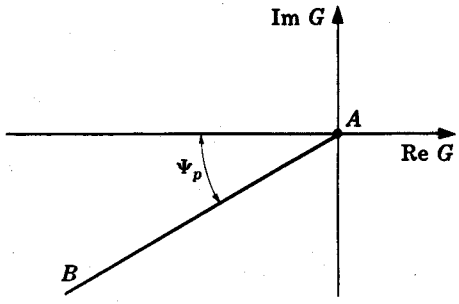


Figura 12-4

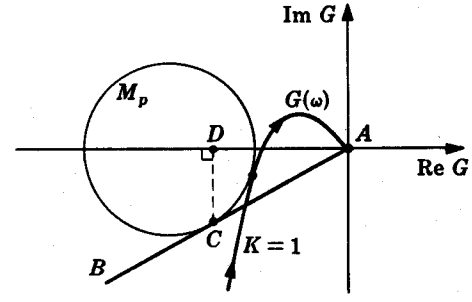


Figura 12-5

Paso 4: Dibuje el círculo M_p tangente tanto a $G(\omega)$ como a la línea $\overline{AB}$ en C. Trace entonces una línea $\overline{CD}$ perpendicular al eje real como se muestra en el diagrama polar del ejemplo de la figura 12-5.

Paso 5: Mida la longitud de la línea $\overline{AD}$ a lo largo del eje real. El factor de ganancia K necesario para el M_p especificado se calcula por medio de

$$K_{M_p} = \frac{1}{\text{longitud de la línea } \overline{AD}} \tag{12.2}$$

Si se dispone del diagrama polar de G para otro factor de ganancia K' diferente de $K = 1$, no es necesario repetir esta gráfica para $K = 1$. Simplemente aplique los pasos 2 al 5 y utilice la siguiente fórmula para el factor de ganancia necesario para alcanzar el M_p especificado:

$$K_{M_p} = \frac{K'}{\text{longitud de la línea } \overline{AD}} \tag{12.3}$$

12.4 Compensación por adelanto

La función de transferencia para una red de adelanto en un sistema continuo, presentada en la ecuación (6.2), es

$$P_{\text{adelanto}} = \frac{s + a}{s + b}$$

en donde $a < b$. En la figura 12-6 se muestra el diagrama polar de P_{adelanto} para $0 \leq \omega < \infty$.

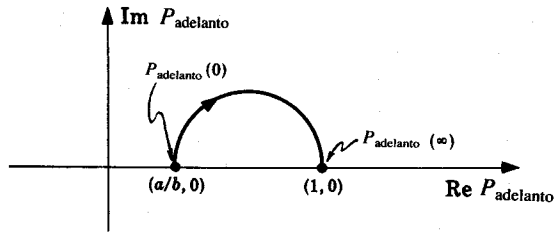


Figura 12-6

Para algunos sistemas en los cuales es aplicable la compensación por adelanto, una elección apropiada del cero en $-a$ y el polo en $-b$ permite un incremento en el factor de ganancia K en malla abierta, proporcionando mayor exactitud (y algunas veces estabilidad), sin afectar adversamente la respuesta transitoria. A la inversa, para un K dado, el desempeño transitorio puede mejorarse. En algunos casos, las respuestas en estado estacionario y transitoria pueden modificarse de modo favorable con una compensación por adelanto.

La red de adelanto proporciona compensación en virtud de su propiedad de adelanto de fase en el rango de baja a media frecuencia y su atenuación es imperceptible a altas frecuencias. El rango de baja a media frecuencia se define en la vecindad de la frecuencia resonante ω_p. Varias redes de adelanto pueden conectarse en cascada si se requiere un adelanto de fase grande.

La compensación por adelanto generalmente aumenta el *ancho de banda* de un sistema.

EJEMPLO 12.4. En la figura 12-7 se presenta el diagrama polar para

$$GH_1(s) = \frac{K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)} \qquad K_1, p_1, p_2 > 0$$

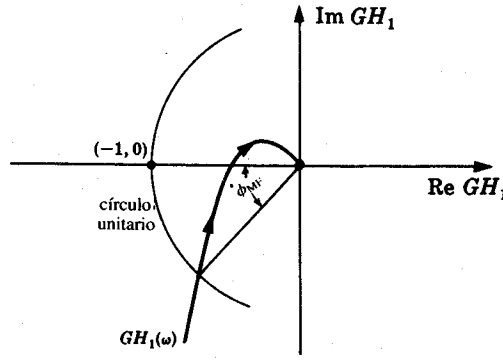


Figura 12-7

Este sistema es estable, y el margen de fase Φ_{MF} es mayor que 45°. Para una aplicación dada, Φ_{MF} es demasiado grande y causa un tiempo de retardo T_d mayor que el deseado en la respuesta transitoria del sistema. El error en estado estacionario también es demasiado grande. Esto es, la constante de error de velocidad K_v es demasiado pequeña para un factor de $\lambda > 1$. Modificaremos este sistema mediante una combinación de compensación del factor de ganancia, para cumplir la especificación en estado estaciona-

rio, y la compensación por adelanto de fase, para mejorar la respuesta transitoria. Suponiendo $H(s) = 1$, la ecuación (*9.12*) produce

$$K_{v1} = \lim_{s \to 0} [sGH_1(s)] = \frac{K_1}{p_1 p_2}$$

y por tanto

$$\lambda K_{v1} = \frac{\lambda K_1}{p_1 p_2}$$

Haciendo $K_2 \equiv \lambda K_1$, la función de transferencia en malla abierta es entonces

$$GH_2 = \frac{K_2}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

El sistema representado por GH_2 tiene la constante de velocidad deseada $K_{v2} = \lambda K_{v1}$.

Consideremos ahora lo que le sucedería a K_{v2} de GH_2 si se introdujera una red de adelanto. Esta actúa como un atenuador a bajas frecuencias. Esto es,

$$\lim_{s \to 0} [sGH_2(s) \quad P_{\text{adelanto}} \quad (s)] = \frac{K_2 a}{p_1 p_2 b} < \lambda K_{v1}$$

puesto que $a/b < 1$. En consecuencia, si la red de adelanto se usa para modificar la respuesta transitoria, el factor de ganancia K_1 de GH_1 debe aumentarse $\lambda(b/a)$ veces para cumplir con el requerimiento de estado estacionario. La parte del factor de ganancia de la compensación total debería ser entonces más grande de lo que se necesitaría si sólo tuviera que cumplirse la especificación en estado estacionario. Por tanto modificamos GH_2, produciéndose

$$GH_3 = \frac{\lambda K_1 (b/a)}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

Como ocurre a menudo, el sistema se desestabiliza al aumentar el factor de ganancia en una cantidad tan grande como $\lambda(b/a)$ veces, como se muestra en los diagramas polares de GH_1, GH_2 y GH_3 en la figura 12-8.

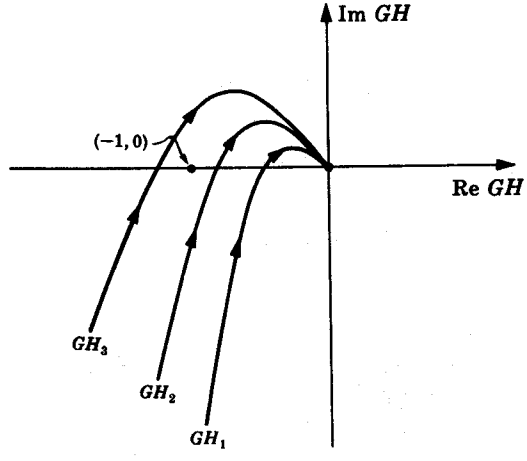


Figura 12-8

Ahora, insertemos la red de adelanto y determinemos sus efectos. GH_3 se hace

$$GH_4 = \frac{\lambda K_1(b/a)(s+a)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+b)}$$

El $\lim_{s\to 0}[sGH_4(s)] = \lambda K_{v1}$ nos convence de que la especificación en estado estacionario se ha cumplido. En efecto, en la región de muy bajas frecuencias tenemos

$$GH_4(j\omega)|_{\omega \text{ muy pequeño}} \cong \frac{\lambda K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)} = GH_2$$

Por tanto el contorno GH_4 prácticamente coincide con el contorno GH_2 en el intervalo de frecuencias muy bajas.

En la región de frecuencias muy altas,

$$GH_4(j\omega)|_{\omega \text{ muy grande}} \cong \frac{\lambda K_1(b/a)}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)} = GH_3$$

En consecuencia, el contorno GH_4 casi coincide con el contorno GH_3 para frecuencias muy altas.

En el intervalo de frecuencias medias, en donde la propiedad de adelanto de fase de la red de adelanto altera de manera sustancial las características de fase de GH_4, su contorno se inclina desde el lugar geométrico de GH_2 hacia el de GH_3 a medida que ω aumenta. Este efecto se entiende mejor si escribimos GH_4 en la forma siguiente:

$$GH_4(j\omega) = \left[\frac{\lambda K_1(b/a)}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)}\right]\cdot\left[\frac{j\omega+a}{j\omega+b}\right]$$

$$= GH_3(j\omega)\cdot P_{\text{adelanto}}(j\omega) = GH_3(j\omega)\cdot|P_{\text{adelanto}_1}(j\omega)|\underline{/\phi(\omega)}$$

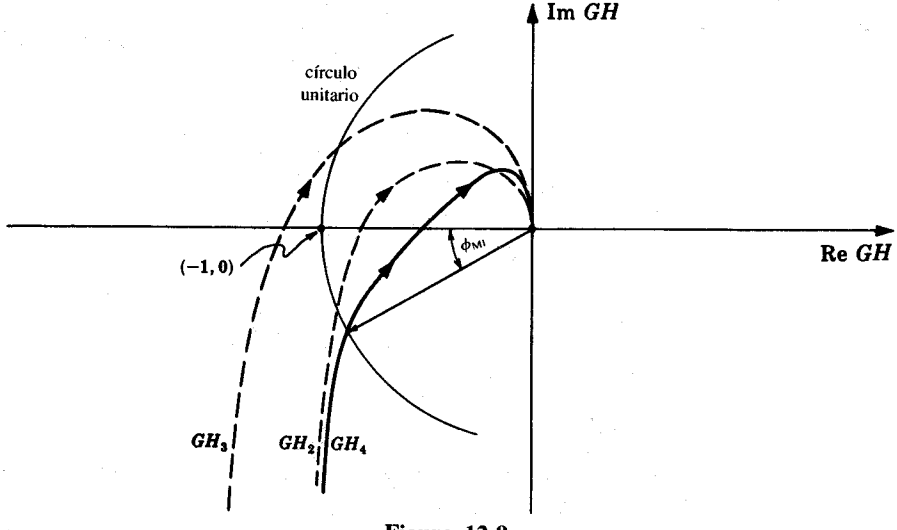


Figura 12-9

en donde $|P_{\text{adelanto}}\ (j\omega)| = \sqrt{(\omega^2 + a^2)/(\omega^2 + b^2)}$, $\phi(\omega) \equiv \tan^{-1}(\omega/a) - \tan^{-1}(\omega/b)$, $a/b < |P_{\text{adelanto}}\ (j\omega)| < 1$, $0° < \phi(\omega) < 90°$. En consecuencia la red de adelanto modifica GH_3 como sigue. GH_3 se desplaza hacia abajo comenzando en $GH_3(j\infty)$ en la dirección S (antihoraria) hacia GH_2, debido a la contribución de fase positiva de P_{adelanto} $[0° < \phi(\omega) < 90°]$. Además está atenuada $[0 < |P_{\text{adelanto}}\ (j\omega)| < 1]$. En la figura 12-9 se ilustra el diagrama polar resultante para GH_4.

El sistema representado por GH_4 claramente es estable, y ϕ_{MF} es menor que 45°, al reducir el tiempo de retraso T_d del sistema original representado por GH_1. Mediante un procedimiento de ensayo y error, el cero en $-a$ y el polo en $-b$ pueden elegir de tal manera que se alcance un M_p específico.

En la figura 12-10 se presenta un diagrama de bloques del sistema totalmente compensado. Por conveniencia sólo se muestra la retroalimentación unitaria.

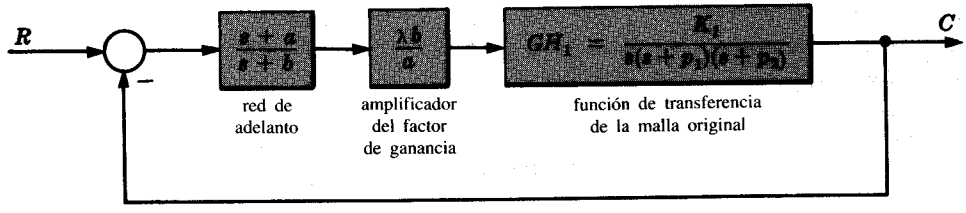


Figura 12-10

12.5 Compensación por atraso

La función de transferencia para la red de atraso en un sistema continuo, presentada en la ecuación (*6.3*), es

$$P_{\text{atraso}} = \frac{a}{b}\left[\frac{s+b}{s+a}\right]$$

en donde $a < b$. En la figura 12-11 se presenta el diagrama polar de P_{atraso} para $0 \leq \omega < \infty$.

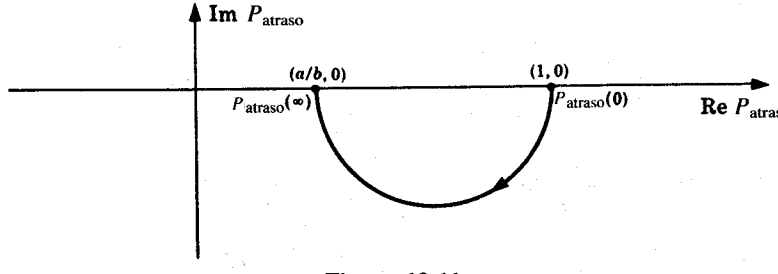


Figura 12-11

Usualmente la red de atraso produce compensación en virtud de su propiedad de atenuación en la parte de alta frecuencia del diagrama polar, puesto que $|P_{\text{atraso}}\ (0) = 1$ y $P_{\text{atraso}}\ (\infty) = a/b < 1$. Varias redes de atraso pueden colocarse en cascada para proporcionar una atenuación aún mayor,

si se necesita. La contribución de atraso de fase de la red de atraso a menudo se restringe mediante el diseño al intervalo de muy baja frecuencia. Algunos de los efectos generales de la compensación por atraso son:

1. Usualmente disminuye el ancho de banda del sistema.
2. La constante de tiempo dominante τ del sistema a menudo aumenta, produciendo un sistema más lento.
3. Para una estabilidad relativa dada, el valor de la constante de error aumenta.
4. Para un valor dado de la constante de error, la estabilidad relativa se mejora.

El procedimiento para utilizar la compensación por atraso para mejorar el desempeño del sistema es esencialmente el mismo usado para la compensación por adelanto.

EJEMPLO 12.5. Rediseñemos el sistema del ejemplo 12.3 utilizando un factor de ganancia más la compensación por *atraso*. La función de transferencia en malla abierta original es

$$GH_1 = \frac{K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

La función de transferencia de la compensación del factor de ganancia es

$$GH_2 = \frac{\lambda K_1}{s(s+p_1)(s+p_2)}$$

Puesto que $P_{\text{atraso}}(0) = 1$, la introducción de la red de atraso después que se ha cumplido el criterio de estado estacionario mediante la compensación del factor de ganancia, no requiere un aumento adicional en el factor de ganancia.

Introduciendo la red de atraso, obtenemos

$$GH_3' = \frac{\lambda K_1(a/b)(s+b)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+a)}$$

Ahora

$$\lim_{s\to 0}[sGH_3'(s)] = \lambda K_{v1}$$

en donde $K_{v1} = K_1/p_1p_2$. Por tanto GH_3' cumple la especificación de estado estacionario.

En la región de frecuencias muy bajas,

$$GH_3'(j\omega)|_{\omega \text{ muy pequeño}} \cong \frac{\lambda K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)} = GH_2(j\omega)$$

Por tanto GH casi coincide con GH_2 a frecuencias muy bajas, y en este intervalo se manifiesta de por sí la propiedad de atraso de esta red.

En la región de frecuencias muy altas,

$$GH_3'(j\omega)|_{\omega \text{ muy grande}} \cong \frac{\lambda(a/b)K_1}{j\omega(j\omega+p_1)(j\omega+p_2)} = \lambda(a/b)GH_1(j\omega)$$

En consecuencia, el contorno GH_3' se encuentra por encima o por debajo del contorno GH_1, dependiendo de si $\lambda > b/a$ o si $\lambda < b/a$, respectivamente. Si $\lambda = b/a$, los contornos GH_3' y GH_1 coinciden.

En el intervalo de frecuencias medias, el efecto de atenuación de P_{atraso} aumenta a medida que ω se hace más grande, y hay un atraso de fase relativamente pequeño.

En las figuras 12-12 y 12-13 se presentan el diagrama polar resultante (con $\lambda = b/a$) y un diagrama de bloques del sistema completamente compensado.

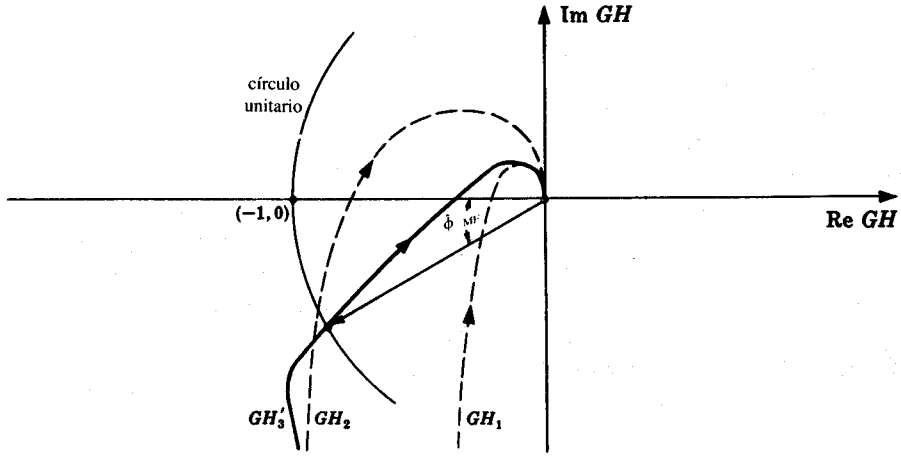


Figura 12-12

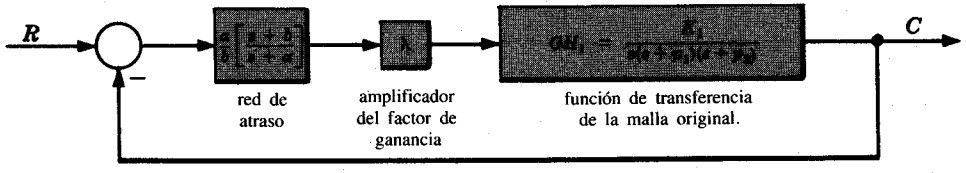


Figura 12-13

12.6 Compensación por atraso-adelanto

La función de transferencia para una red de atraso-adelanto en un sistema continuo, presentada en la ecuación (6.4), es

$$P_{\text{AA}} = \frac{(s + a_1)(s + b_2)}{(s + b_1)(s + a_2)}$$

en donde $a_1 b_2 / b_1 a_2 = 1$, $b_1/a_1 = b_2/a_2 > 1$, $a_i, b_i > 0$. En la figura 12-14 se presenta el diagrama polar de P_{AA} para $0 \leq \omega \leq \infty$.

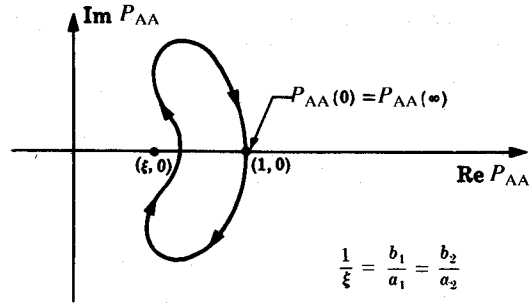


Figura 12-14

La compensación por atraso-adelanto tiene todas las ventajas de la compensación por atraso y de la compensación por adelanto, y solamente un mínimo de sus características inconvenientes. La satisfacción de muchas especificaciones del sistema es posible sin la carga de un excesivo ancho de banda y de pequeñas constantes de tiempo dominantes..

No es fácil generalizar sobre la aplicación de la compensación por atraso-adelanto o prescribir un método para su empleo, especialmente al utilizar las técnicas de Nyquist. Pero, con propósitos ilustrativos, podemos describir cómo altera las propiedades de un sistema simple del tipo 2, con el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 12.6. En la figura 12-15 se presenta el diagrama de estabilidad de Nyquist para

$$GH = \frac{K}{s^2(s+p_1)} \qquad p_1, K > 0$$

puede verse con claridad que el sistema es inestable, y ninguna compensación del factor de ganancia puede estabilizarlo porque el contorno para $0 < \omega < \infty$ siempre está por encima del eje real negativo. La compensación por atraso también es inaplicable, básicamente por la misma razón.

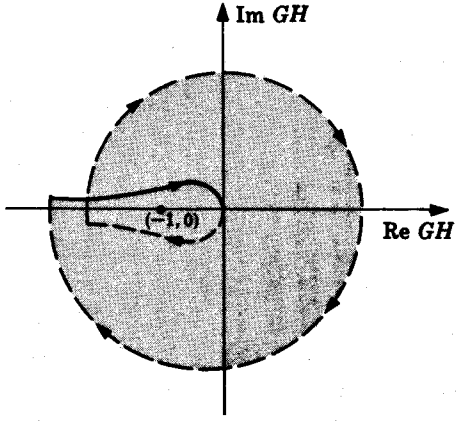


Figura 12-15

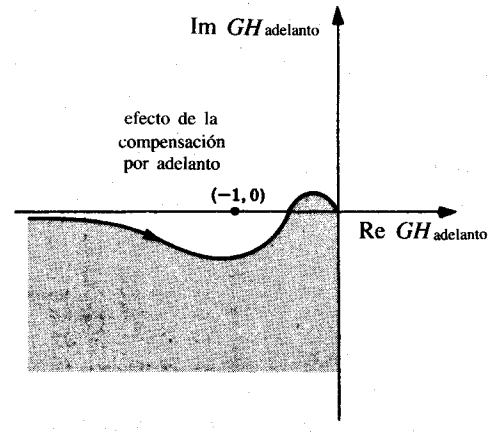


Figura 12-16

Como se muestra en la figura 12-16, la compensación por adelanto puede lograr la estabilización del sistema. Pero la aplicación deseada para el sistema compensado puede pedir un ancho de banda menor que el que puede lograrse con la red de adelanto.

Si se utiliza la red de atraso-adelanto, la función de transferencia en malla abierta se hace

$$GH_{LL} = \frac{K(s+a_1)(s+b_2)}{s^2(s+p_1)(s+b_1)(s+a_2)}$$

y el diagrama polar se presenta en la figura 12-17. Este sistema es condicionalmente estable si el punto $(-1, 0)$ cae sobre el eje real en la región no sombreada. Por ensayo y error, los parámetros de la red de atraso-adelanto pueden escogerse para producir un buen desempeño transitorio y en estado estacionario en este sistema previamente inestable, y el ancho de banda será más pequeño que el del sistema compensado por adelanto. Un paquete de diseño de sistemas de control con ayuda del computador (DAC), o cualquier programa que genere diagramas polares, pueden utilizarse para ayudar a realizar esta tarea de manera rápida y efectiva.

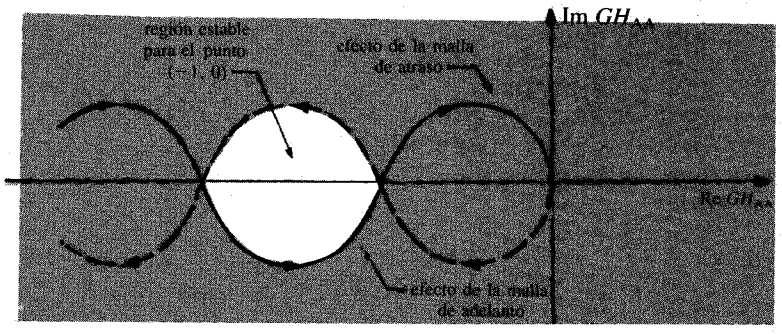


Figura 12-17

12.7 Otros esquemas de compensación y combinaciones de compensadores

Muchos tipos de redes físicas pueden utilizarse para compensar los sistemas de control con retroalimentación. Las redes de compensación también pueden implementarse mediante programas de aplicación (*software*), como parte de un algoritmo de control en un sistema controlado por computador. Los controladores PID son de una clase bastante popular (*véanse* los ejemplos 2.14 y 6.7, y la sección 10.5).

En los ejemplos 12.4 y 12.5 se utilizaron combinaciones de redes con factores de ganancia de adelanto o de atraso respectivamente, y en el ejemplo 12.6 se utilizó sólo un compensador por atraso-adelanto. Otras combinaciones también son factibles y efectivas, particularmente donde los requerimientos de error en estado estacionario no pueden alcanzarse mediante la sola compensación del factor de ganancia. A menudo este es el caso cuando la función de transferencia en malla abierta tiene muy pocos "integradores", esto es, términos en el denominador de la forma s^l para sistemas continuos, o $(z-1)^l$ para sistemas discretos, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 12.7. Nuestro objetivo es determinar un compensador apropiado $G_1(z)$ para el sistema digital que se muestra en la figura 12-18. El sistema en malla cerrada resultante debe cumplir las siguientes especificaciones de desempeño:

1. El error en estado estacionario $e(\infty) = 1 - c(\infty) \leq 0.2$, para una entrada *rampa* unitaria.
2. Margen de fase $\phi_{MF} \geq 30°$.
3. Frecuencia de cruce de ganancia $\omega_1 \geq 10$ rad/s*

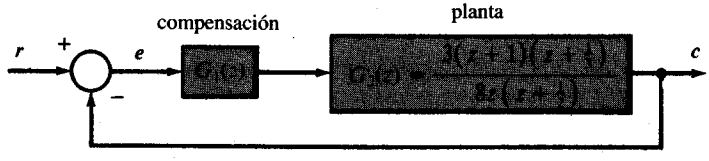


Figura 12-18

El periodo de muestreo en este sistema es $T = 0.1$ s (frecuencia angular de muestreo $\omega_m = 2\pi / 0.1 = 20\pi$ rad/s).

Primero notamos que la planta es un sistema del tipo 0, porque no hay ningún término "integrador" de la forma $(z - 1)^l$ en el denominador de $G_2(z)$ para $l \geq 1$ (*véase* la sección 9.8). Para cumplir la primera especificación de desempeño, inmediatamente se aprecia con claridad que el tipo de sistema global en malla abierta debe incrementarse en un factor por lo menos de 1, esto es, el sistema compensado debe ser por lo menos del tipo 1, para alcanzar un error en estado estacionario finito para una entrada rampa unitaria. En consecuencia adicionamos un polo sencillo en $z = 1$, como G_1', en un primer paso para determinar la compensación apropiada:

$$G_1' G_2 = \frac{3(z+1)(z+\frac{1}{3})}{8z(z-1)(z+\frac{1}{2})}$$

Ahora, a partir de la tabla de la sección 9.9, el error en estado estacionario para una entrada rampa unitaria es $e(\infty) = 1/K_v$, y la constante de error de velocidad es $K_v = 3(2)(\frac{4}{3})/8(\frac{3}{2}) = \frac{2}{3}$. En consecuencia $e(\infty) = \frac{3}{2}$, que es mayor que el valor de 0.2 requerido por la especificación de desempeño 1.

La siguiente pregunta obvia es si la adición de una compensación del factor de ganancia sería suficiente para completar el diseño. Esto requeriría un aumento en la ganancia en por lo menos un factor de $\lambda = 1/(0.2)\,(\frac{2}{3}) = \frac{15}{2}$, lo cual produce

$$G_1'' G_2 = \frac{15}{2} G_1 G_2' = \frac{45(z+1)(z+\frac{1}{3})}{16z(z-1)(z+\frac{1}{2})}$$

Para verificar los criterios de desempeño restantes (2 y 3) la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 y el margen de fase ϕ_{MF} pueden evaluarse a partir de las ecuaciones que los definen en la sección 11.11. Tenemos

$$\phi_{MF} = [180 + \arg G_1'' G_2(\omega_1)] \text{ grados}$$

**Véase* el problema 12.16 para un análisis adicional de esta especificación de desempeño y su relación con el *ancho de banda* AB del sistema.

y ω_1 satisface la ecuación

$$|G_1''G_2(\omega_1)| = 1$$

Ahora, ω_1 y ϕ_{MF} podrían determinarse de manera gráfica a partir de un diagrama de estabilidad de Nyquist de $G_1''G_2$, como se muestra en la figura 11-16. Pero una tarea menos difícil es resolver ω_1 y ϕ_{MF} a partir de las ecuaciones que los definen, preferiblemente empleando un programa de computador capaz de hacer cálculos numéricos complejos. Esto puede hacerse al sustituir primero z en $G_1''G_2(z)$ por $e^{j\omega T}$, y utilizar las sustituciones de la forma polar, la forma de Euler y/o la forma compleja [ecuaciones (*11.2*) a la (*11.4*)] y luego resolver para $\omega_1 T$ de tal modo que $|G_1''G_2| = 1$. A este respecto la solución por ensayo y error de $\omega_1 T$ puede ser útil, ya que la utilizamos para encontrar $\omega_1 T = 2.54$ rad, después de varios ensayos, lo cual da como resultado $G_1''G_2(\omega_1) = -0.72 + j0.7$, y

$$\phi_{MF} = \left[180° - \tan^{-1}\left(\frac{0.7}{-0.72}\right)\right] = -44.4°$$

Con claridad se ve que $\omega_1 = 2.54/0.1 = 25.4 > 10$ rad/s satisface la especificación 3 de desempeño pero *no* el requerimiento 2 del margen de fase, porque $\phi_{MF} = -44.4° \not\geq 30°$, el margen de fase negativo también indica que el sistema en malla cerrada con $G_1''G_2$ es inestable.

La introducción de un compensador por *atraso* podría resolver la restricción restante porque éste aumenta el margen de fase sin afectar el error en estado estacionario. La función de transferencia de un compensador digital por atraso se presentó en el ejemplo 6.12, ecuación (*6.11*), como

$$P_{\text{atraso}}(z) = \left(\frac{1 - p_c}{1 - z_c}\right)\left[\frac{z - z_c}{z - p_c}\right] \qquad (12.4)$$

en donde $z_c < p_c$. Nótese que $P_{\text{atraso}}(1) = P_{\text{atraso}}(e^{j0}) = 1$, lo cual explica por qué la red de atraso no afecta la respuesta en estado estacionario de este sistema del tipo 1. En la figura 12-26 se presenta el diagrama polar de P_{atraso}.

El problema ahora es escoger los valores apropiados de z_c y p_c que produzcan $\phi_{MF} \geq 30°$ y $\omega_1 \geq 10$ rad/s. De nuevo, efectuamos esto por ensayo y error, utilizando un computador para evaluar la solución simultánea para z_c y p_c de las dos relaciones $|G_1''' G_2(10)| = 1$, y

$$\phi_{MF} = [180 + \arg G_1''' G_2(10)] \geq 30°$$

en donde $G_1'''G_2 = P_{\text{atraso}}\,(G_1''G_2)$. Estas ecuaciones tienen múltiples soluciones y, a menudo, unas buenas elecciones para p_c y z_c son valores cercanos a 1, porque entonces P_{atraso} tiene efectos mínimos sobre la fase de $G_1''G_2$ a frecuencias más altas. El polo y el cero de P_{atraso} efectivamente se cancelan entre sí a altas frecuencias cuando sus valores son cercanos a 1. Después de varios ensayos, obtuvimos $a = 0.86$ y $b = 0.97$, y un compensador final:

$$G_1(z) \equiv G_1'''(z) = \frac{1.59(z - 0.86)}{(z - 1)(z - 0.97)}$$

En la figura 12-19 se presenta el diagrama polar resultante (para $0 < \omega < \pi$) en el sistema compensado G_1G_2 con $\phi_{MF} > 30°$.

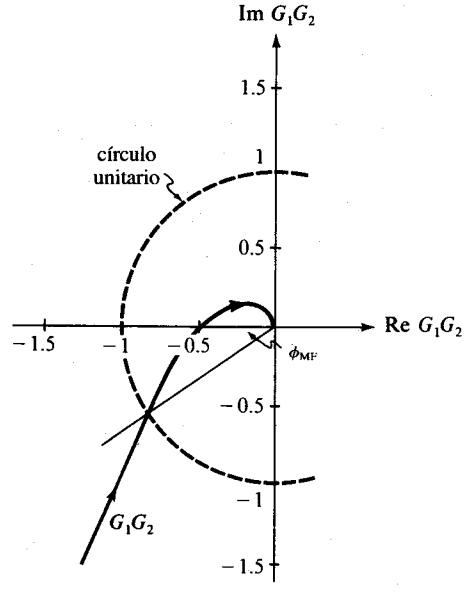


Figura 12-19

El ejemplo anterior se trabajó por medio de las técnicas del lugar de las raíces del ejemplo 14.5, y también mediante los métodos de Bode del ejemplo 16.6, la última solución utilizando la transformada w presentada en la sección 10.7.

Problemas resueltos

Compensación del factor de ganancia

12.1. Considere la función de transferencia en malla abierta $GH = -3/(s + 1)(s + 2)$. ¿El sistema representado por GH es estable o inestable?

Inestable. La ecuación característica se determina a partir de $1 + GH = 0$ y está dada mediante $s^2 + 3s - 1 = 0$. Puesto que todos los coeficientes no tienen el mismo signo, el sistema es inestable (*véase* el problema 5.27).

12.2. Determine el valor mínimo del factor de ganancia para estabilizar el sistema del problema anterior.

Escribamos GH como $GH = K/(s + 1)(s + 2)$. Entonces la ecuación característica es $s^2 + 3s + 2 + K = 0$, y la tabla de Routh (*véase* la sección 5.3) es

s^2	1	$(2 + K)$
s^1	3	0
s^0	$(2 + K)$	

Por tanto el factor de ganancia mínimo para la estabilidad es $K = -2 + \epsilon$, en donde ϵ es cualquier número positivo pequeño.

12.3. La solución del problema anterior nos dice que el sistema de los problemas 12.1 y 12.2 es estable para todo $K > -2$. Dibuje el diagrama polar de este sistema, superpuestos sobre los mismos ejes de coordenadas, para $K_1 = -3$ y $K_2 = -1$. ¿Qué comentarios generales puede hacer acerca de la respuesta transitoria en el sistema estable? Suponga que es un sistema con retroalimentación unitaria.

En la figura 12-20 se muestran los diagramas polares solicitados. El círculo M tangente a la gráfica de $K = -1$ tiene radio infinito; entonces $M_p = 1$. Esto significa que el pico de la sobretensión es cero (no hay sobretensión), y el sistema es críticamente amortiguado o sobreamortiguado.

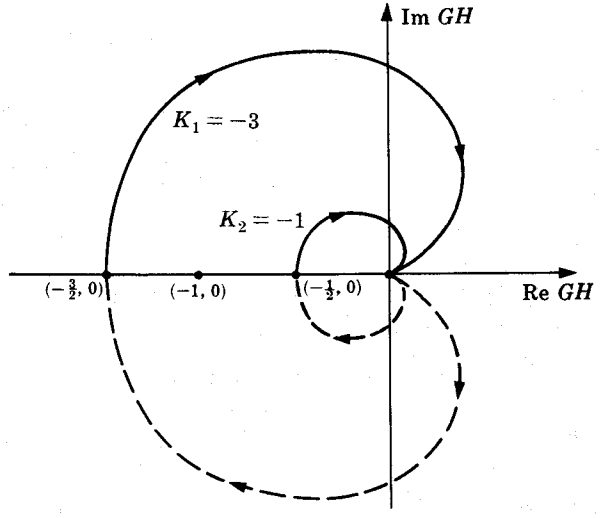


Figura 12-20

12.4. El sistema representado por la ecuación característica $s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + K = 0$, ¿es siempre condicionalmente estable? ¿Por qué?

Sí. En el ejemplo 5.3 se determinó que el intervalo del factor de ganancia para la estabilidad de este sistema es $-1 < K < 8$. Puesto que ambos límites son finitos, un aumento del factor de ganancia por encima de 8 o una disminución por debajo de -1 desestabiliza el sistema.

12.5. Determine el factor de ganancia K en un sistema con retroalimentación unitaria cuya función de transferencia en malla abierta está dada por $G = K/(s + 1)(s + 2)$ para un pico resonante especificado por $M_p = 2$.

A partir de la ecuación *(12.1)* tenemos $\Psi_p = \text{sen}^{-1}(\frac{1}{2}) = 30°$. En la figura 12-21 se muestra la línea $\overline{AB}$ trazada a un ángulo de 30° por debajo del eje real negativo, ésta es una réplica de la figura 12-20 para $K = -1$.

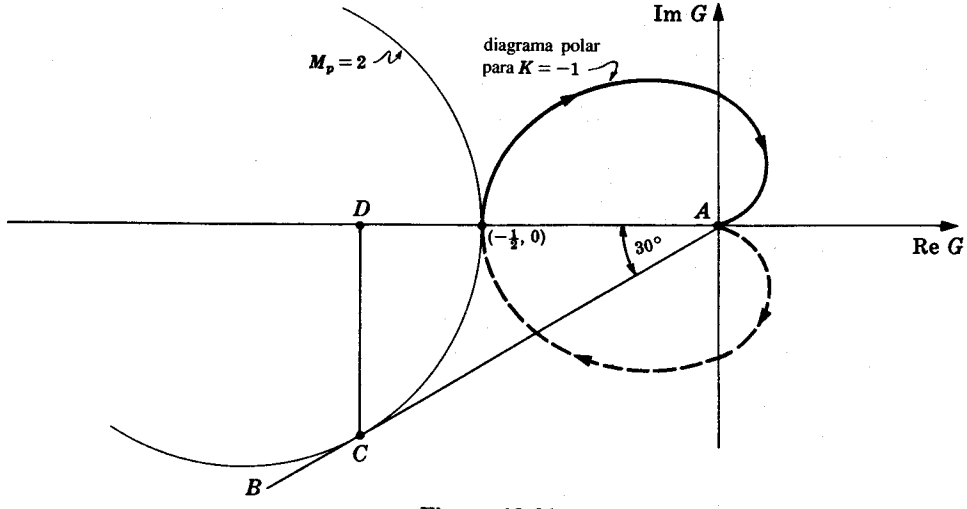


Figura 12-21

El círculo marcado con $M_p = 2$ se ha dibujado tangente tanto a $\overline{AB}$ como al diagrama polar de $K = -1$. Utilizando la escala de este diagrama polar, la línea $\overline{AD}$ tiene una longitud igual a 0.76. Por tanto la ecuación (*12.3*) produce

$$K_{M_p} = \frac{K'}{\text{longitud de } \overline{AD}} = \frac{-1}{0.76} = -1.32$$

También es posible calcular un valor *positivo* de ganancia para $M_p = 2$ a partir del diagrama polar de $G(s)$ para cualquier valor positivo de K. El diagrama polar para $K = 1$ es el mismo de la figura 12-21, pero girado 180°.

Compensación miscelánea

12.6. ¿Qué clase de compensación es posible en un sistema cuyo diagrama polar se muestra en la figura 12-22?

Las compensaciones de adelanto, de atraso-adelanto y del factor de ganancia simple son capaces de estabilizar el sistema y mejorar su estabilidad relativa.

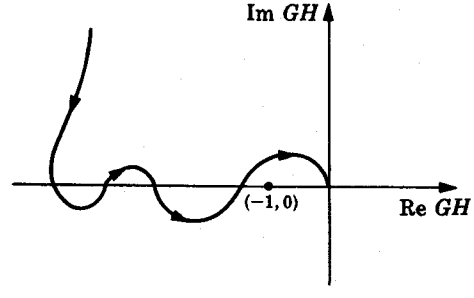


Figura 12-22

12.7. Considere el sistema con retroalimentación unitaria cuya función de transferencia en malla abierta está dada por

$$G = \frac{K_1}{s(s+a)} \qquad a, K_1 > 0$$

La inclusión de una malla de retroalimentación menor con una función de transferencia $K_2 s$ ($K_2 > 0$), como se muestra en el diagrama de bloques de la figura 12-23, ¿cómo afectaría el desempeño del sistema en estado transitorio y en estado estacionario?

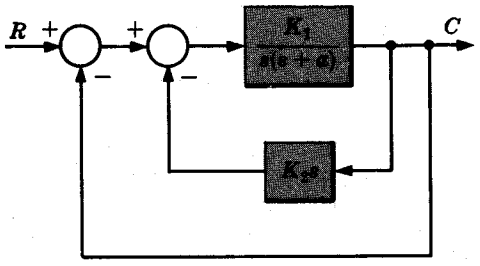


Figura 12-23

Al combinar los bloques de la malla interna se produce un nuevo sistema con retroalimentación unitaria con una función de transferencia en malla abierta

$$G' = \frac{K_1}{s(s+a+K_1K_2)}$$

En la figura 12-24 se dibujan los diagramas polares para G y G'.

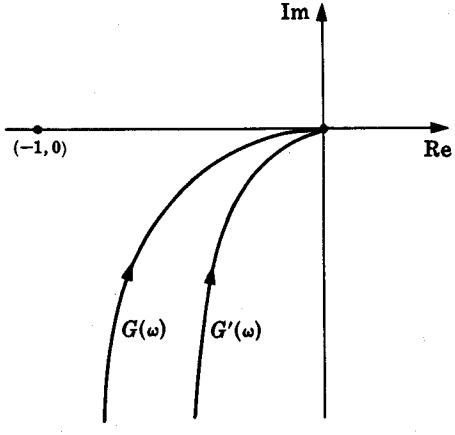


Figura 12-24

Claramente se ve que el margen de fase es mayor en el sistema de retroalimentación G' con dos mallas. Por tanto el pico de sobretensión es menor, o su relación de amortiguación es mayor, y la

respuesta transitoria es superior a la del sistema no compensado. Sin embargo, el desempeño en estado estacionario, por lo general es un poco peor. Para una entrada paso unitario el error en estado estacionario es cero, igual que para cualquier sistema del tipo 1. Pero el error en estado estacionario para una rampa unitaria o entrada de velocidad es mayor [*véanse* las ecuaciones (*9.4*) y (*9.5*)]. El esquema de compensación ilustrado por este problema se llama *retroalimentación tacométrica* o *derivada*, y el algoritmo de control es un control (*D*) *derivada*.

12.8. Determine un tipo de compensador que produzca un margen de fase de aproximadamente 45° cuando se agrega a los componentes del sistema fijo definido por

$$GH = \frac{4}{s(s^2 + 3.2s + 64)}$$

Un requerimiento adicional es que la respuesta de alta frecuencia en el sistema compensado sea aproximadamente la misma que la del no compensado.

En la figura 12-25 se presenta el diagrama polar para GH. Este se encuentra muy próximo al eje imaginario negativo para casi todos los valores de ω.

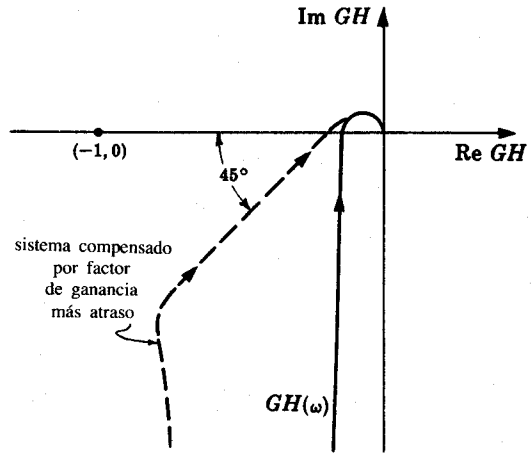


Figura 12-25

El margen de fase es casi de 90°, y un incremento en el factor de ganancia y/o un compensador por atraso es capaz de satisfacer los requerimientos del margen de fase. Pero, puesto que la red de atraso puede diseñarse para proporcionar atenuación a altas frecuencias y atraso en el intervalo de baja frecuencia sería ideal y suficiente una combinación de ambos (*véase* el ejemplo 12.5), como se muestra en la figura 12-25. Por supuesto, no es *necesario* un compensador por factor de ganancia más atraso, para satisfacer los requerimientos de diseño. Probablemente hay un número infinito de redes diferentes o funciones de transferencia capaces de satisfacer estas especificaciones. Sin embargo, la red de atraso y el amplificador son *convenientes* debido a su normalización, disponibilidad y facilidad de síntesis.

12.9. Esboce el diseño de un servomecanismo capaz de seguir una entrada de velocidad constante con error cero en estado estacionario y aproximadamente un 25% de sobretensión máxima en el estado transitorio. La planta fija está dada por $G_2 = 50/s^2(s + 5)$.

Puesto que la planta es del tipo 2, es capaz de seguir una entrada de velocidad constante con error cero en estado estacionario (*véase* el Capítulo 9). Sin embargo, el sistema en malla cerrada es inestable para cualquier valor del factor de ganancia (*véase* el ejemplo 12.6). Puesto que no se han hecho demandas sobre el ancho de banda, debe ser suficiente una compensación de adelanto (de nuevo *véase* el ejemplo 12.6) para estabilizar el sistema y cumplir con la especificación transitoria. Pero, probablemente se requieran dos redes de adelanto en serie porque el margen de fase del sistema inestable es negativo, y una sobretensión del 25% es equivalente más o menos a un margen de fase de +45°. La mayor parte de las redes normales de adelanto tienen un adelanto de fase máximo de casi 54° (*véase* la figura 16-2).

El diseño detallado sería muy tedioso al utilizar el análisis de Nyquist, si se hace manualmente, porque el diagrama polar a menudo debe dibujarse con detalle varias veces antes de converger a una solución satisfactoria. Si no se dispone de un computador para facilitar dicho proceso, este problema puede resolverse de manera mucho más fácil al utilizar los métodos de diseño que se presentan en los Capítulos 14, 16 y 18. En realidad, dos redes compensadoras por adelanto, cada una con una función de transferencia aproximadamente de $P_{\text{adelanto}} = (s + 3)/(s + 20)$, satisfaría las especificaciones. Si el error máximo de aceleración en estado estacionario, se especificara también, se necesitaría un preamplificador con las redes de adelanto. Por ejemplo, si $K_a = 50$, entonces se necesitaría un preamplificador de ganancia $5(20/3)^2$. Este preamplificador debería colocarse *entre* las dos redes de adelanto para prevenir o minimizar los efectos de carga (*véase* la sección 8.7).

12.10. Esboce un diseño para un sistema con retroalimentación unitaria con una planta dada por

$$G_2 = \frac{2000}{s(s+5)(s+10)}$$

y las especificaciones de desempeño:

1) $\phi_{\text{MF}} \cong 45°$.
2) $K_v = 50$.
3) El ancho de banda AB del sistema compensado debe ser aproximadamente igual, o no mucho mayor que el del sistema no compensado, porque se presentan perturbaciones por "ruido" de alta frecuencia, bajo condiciones normales de operación.
4) El sistema compensado no debería responder de manera lenta; esto es, la constante de tiempo τ predominante del sistema debe mantenerse en un valor que sea aproximadamente el mismo que el del sistema no compensado.

Un cálculo simple nos muestra con claridad que el sistema no compensado es inestable (por ejemplo, pruebe el criterio de Routh). En consecuencia es obligatoria la compensación. Pero debido a la naturaleza rigurosa de las especificaciones, el diseño detallado de este sistema al utilizar las técnicas de Nyquist, requiere demasiado esfuerzo, si se hace manualmente. Las técnicas de los siguientes capítulos proporcionan una solución mucho más simple. Sin embargo, el análisis del enunciado del problema indica la clase de compensación necesaria.

Para G_2, $K_v = \lim_{s \to 0} sG_2(s) = 40$. En consecuencia la satisfacción de 2) requiere una compensación de ganancia de 5/4. Pero un incremento en la ganancia sólo hace más inestable el sistema. Por tanto es necesaria una compensación adicional. La compensación por adelanto probablemente es inadecuada debido a la especificación 3), y no es posible la compensación por atraso debido a la especificación 4). Así, parece que una red de atraso-adelanto y un amplificador lograrían satisfacer todos los criterios. La parte de atraso de la red de atraso-adelanto satisfaría la especificación 3), y la parte de adelanto haría lo propio con las especificaciones 4) y 1).

12.11. ¿Cuál es el efecto sobre el diagrama polar del sistema

$$GH = \frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)}$$

en donde $m \leq n$, $0 < z_i < \infty$, $0 \leq p_i < \infty$, cuando k polos finitos diferentes de cero se han incluido en GH, además de los n polos originales?

Para bajas frecuencias el diagrama polar sólo se modifica en magnitud, puesto que

$$\lim_{s \to 0} GH' = \lim_{s \to 0} \left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{i=1}^{n+k}(s+p_i)} \right] = \frac{\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{i=1}^{n+k} p_i} = \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{k} p_i} \right) \lim_{s \to 0} GH$$

Para altas frecuencias, agregar k polos reduce en $k\pi/2$ radianes el ángulo de fase de GH, puesto que

$$\lim_{\omega \to \infty} \arg GH'(\omega) = \lim_{\omega \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{m} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{z_i}\right) - \sum_{i=1}^{n+k} \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p_i}\right) \right]$$

$$= \frac{m\pi}{2} - \frac{(n+k)\pi}{2} = \lim_{\omega \to \infty} \arg GH - \frac{k\pi}{2}$$

En consecuencia, la parte del diagrama polar cerca del origen se gira en el sentido R (horario) $k\pi/2$ grados cuando se agregan k polos.

12.12. Dibuje el diagrama polar del compensador digital por atraso dado por la ecuación (*12.4*):

$$P_{\text{atraso}}(z) = \left(\frac{1-p_c}{1-z_c} \right) \left[\frac{z-z_c}{z-p_c} \right] \qquad z_c < p_c$$

Hagamos $z_c = 0.86$ y $p_c = 0.97$ para simplificar la tarea.

$$\text{En } \omega = 0,\ P_{\text{atraso}} = P_{\text{atraso}}(e^{j0T}) = P_{\text{atraso}}(1) = 1.\ \text{En } \omega T = \pi,$$

$$P_{\text{Atraso}}(e^{j\pi}) = \left(\frac{1-p_c}{1-z_c}\right)\left[\frac{-1-z_c}{-1-p_c}\right] = \frac{1-z_cp_c-(p_c-z_c)}{1-z_cp_c+(p_c-z_c)} \equiv c = 0.2$$

En unos pocos valores intermedios, $P_{\text{atraso}}(e^{j\pi/4}) \approx 0.02 - j0.03$ y $P_{\text{atraso}}(e^{j\pi/2}) \approx 0.2 - j0.012$. En la figura 12.26 se muestra el diagrama polar resultante para $0 \leq \omega T \leq \pi$ radianes. Resulta instructivo comparar este diagrama polar del compensador digital por atraso con su equivalente continuo en el tiempo, dado en la figura 12.11.

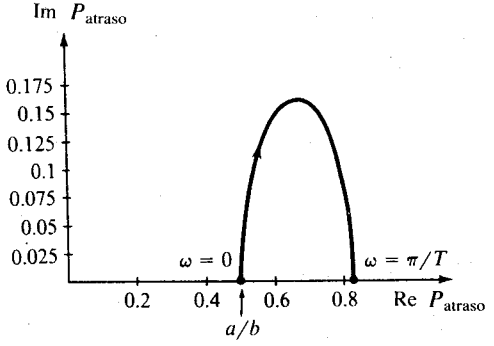


Figura 12-26

12.13. Dibuje el diagrama polar del compensador digital por adelanto:

$$P_{\text{adelanto}}(z) = \left(\frac{a}{b}\right)\left[\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right]\left[\frac{z-e^{-aT}}{z-e^{-bT}}\right]$$

en donde $a < b$.

Tenemos

$$P_{\text{adelanto}}(e^{j0T}) = P_{\text{adelanto}}(1) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-e^{-bT}}{1-e^{-aT}}\right)\left(\frac{1-e^{-aT}}{1-e^{-bT}}\right) = \frac{a}{b} < 1$$

El resto de la gráfica se ha dibujado con computador, mediante la evaluación de $P_{\text{adelanto}}(1/\phi)$ para valores del ángulo ϕ en el rango de $0 < \phi \leq \pi$ radianes, para valores específicos de $a = 1$ y $b = 2$. El resultado se presenta en la figura 12.27, la cual debe compararse con la figura 12.6, que representa el diagrama polar de una red de adelanto en un sistema continuo.

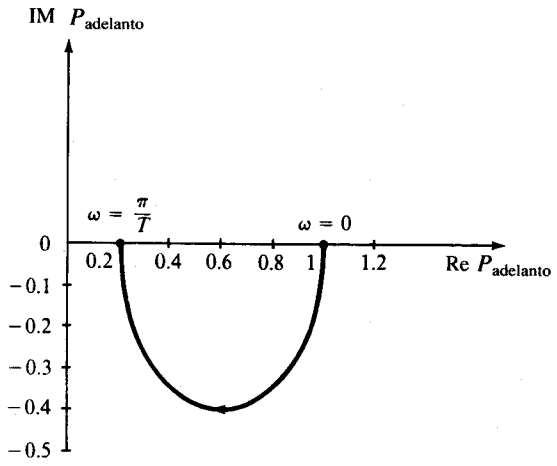


Figura 12-27

Esta forma de compensador digital por adelanto, presentada en la ecuación (*6.9*), tiene un factor de ganancia

$$K_{\text{adelanto}} = \frac{a}{b}\left[\frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}\right]$$

Este compensador es un digital-analógico directo del compensador continuo por adelanto $P_{\text{adelanto}} = (s + a)/(s + b)$, en el cual los ceros y los polos en $-a$ y $-b$ en el plano s se han transformado directamente en ceros y polos en el plano z $z_c = e^{-aT}$ y $p_c = e^{-bT}$, y se ha preservado la ganancia en estado estacionario (en $\omega = 0$) como a/b.

12.14. El sistema continuo en malla cerrada con compensación del factor de ganancia y con compensación por adelanto, que se muestra en la figura 12-28, es estable, con una relación de amortiguación $\zeta \approx 0.7$, y una constante de tiempo dominante $\tau \approx 4.5$ s (*véanse* las secciones 4.13 y 10.4).

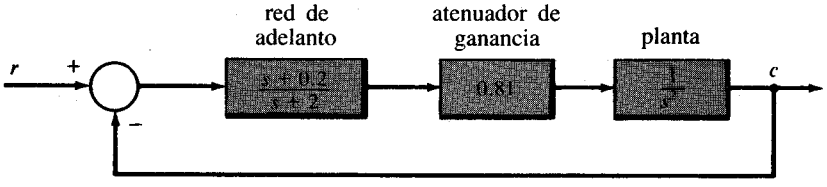


Figura 12-28

Rediseñe este sistema remplazando el controlador (incluida la unión de suma) con un computador digital y cualquier otro componente necesario para la conversión de datos de analógico a digital. El nuevo sistema debe tener casi las mismas características dinámicas.

La tasa de muestreo de los componentes digitales debe ser suficientemente rápida para reproducir las señales con exactitud. La frecuencia natural ω_n se calcula a partir de la ecuación (10.7) como

$\omega_n \approx 1/\xi\tau = 1/(0.7)(4.5) = 0.317$ rad/s. Para un sistema continuo con esta ω_n, una frecuencia angular de muestreo segura es $\omega_m \approx 20\omega_n = 6.35 \approx 2\pi$ rad/s, equivalente a $f_m = 1$ Hz, porque $\omega_m = 2\pi f_m$. En consecuencia escogemos $T = 1$ s.

Ahora remplazamos el compensador continuo por adelanto por el compensador digital por adelanto que se dio en el problema 12.13:

$$P_{\text{adelanto}}(z) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}\right)\left[\frac{z - e^{-aT}}{z - e^{-bT}}\right]$$

$$\simeq 0.55\left[\frac{z - 0.82}{z - 0.14}\right]$$

en donde $a = 0.2$ y $b = 2$, a partir de la figura 12-28. El factor de 0.55 puede obtenerse con el compensador de factor de ganancia en el sistema continuo, $K = 0.81$, produciendo un factor global de 0.55 (0.81) = 0.45. El diseño resultante también necesita muestreadores en las trayectorias de retroalimentación y de entrada, y un sistema de sostenimiento de orden cero en la trayectoria directa, tal como se muestra en la figura 12-29.

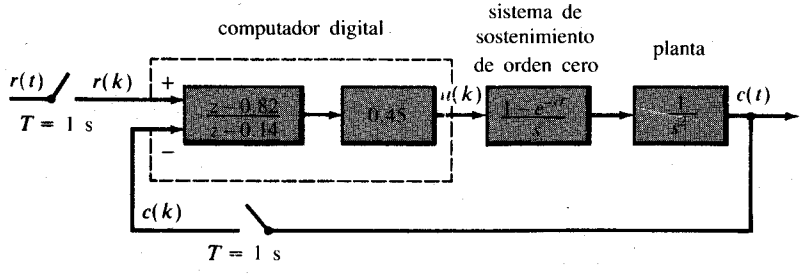


Figura 12-29

La función de transferencia digital $P_{\text{adelanto}}(z)$ puede implementarse por cálculo digital como una ecuación de diferencia entre la entrada y la salida de P_{adelanto}, utilizando los métodos que se describieron en la sección 4.9. Esto es, escribir $P_{\text{adelanto}}(z)$ como una función de z^{-1} en lugar de z, y tratar a z^{-1} como un operador de desplazamiento de tiempo unitario. Al combinar el factor de ganancia 0.45 con P_{adelanto}, obtenemos

$$0.48\ P_{\text{adelanto}} = \frac{0.45 - 0.39z^{-1}}{1 - 0.14z^{-1}} \equiv \frac{u(k)}{r(k) - c(k)}$$

Entonces, al multiplicar los términos cruzados y hacer $z^{-1}u(k) = u(k + 1)$, etc., obtenemos la ecuación de diferencia deseada:

$$u(k) = 0.14u(k-1) + 0.45[r(k) - c(k)] - 0.39[r(k-1) - c(k-1)]$$

12.15. Convierta en digitales los componentes continuos restantes de la figura 12-29 y compare el diagrama polar de: *a*) la planta continua original sin compensación, $G_2(s) = 1/s^2$, *b*) el sistema compensado de la figura 12-28, $G_1G_2(s)$ y *c*) el sistema digital de la figura 12-30, $G_1G_2(z)$.

La combinación del sistema de sostenimiento de orden cero y la planta $G_2(s) = 1/s^2$ puede convertir en digital al utilizar la ecuación (*6.9*):

$$G_2'(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)\Big|_{t=kT}\right\}$$

$$= \frac{T^2}{2}\left(\frac{z+1}{(z-1)^2}\right) = \frac{0.5(z+1)}{(z-1)^2}$$

En la figura 12-30 se muestra el sistema discreto equivalente en malla cerrada.

Los diagramas de estabilidad de Nyquist (que no se muestran) indicarían que los sistemas compensados son absolutamente estables. Para verificar la estabilidad relativa, en la figura 12-31 se muestran superpuestos los diagramas polares de los tres sistemas, sólo para $\omega > 0$. El margen de fase de $G_1G_2(s)$ es $\phi_{MF} \simeq 53°$, una mejora sustancial sobre la de $G_2(s)$. Los diagramas polares para $G_1G_2(s)$ y $G_1G_2(z)$ son bastante similares en un amplio intervalo de ω, y el margen de fase para $G_1G_2(z)$ todavía es bastante bueno, $\phi_{MF} \simeq 37°$.

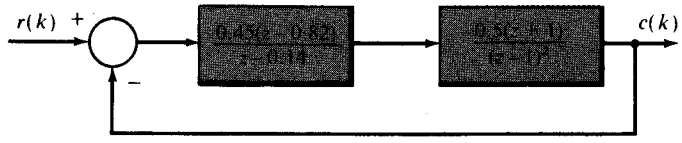


Figura 12-30

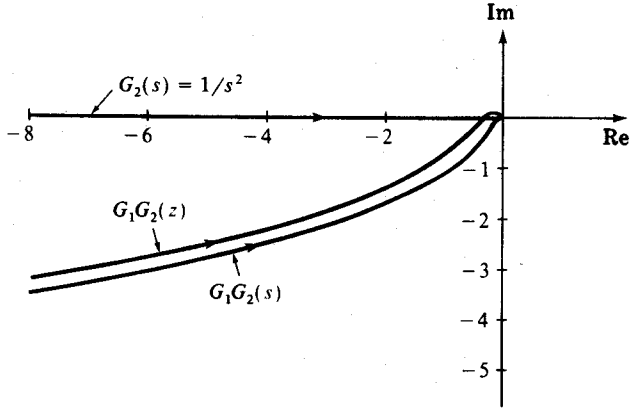


Figura 12-31

12.16. Determine el ancho de banda AB del sistema en malla cerrada en el sistema compensado que se diseñó en el ejemplo 12.7.

La especificación 3 de desempeño se dio en términos de la frecuencia de cruce de ganancia ω_1, como $\omega_1 \geq 10$ rad/s. Esto puede parecer algo irreal o artificial, puesto que también se da como especificación 2 de desempeño un margen de fase $\phi_{MF} = [180 + \arg GH(\omega_1)]$ grados. En realidad, el *ancho de banda* (AB) del sistema en malla cerrada sería la frecuencia más probable de interés en el diseño de un sistema de control. (Estos criterios de diseño se analizaron en el Capítulo 10). Sin embargo, como se hizo notar en la sección 10.4, es usual el caso en que ω_1 resulta ser una buena aproximación del ancho de banda AB del sistema en malla cerrada, cuando se da su interpretación común como el intervalo de frecuencias sobre el cual la relación de magnitudes del sistema, que en éste caso significa $|C/R|$, no cae más de 3 dB de su valor en estado estacionario, en $\omega = 0$ ($z = 1$). Para este problema

$$G_1 = \frac{1.59(z - 0.86)}{(z - 1)(z - 0.97)}$$

$$G_2 = \frac{3(z + 1)(z + \frac{1}{3})}{8z(z + \frac{1}{2})}$$

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2}$$

Encontramos fácilmente que

$$\lim_{\omega \to 0}\left(\frac{C}{R}\right) = \lim_{z \to 1}\left(\frac{C}{R}\right) = 1$$

Ahora, 3 dB por abajo de 1 es 0.707 [*véase* la ecuación (*10.5*)]. En consecuencia el ancho de banda AB es la frecuencia ω_{AB} que satisface la ecuación:

$$\left|\frac{C}{R}(\omega_{AB})\right| = 0.707$$

Rápidamente obtenemos la solución $\omega_{AB} = 10.724$ rad/s por ensayo y error, al utilizar un computador para evaluar la relación de magnitudes a unos pocos valores de ω en las proximidades de $\omega_1 = 10$. Así, se confirma como buena la aproximación $\omega_1 \simeq \omega_{AB}$ para el problema resuelto en el ejemplo 12.7.

Problemas suplementarios

12.17. Determine un valor positivo de factor de ganancia K cuando $M_p = 2$ en el sistema del problema 12.5

12.18. Verifique la ecuación (*12.1*).

12.19. Verifique las ecuaciones (*12.2*) y (*12.3*).

12.20. Diseñe un compensador que produzca un margen de fase de aproximadamente 45° en el sistema definido por $GH = 84/s(s + 2)(s + 6)$.

12.21. Diseñe un compensador que produzca un margen de fase cercano a 40° y una constante de velocidad $K_v = 40$ en el sistema definido por $GH = (4 \times 10^5)/s(s + 20)(s + 100)$.

12.22. ¿Qué clase de compensación puede utilizarse para producir una sobretensión máxima del 20% en el sistema definido por $GH = (4 \times 10^4)/s^2(s + 100)$?

12.23. Demuestre que la adición de k ceros finitos ($z_i \neq 0$) al sistema del problema 12.11 gira en $k\pi/2$ radianes la parte de alta frecuencia del diagrama polar en la dirección S (antihoraria).

Respuestas a algunos problemas suplementarios

12.17. $K = 31.2$

12.18. $P_{\text{adelanto}} = \dfrac{s + 30}{s + 120}$

12.21. $P_{\text{adelanto}} = \dfrac{s + 20}{s + 100}$, no se requiere preamplificador.

12.22. Compensación por atraso-adelanto y posiblemente compensación por adelanto más factor de ganancia.

Capítulo 13

Análisis utilizando el lugar de las raíces

13.1 Introducción

En los Capítulos 4 y 6 se demostró que los polos de una función de transferencia pueden representarse gráficamente en el plano s o en el plano z por medio de un diagrama de polos y ceros. En este capítulo se desarrolla un método analítico para representar la localización de los polos de la función de transferencia en malla cerrada

$$\frac{G}{1+GH}$$

a partir del factor de ganancia K (*véanse* las secciones 6.2 y 6.6) de la función de transferencia GH en malla abierta. Este método, llamado *análisis del lugar de las raíces*, solamente requiere que se conozca la localización de los polos y los ceros de GH, y no requiere la factorización del polinomio característico.

Las técnicas del lugar de las raíces permiten el cálculo exacto de la respuesta en el dominio del tiempo, además de producir información disponible acerca de la respuesta de frecuencia.

La siguiente discusión del análisis del lugar de las raíces se aplica de manera idéntica a sistemas continuos en el plano s y a sistemas discretos en el plano z.

13.2 Variación de los polos de un sistema en malla cerrada: el lugar de las raíces

Considere el sistema canónico de control con retroalimentación dado en la figura 13.1. La función de transferencia en malla cerrada es

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH}$$

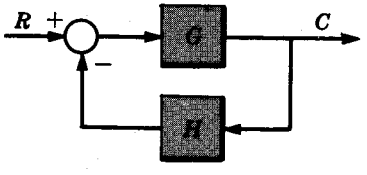


Figura 13-1

Dejemos que la función de transferencia GH en malla abierta sea representada por

$$GH \equiv \frac{KN}{D}$$

en donde N y D son polinomios finitos de la variable compleja s ó z y K es el factor de ganancia en malla abierta. La función de transferencia en malla abierta se hace entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1 + KN/D} = \frac{GD}{D + KN}$$

Los polos de la malla cerrada son las raíces de la ecuación característica

$$D + KN = 0 \tag{13.1}$$

En general, la localización de estas raíces en el plano s o en el plano z cambia a medida que se varía el factor de ganancia K en malla abierta. El lugar geométrico de estas raíces representado gráficamente en el plano s o en el plano z a partir de K se denomina **lugar de las raíces.**

Para $K = 0$, las raíces de la ecuación (*13.1*) son las raíces del polinomio D, que son los mismos polos de la función de transferencia GH en malla abierta. Si K se hace muy grande, las raíces se aproximan a las del polinomio N, los ceros de la malla abierta. Así, a medida que K aumenta desde cero hasta infinito, los lugares de los polos de la malla cerrada se originan a partir de los polos de la malla abierta y terminan en los ceros de la misma.

EJEMPLO 13.1. Considere la función de transferencia del sistema continuo en malla abierta

$$GH = \frac{KN(s)}{D(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2 + 2s} = \frac{K(s+1)}{s(s+2)}$$

Para $H = 1$, la función de transferencia en malla abierta es

$$\frac{C}{R} = \frac{K(s+1)}{s^2 + 2s + K(s+1)}$$

Los polos de la malla cerrada de este sistema se determinan fácilmente al factorizar el polinomio del denominador:

$$p_1 = -\tfrac{1}{2}(2 + K) + \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}K^2}$$

$$p_2 = -\tfrac{1}{2}(2 + K) - \sqrt{1 + \tfrac{1}{4}K^2}$$

En la figura 13-2 se muestra el lugar geométrico de estas raíces representado en el plano s en función de K (para $K > 0$). Como se observa en la figura, este lugar de las raíces tiene dos *ramas*: una para un polo de la malla cerrada que se mueve desde el polo de la malla abierta en el origen hasta el cero de la malla abierta en -1 y desde el polo de la malla abierta en -2 hasta el cero de la malla abierta en $-\infty$.

En el ejemplo anterior, el lugar de las raíces se construye al factorizar el polinomio del denominador de la función de transferencia en malla cerrada. En las secciones siguientes se describen técnicas que permiten la construcción de lugares de las raíces sin necesidad de la factorización.

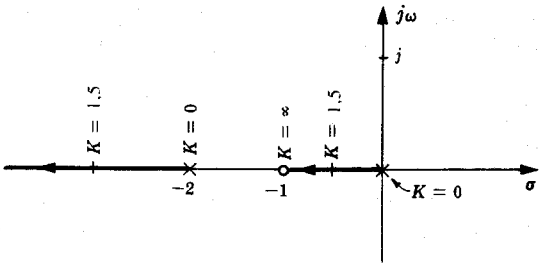


Figura 13-2

13.3 Criterios de ángulo y de magnitud

Para que una rama de un lugar de las raíces pase por un punto particular p_1 en el plano complejo, es necesario que p_1 sea una raíz de la ecuación característica (*13.1*) para algún valor real de K. Es decir,

$$D(p_1) + KN(p_1) = 0 \tag{13.2}$$

o, de manera equivalente,

$$GH = \frac{KN(p_1)}{D(p_1)} = -1 \tag{13.3}$$

En consecuencia el número complejo $GH(p_1)$ debe tener un ángulo de fase de $180° + 360l°$, en donde l es un entero arbitrario. De esta manera tenemos el **criterio de ángulo**

$$\arg GH(p_1) = 180° + 360l° = (2l+1)\pi \text{ radianes} \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13.4a}$$

que también puede escribirse como

$$\arg\left[\frac{N(p_1)}{D(p_1)}\right] = \begin{cases} (2l+1)\pi \text{ radianes} & \text{para } K > 0 \\ 2l\pi \text{ radianes} & \text{para } K < 0 \end{cases} \qquad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{13.4b}$$

Para que p_1 sea un polo de la malla cerrada del sistema, en el lugar de las raíces, es necesario que se satisfaga, además del ángulo de fase, la ecuación (*13.3*) con respecto a la *magnitud*. Es decir, K debe tener el valor particular que satisfaga el **criterio de magnitud**: $|GH(p_1)| = 1$, o

$$|K| = \left|\frac{D(p_1)}{N(p_1)}\right| \tag{13.5}$$

El ángulo y la magnitud de GH en cualquier punto de los planos complejos s ó z pueden determinarse de manera gráfica como se describió en las secciones 4.12 y 6.5. De esta manera, es posible construir manualmente el lugar de las raíces por un procedimiento de tanteo, probando puntos en el plano complejo. Es decir, el lugar de las raíces se dibuja a través de todos los puntos que satisfacen el criterio del ángulo, ecuación (*13.4b*), y el criterio de magnitud se utiliza para determinar los valores de K en puntos a lo largo de los lugares. Se dispone ampliamente de progra-

mas para computadores digitales que grafican los lugares de las raíces. Sin embargo, la construcción manual se simplifica de modo considerable al utilizar ciertas reglas de construcción que se describen en las siguientes secciones.

13.4 Número de lugares

El número de lugares, esto es, el número de ramas del lugar de las raíces, es igual al número de polos de la función de transferencia GH en malla abierta (para $n \geq m$).

EJEMPLO 13.2. La función de transferencia en malla abierta de un sistema discreto $GH(z) = K(z + \frac{1}{2})/z^2(z + \frac{1}{4})$ tiene tres polos. Por tanto hay tres lugares geométricos en la gráfica del lugar de las raíces.

13.5 Lugares sobre el eje real

Aquellas secciones del lugar de las raíces sobre el eje real en el plano complejo se determinan al contar el número total de polos y ceros finitos de GH a la derecha de los puntos en cuestión. La regla siguiente depende de si el factor de ganancia K en malla abierta es positivo o negativo.

Regla para $K > 0$

Los puntos del lugar de las raíces en el eje real se encuentran a la izquierda de un número *impar* de polos y ceros finitos.

Regla para $K < 0$

Los puntos del lugar de las raíces en el eje real se encuentran a la izquierda de un número *par* de polos y ceros finitos.

Si no hay puntos en el eje real que se encuentren a la izquierda de un número impar de polos y ceros finitos, entonces ninguna parte del lugar de las raíces para $K > 0$ se encuentra en el eje real. Una afirmación similar también es válida para $K < 0$.

EJEMPLO 13.3. Considere el diagrama de polos y ceros de una función de transferencia GH en malla abierta que se presenta en la figura 13-3. Puesto que todos los puntos en el eje real entre 0 y -1, y entre -1 y -2, se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros finitos, estos puntos están en el lugar de las raíces para $K > 0$. La parte del eje real entre $-\infty$ y -4 se encuentra a la izquierda de un número impar de polos y ceros finitos; por tanto estos puntos también están en el lugar de las raíces para $K > 0$. En la figura 13-4 se ilustran todas las partes del lugar de las raíces para $K > 0$ en el eje real. Las partes restantes del eje real, esto es, entre -2 y -4, y entre 0 e ∞, se encuentran en el lugar de las raíces para $K < 0$.

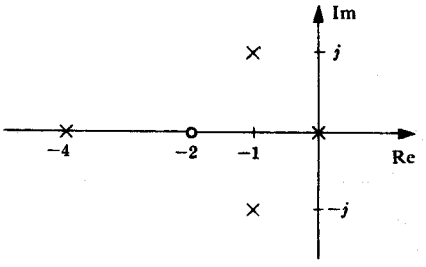


Figura 13-3

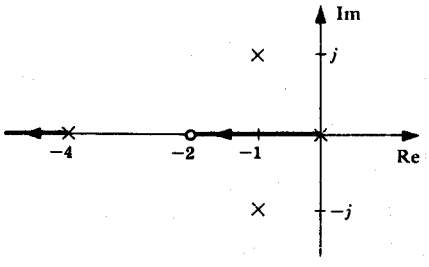


Figura 13-4

13.6 Asíntotas

Para grandes distancias desde el origen en el plano complejo, las ramas de un lugar de las raíces se aproximan a un conjunto de líneas rectas asíntotas. Estas asíntotas parten de un punto en el plano complejo sobre el eje real, llamado **centro de asíntotas** σ_c, y está dado por

$$\sigma_c = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} \tag{13.6}$$

en donde $-p_i$ son los polos, y $-z_i$ son los ceros, n es el número de polos, y m es el número de ceros de GH.

Los ángulos entre las asíntotas y el eje real están dados por

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{(2l+1)180}{n-m} \text{ grados} & \text{para } K > 0 \\ \dfrac{(2l)180}{n-m} \text{ grados} & \text{para } K < 0 \end{cases} \tag{13.7}$$

para $l = 0,1,2,\ldots, n-m-1$. Esto da como resultado un número de asíntotas igual a $n-m$.

EJEMPLO 13.4. El centro de asíntotas para $GH = K(s+2)/s^2(s+4)$ está localizado en

$$\sigma_c = -\frac{4-2}{2} = -1$$

Puesto que $n-m = 3-1 = 2$, hay dos asíntotas. Sus ángulos con el eje real son 90° y 270°, para $K > 0$, como se muestra en la figura 13-5.

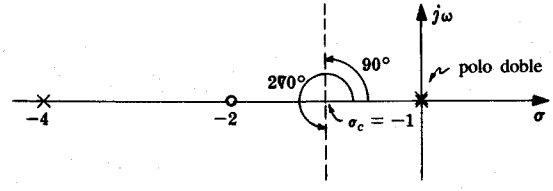


Figura 13-5

13.7 Puntos de separación

Un **punto de separación** σ_s es un punto en el eje real de donde salen o a donde llegan dos o más ramas del lugar de las raíces. En la gráfica del lugar de las raíces de la figura 13-6 se ilustran dos ramas que salen del eje real, y en la figura 13-7, dos ramas que llegan al eje real.

La localización del punto de separación puede determinarse al resolver para σ_s la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\sigma_s + p_i)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\sigma_s + z_i)} \tag{13.8}$$

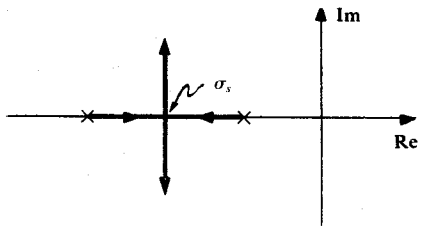


Figura 13-6

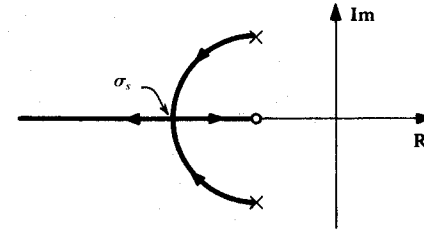


Figura 13-7

en donde $-p_i$ y $-z_i$ son, respectivamente, los polos y los ceros de GH. La solución de esta ecuación requiere la factorización de un polinomio de orden $(n + m - 1)$ en σ_s. En consecuencia, el punto de separación puede determinarse con facilidad sólo de manera analítica para GH relativamente simple. Sin embargo, a menudo una localización aproximada puede determinarse de manera intuitiva; entonces, un proceso iterativo puede utilizarse para resolver la ecuación con mayor exactitud (*véase* el problema 13.20). También podrían aplicarse programas de computador para factorizar los polinomios.

EJEMPLO 13.5. Para determinar los puntos de separación en $GH = K/s(s + 1)(s + 2)$, debe resolverse para σ_s la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_s + 1} + \frac{1}{\sigma_s + 2} = 0$$

$$(\sigma_s + 1)(\sigma_s + 2) + \sigma_s(\sigma_s + 2) + \sigma_s(\sigma_s + 1) = 0$$

la cual se reduce a $3\sigma_s^2 + 6\sigma_s + 2 = 0$, cuyas raíces son $\sigma_s = -0.423, -1.577$.

Al aplicar la regla de las raíces reales de la sección 13.5 para $K > 0$, se indica que hay ramas del lugar de las raíces entre 0 y -1, y entre $-\infty$ y -2. En consecuencia la raíz en -0.423 es un punto de separación, como se muestra en la figura 13-8. El valor de $\sigma_s = -1.577$ representa una separación en el lugar de las raíces para valores negativos de K puesto que la parte del eje real entre -1 y -2 está en el lugar de las raíces para $K < 0$.

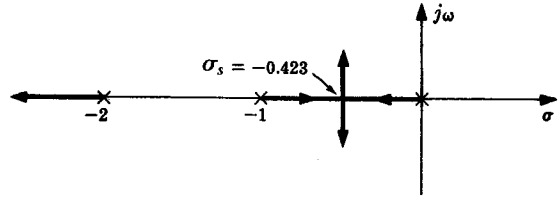


Figura 13-8

13.8 Angulos de salida y de llegada

El **ángulo de salida o partida** del lugar de las raíces desde un *polo complejo* está dado por

$$\theta_P = 180° + \arg GH' \qquad (13.9)$$

en donde el arg GH' es el ángulo de fase de GH calculado en el polo complejo, pero ignorando la contribución de ese polo particular.

EJEMPLO 13.6. Considere la función de transferencia del sistema continuo en malla abierta

$$GH = \frac{K(s+2)}{(s+1+j)(s+1-j)} \qquad K > 0$$

El ángulo de salida del lugar de las raíces desde el polo complejo en $s = -1 + j$ se determina como sigue. El ángulo de GH para $s = -1 + j$, ignorando la contribución del polo en $s = -1 + j$, es $-45°$. En consecuencia el ángulo de salida es

$$\theta_P = 180° - 45° = 135°$$

como se ilustra en la figura 13-9.

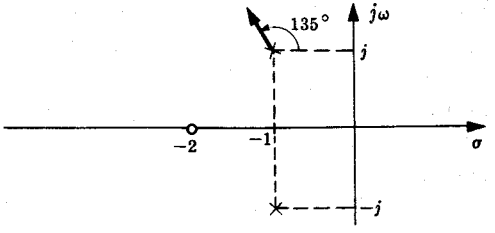


Figura 13-9

El **ángulo de llegada** del lugar de las raíces a un *cero complejo* está dado por

$$\theta_{LL} = 180° - \arg \mathrm{CH}'' \qquad (13.10)$$

en donde el arg GH'' es el ángulo de fase de GH en el cero complejo, ignorando el efecto de ese cero.

EJEMPLO 13.7. Considere la función de transferencia del sistema discreto en el tiempo en malla abierta

$$\frac{K(z+j)(z-j)}{z(z+1)} \qquad K > 0$$

El ángulo de llegada del lugar de las raíces para el cero complejo en $z = j$ es $\theta_{LL} = 180° - (-45°) = 225°$, como se muestra en la figura 13-10.

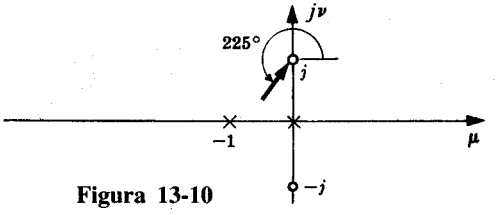


Figura 13-10

13.9 Construcción del lugar de las raíces

Un diagrama del lugar de las raíces puede dibujarse con facilidad y exactitud utilizando las reglas que para su construcción se dan en las secciones 13.4 a 13.8. El siguiente es un procedimiento eficiente. Primero, determine las partes del lugar de las raíces en el eje real. Segundo, calcule el centro y los ángulos de las asíntotas, y dibuje las asíntotas en el diagrama. Luego determine el ángulo de salida del polo complejo y el ángulo de llegada al cero complejo (si hay alguno) e indíquelos en la gráfica. En seguida, haga un bosquejo tentativo de las ramas del lugar de las raíces, tal que cada rama del lugar termine en un cero o tienda a infinito a lo largo de una de las asíntotas. Por supuesto, la exactitud de este último paso debe mejorarse con la experiencia.

La exactitud del diagrama puede mejorarse aplicando el criterio del ángulo en la vecindad de las localizaciones estimadas de las ramas. La regla de la sección 13.7 también puede aplicarse para determinar la localización exacta de los puntos de separación.

El criterio de magnitud de la sección 13.3 se utiliza para determinar los valores de K a lo largo de las ramas del lugar de las raíces.

Puesto que los polos complejos deben presentarse como pares conjugados complejos (suponiendo coeficientes reales para los polinomios del numerador y del denominador de GH), el lugar de las raíces es simétrico con respecto al eje real. De esta manera es suficiente graficar solamente la mitad superior del lugar de las raíces. Sin embargo, debe recordarse que, al hacer esto, las mitades inferiores de los polos y ceros complejos en malla abierta deben incluirse cuando se aplican los criterios de ángulo y de magnitud.

A menudo, para propósitos de análisis o de diseño, se requiere una gráfica exacta del lugar de las raíces sólo en ciertas regiones del plano complejo. En este caso, los criterios de ángulo y de magnitud sólo se aplican en aquellas regiones de interés luego que un esbozo tentativo haya establecido la forma general de la gráfica. Por supuesto, si se dispone de un programa de aplicación (*software*) apropiado para computador, la elaboración de gráficas muy complejas de lugares de las raíces aún puede ser un asunto sencillo.

EJEMPLO 13.8. El lugar de las raíces para un sistema continuo en malla cerrada con función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s+4)} \qquad K > 0$$

se construye como sigue. Aplicando la regla del eje real de la sección 13.5, las partes del eje real entre 0 y -2, y entre -4 y $-\infty$, se encuentran en el lugar de las raíces para $K > 0$. A partir de la ecuación (*13.6*), el centro de asíntotas se determina que es $\sigma_c = -(2 + 4)/3 = -2$, y hay tres asíntotas localizadas en los ángulos $\beta = 60°$, $180°$ y $300°$.

Puesto que se unen dos ramas del lugar de las raíces en el eje real para $K > 0$ entre 0 y -2, existe un punto de separación en esa parte del eje real. Por tanto el lugar de las raíces para $K > 0$ puede dibujarse al estimar la localización del punto de separación y prolongar las ramas del lugar de las raíces hacia las asíntotas, como se muestra en la figura 13-11. Para mejorar la exactitud de esta gráfica, debe determinarse la localización exacta del punto de separación a partir de la ecuación (*13.8*):

$$\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_s + 2} + \frac{1}{\sigma_s + 4} = 0$$

la cual simplifica a $3\sigma_s^2 + 12\sigma_s + 8 = 0$. La solución apropiada de esta ecuación es $\sigma_s = -0.845$.

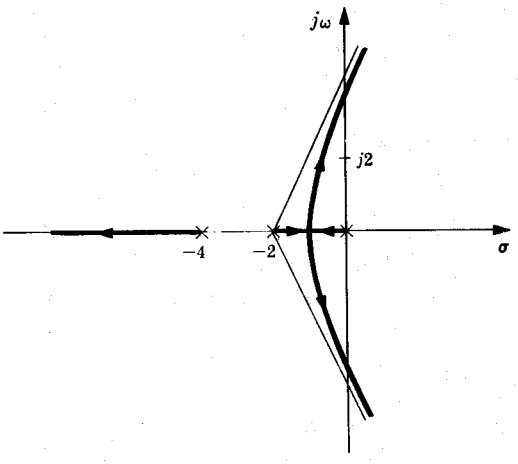


Figura 13-11

El criterio de ángulo se aplica a los puntos en la vecindad del lugar de las raíces aproximado para mejorar la exactitud de la localización de las ramas en la parte compleja del plano s; el criterio de magnitud se utiliza para determinar los valores de K a lo largo del lugar de las raíces. En la figura 13-12 se presenta la gráfica resultante del lugar de las raíces para $K > 0$.

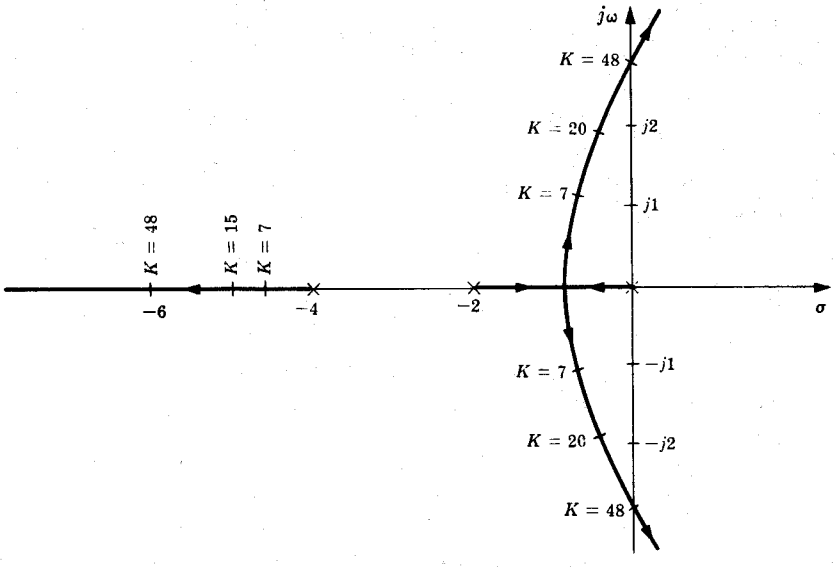


Figura 13-12

El lugar de las raíces para $K < 0$ se construye de manera similar. Sin embargo, en este caso, las partes del eje real entre 0 e ∞ y entre -2 y -4 se encuentran en el lugar de las raíces; el punto de separación se localiza en -3.155, y las asíntotas tienen ángulos de 0°, 120°, y 240°. En la figura 13-13 se muestra el lugar de las raíces para $K < 0$.

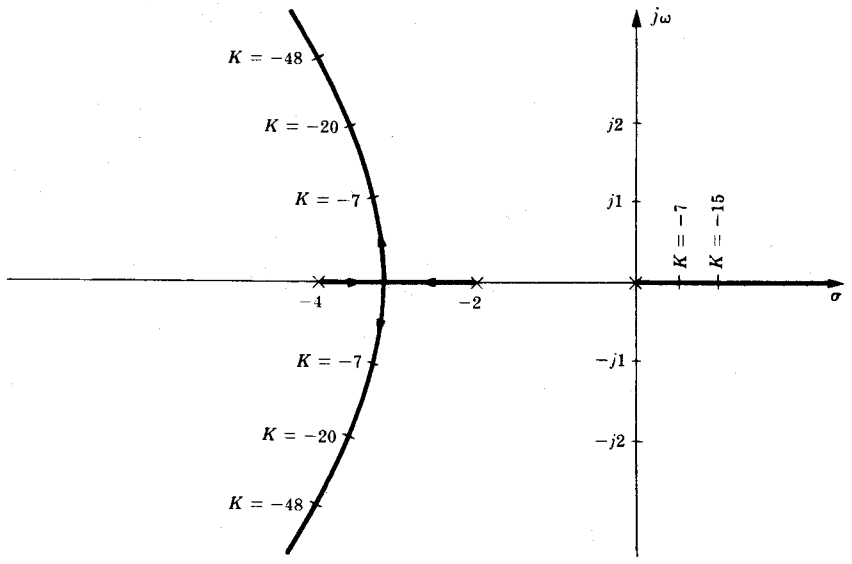


Figura 13-13

13.10 La función de transferencia en malla cerrada y la respuesta en el dominio del tiempo

La función de transferencia en malla cerrada C/R se determina fácilmente a partir de la gráfica del lugar de las raíces para un valor específico del factor de ganancia K en malla abierta. A partir de ésta, puede determinarse la respuesta en el dominio del tiempo $c(t)$ para una entrada $r(t)$ transformable en Laplace, dada para un sistema continuo por medio de la inversión de $C(s)$. Para sistemas discretos, $c(k)$ puede determinarse de manera similar por medio de la inversión de $C(z)$.

Considere la función de transferencia en malla cerrada C/R para el sistema canónico *unitario* con *retroalimentación (negativa)*

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+G} \tag{13.11}$$

Las funciones de transferencia en malla abierta que son expresiones algebraicas racionales pueden escribirse (para sistemas continuos) como

$$G = \frac{KN}{D} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{13.12}$$

G tiene la misma forma para sistemas discretos, remplazando s por z en la ecuación (*13.12*). En esta ecuación, $-z_i$ son los ceros y $-p_i$ son los polos de G, $m \leq n$, y N y D son polinomios cuyas raíces son $-z_i$ y $-p_i$, respectivamente. Entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{KN}{D+KN} \tag{13.13}$$

y resulta claro que C/R y G tienen los mismos ceros pero no los mismos polos (a no ser que $K = 0$). En consecuencia

$$\frac{C}{R} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)\cdots(s+\alpha_n)}$$

en donde $-\alpha_i$ denotan los n polos de la malla cerrada. Por definición, la localización de estos polos se determina directamente a partir de la gráfica del lugar de las raíces para un valor específico de ganancia K en malla abierta.

EJEMPLO 13.9. Considere el sistema continuo cuya función de transferencia en malla abierta es

$$G = \frac{K(s+2)}{(s+1)^2} \qquad K > 0$$

En la figura 13-14 se presenta la gráfica del lugar de las raíces.

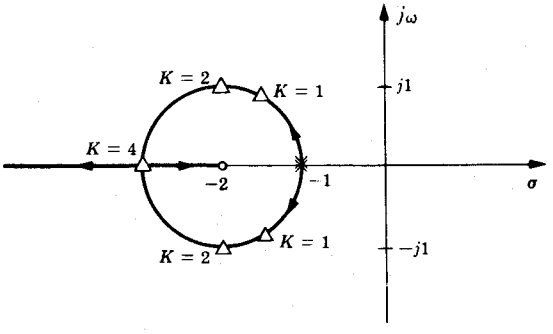


Figura 13-14

Varios valores de factor de ganancia K se muestran en los puntos sobre los lugares marcados con *triángulos pequeños*. Estos puntos son los *polos de la malla cerrada* correspondientes a los valores específicos de K. Para $K = 2$, los polos de la malla cerrada son $-\alpha_1 = -2 + j$, y $-\alpha_2 = -2 - j$. Por tanto

$$\frac{C}{R} = \frac{2(s+2)}{(s+2+j)(s+2-j)}$$

Cuando el sistema no tiene retroalimentación unitaria, entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} \tag{13.14}$$

y

$$GH = \frac{KN}{D} \tag{13.15}$$

Los polos de la malla cerrada pueden determinarse directamente a partir del lugar de las raíces para un K dado, pero los ceros de la malla cerrada no son iguales a los ceros de la malla abierta. Estos últimos deben calcularse de manera separada resolviendo las fracciones en la ecuación (*13.14*).

EJEMPLO 13.10. Considere el sistema continuo descrito por

$$G = \frac{K(s+2)}{s+1} \qquad H = \frac{1}{s+1} \qquad GH = \frac{K(s+2)}{(s+1)^2} \qquad K > 0$$

y

$$\frac{C}{R} = \frac{K(s+1)(s+2)}{(s+1)^2 + K(s+2)} = \frac{K(s+1)(s+2)}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)}$$

La gráfica del lugar de las raíces para este ejemplo es la misma del ejemplo 13.9. En consecuencia, para $K = 2$, $\alpha_1 = 2 + j$, y $\alpha_2 = 2 - j$. Así

$$\frac{C}{R} = \frac{2(s+1)(s+2)}{(s+2+j)(s+2-j)}$$

EJEMPLO 13.11. Para el sistema discreto con $GH(z) = K/z(z-1)$, en la figura 13-15 se muestra la gráfica del lugar de las raíces para $K > 0$. Para $K = 0.25$, las raíces están en $z = 0.5$, y la función de transferencia en malla cerrada es

$$\frac{C}{R} = \frac{0.25}{(z-0.5)^2}$$

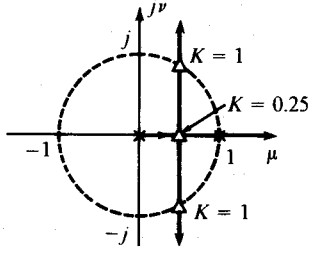


Figura 13-15

13.11 Márgenes de ganancia y de fase a partir del lugar de las raíces

El **margen de ganancia** es el factor por el cual puede multiplicarse el factor de ganancia K antes que el sistema en malla cerrada se vuelva inestable. Puede determinarse a partir del lugar de las raíces utilizando la siguiente fórmula:

$$\text{margen de ganancia} = \frac{\text{valor de } K \text{ en el límite de estabilidad}}{\text{valor de diseño para } K} \qquad (13.16)$$

en donde el límite de estabilidad es el eje $j\omega$ en el plano s, o el círculo unitario en el plano z. Si el lugar de las raíces no atraviesa el límite de estabilidad, el margen de ganancia es infinito.

EJEMPLO 13.12. Considere el sistema continuo de la figura 13-16. El valor de diseño para el factor de ganancia es 8, que produce los polos de la malla cerrada (marcados con triángulos pequeños) que se muestran en el lugar de las raíces, de la figura 13-17. El factor de ganancia en el corte del eje $j\omega$ es 64, de aquí que el margen de ganancia para este sistema sea $64/8 = 8$.

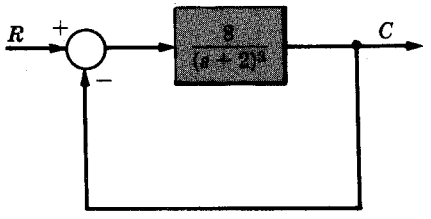


Figura 13-16

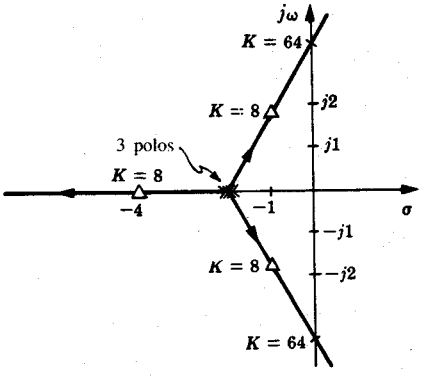


Figura 13-17

EJEMPLO 13.13. El lugar de las raíces para el sistema discreto en el tiempo del ejemplo 13.11 cruza el límite de estabilidad (el círculo unitario) para $K = 1$. Para un valor de diseño de $K = 0.25$, el margen de ganancia es $1/0.25 = 4$.

El **margen de fase** también puede determinarse a partir del lugar de las raíces. En este caso es necesario encontrar el punto ω_1 en el límite de estabilidad, en el cual $|GH| = 1$ para el valor de diseño de K; es decir,

$$|D(\omega_1)/N(\omega_1)| = K_{diseño}$$

Usualmente es necesario emplear un procedimiento de ensayo y error para localizar ω_1. Entonces el margen de fase se calcula a partir del arg $GH(\omega_1)$, como

$$\phi_{MF} = [180° + \arg GH(\omega_1)] \text{ grados} \qquad (13.17)$$

EJEMPLO 13.14. Para el sistema del ejemplo 13.12, $|GH(\omega_1)| = |8/(j\omega_1 + 2)^3| \equiv 1$ cuando $\omega_1 = 0$; el ángulo de fase de $GH(0)$ es 0°. En consecuencia el margen de fase es 180°.

EJEMPLO 13.15. Para el sistema continuo de la figura 13-18, el lugar de las raíces se muestra en la figura 13-19. El punto sobre el eje $j\omega$ para el cual $|GH(\omega_1)| = |24/j\omega_1(j\omega_1 + 4)^2| \equiv 1$ está en $\omega_1 = 1.35$; el ángulo de $GH(1.35)$ es $-129.6°$. En consecuencia el margen de fase es $\phi_{MF} = 180° - 129.6° = 50.4°$.

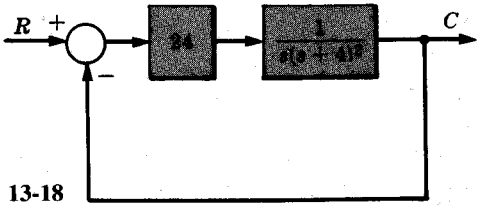


Figura 13-18

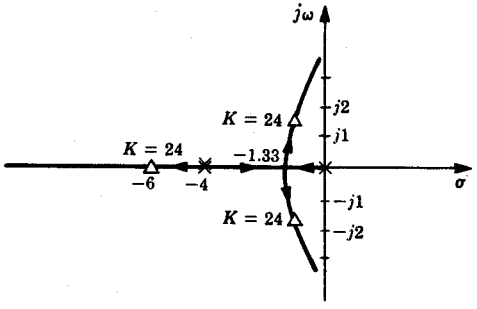


Figura 13-19

13.12 Relación de amortiguación a partir del lugar de las raíces para sistemas continuos

El factor de ganancia K requerido para dar una relación de amortiguación ζ específica (o viceversa) para el sistema continuo de segundo orden

$$GH = \frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)} \qquad K, p_1, p_2 > 0$$

se determina de manera fácil a partir del lugar de las raíces. Simplemente trace una línea desde el origen con un ángulo de más o menos θ con el eje real negativo, en donde

$$\theta = \cos^{-1}\zeta \tag{13.18}$$

(*Véase* la sección 4.13). El factor de ganancia en el punto de intersección con el lugar de las raíces es el valor requerido de K. Este procedimiento puede aplicarse a cualquier par de polos conjugados complejos, para sistemas de segundo orden o de orden superior. Mediante este procedimiento, para sistemas de orden superior, la relación de amortiguación determinada para un *par específico* de polos complejos no necesariamente determina la amortiguación (constante de tiempo predominante) del sistema.

EJEMPLO 13.16. Considere el sistema de tercer orden del ejemplo 13.15. La relación de amortiguación ζ de los *polos complejos* para $K = 24$ se determina de manera fácil al trazar una línea desde el origen hasta el punto sobre el lugar de las raíces donde $K = 24$, como se muestra en la figura 13-20. El ángulo θ medido es 60°, por tanto

$$\zeta = \cos\theta = 0.5$$

Este valor de ζ es una buena aproximación de la amortiguación del sistema de tercer orden con $K = 24$ porque el polo complejo domina la respuesta.

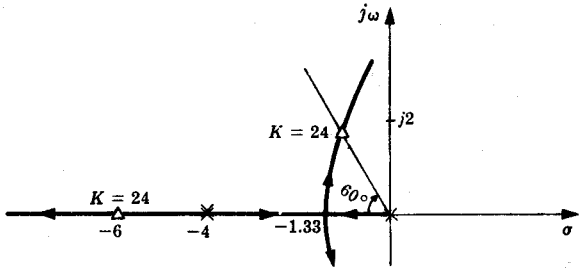


Figura 13-20

Problemas resueltos

Variación de los polos de un sistema en malla cerrada

13.1. Determine la función de transferencia en malla cerrada y la ecuación característica del sistema de control con retroalimentación unitaria negativa cuya función de transferencia en malla abierta es $G = K(s + 2)/(s + 1)(s + 4)$.

La función de transferencia en malla cerrada es

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+G} = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+4)+K(s+2)}$$

La ecuación característica se obtiene al igualar a cero el polinomio del denominador:

$$(s+1)(s+4)+K(s+2)=0$$

13.2. ¿Cómo se determinarían los polos de la malla cerrada del sistema del problema 13.1 para $K = 2$ a partir de su gráfica del lugar de las raíces?

El lugar de las raíces es una gráfica de los polos de la malla cerrada de un sistema con retroalimentación en función de K. En consecuencia los polos de la malla cerrada para $K = 2$ se determinan mediante los puntos del lugar de las raíces que correspondan a $K = 2$ (un punto en cada rama del lugar).

13.3. ¿Cómo puede emplearse un lugar de las raíces para factorizar el polinomio $s^2 + 6s + 18$?

Puesto que, según la ecuación *(13.1)*, el lugar de las raíces es una gráfica de las raíces de la ecuación característica de un sistema en función de su factor de ganancia en malla abierta, las raíces del polinomio anterior pueden determinarse a partir del lugar de las raíces de cualquier sistema cuyo polinomio característico sea equivalente a éste para algún valor de K. Por ejemplo, el lugar de las raíces para $GH = K/s(s + 6)$ factoriza el polinomio $s^2 + 6s + K$. Para $K = 18$, este polinomio es equivalente al que deseamos factorizar. De este modo, las raíces deseadas se localizan sobre este lugar de las raíces en los puntos correspondientes a $K = 18$.

Nótese que podrían escogerse otras formas para GH, tales como $GH = K/(s + 2)(s + 4)$ cuyo polinomio característico en malla cerrada corresponde al que deseamos factorizar, pero ahora para $K = 10$.

Criterios de ángulo y de magnitud

13.4. Demuestre que el punto $p_1 = -0.5$ satisface los criterios de ángulo, ecuación (*13.4*), y de magnitud, ecuación (*13.5*), cuando $K = 1.5$ en la función de transferencia en malla abierta del ejemplo 13.1.

$$\arg GH(p_1) = \arg\frac{K(p_1+1)}{p_1(p_1+2)} = \arg\frac{1.5(0.5)}{-0.5(1.5)} = 180^\circ \qquad |GH(p_1)| = \left|\frac{1.5(0.5)}{-0.5(1.5)}\right| = 1$$

o

$$\left|\frac{D(p_1)}{N(p_1)}\right| = \left|\frac{-0.5(1.5)}{0.5}\right| = 1.5 = K$$

Así, como se ilustró en la gráfica del lugar de las raíces del ejemplo 13.1, el punto $p_1 = -0.5$ se encuentra sobre el lugar de las raíces, y es un polo de la malla cerrada para $K = 1.5$.

13.5. Determine el ángulo y la magnitud de $GH(j2)$ para $GH = K/s(s + 2)^2$. ¿Qué valor de K satisface $|GH(j2)| = 1$?

$$GH(j2) = \frac{K}{j2(j2+2)^2} \qquad \arg GH(j2) = \begin{cases} -180^\circ & \text{para } K>0 \\ 0^\circ & \text{para } K<0 \end{cases} \qquad |GH(j2)| = \frac{|K|}{2(8)} = \frac{|K|}{16}$$

y para $|GH(j2)| = 1$ es necesario que $|K| = 16$.

13.6. Ilustre la composición gráfica de arg $GH(j2)$ y de $|GH(j2)|$ del problema 13.5.

$$\arg GH(j2) = -90^\circ - 45^\circ - 45^\circ = -180^\circ \qquad |GH(j2)| = \frac{|K|}{2(2\sqrt{2})^2} = \frac{|K|}{16}$$

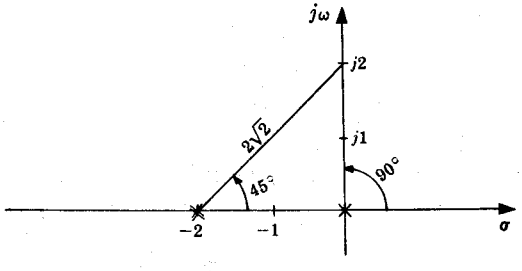


Figura 13-21

13.7. Demuestre que el punto $p_1 = -1 + j\sqrt{3}$ está en el lugar de las raíces para

$$GH(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+4)} \qquad K > 0$$

y determine K en este punto.

$$\arg \frac{N(p_1)}{D(p_1)} = \arg \frac{1}{j\sqrt{3}(1+j\sqrt{3})(3+j\sqrt{3})} = -90° - 60° - 30° = -180°$$

El criterio de ángulo, ecuación (*13.4b*), se satisface entonces para $K > 0$, y el punto $p_1 = -1 + j\sqrt{3}$ está en el lugar de las raíces. A partir de la ecuación (*13.5*),

$$K = \left| \frac{j\sqrt{3}(1+j\sqrt{3})(3+j\sqrt{3})}{1} \right| = \sqrt{3(4)12} = 12$$

Número de lugares

13.8. ¿Por qué el número de lugares debe ser igual al número de polos de la malla abierta para $m \leq n$?

Cada rama del lugar de las raíces representa el lugar geométrico de un polo de la malla cerrada. En consecuencia debe haber tantas ramas o lugares como polos haya en la malla cerrada. Puesto que el número de polos de la malla cerrada es igual al número de polos de la malla abierta para $m \leq n$, el número de lugares debe ser igual al número de polos de la malla abierta.

13.9. ¿Cuántos lugares hay en el lugar de las raíces para

$$GH(z) = \frac{K(z+\frac{1}{3})(z+\frac{1}{2})}{z(z+\frac{1}{2}+j/2)(z-\frac{1}{2}-j/2)}$$

Puesto que el número de polos de la malla abierta es tres, hay tres lugares en la gráfica del lugar de las raíces.

Lugares sobre el eje real

13.10. Verifique las reglas de los lugares sobre el eje real.

Para cualquier punto sobre el eje real, 0° ó 180° son los ángulos con que cualquier polo o cero sobre el eje real contribuye al arg GH, dependiendo de si el punto está o no a la derecha o a la izquierda del polo o del cero. El ángulo total con que un par de polos o ceros complejos contribuyen al arg $GH(s)$ es cero porque

$$\arg(s + \sigma_1 + j\omega_1) + \arg(s + \sigma_1 - j\omega_1) = 0$$

para todos los valores reales de s. Entonces, el arg $GH(s)$ para valores reales de s ($s = \sigma$) puede escribirse como

$$\arg GH(\sigma) = 180n_d + \arg K$$

en donde n_d es el número total de polos y ceros finitos a la derecha de σ Para satisfacer el criterio de ángulo, n_d debe ser impar para K positivo, y par para K negativo. Así, para $K > 0$, los puntos del lugar de las raíces sobre el eje real se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros finitos; y para $K < 0$, los puntos del lugar de las raíces sobre el eje real se encuentran a la izquierda de un número par de polos y ceros finitos.

13.11. Determine qué partes del eje real están en el lugar de las raíces de

$$GH = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3+j)(s+3-j)} \qquad K > 0$$

Los puntos en el eje real que se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros finitos, son únicamente los puntos entre -1 y -2. Entonces, mediante la regla para $K > 0$, sólo la parte del eje real entre -1 y -2 se encuentra en el lugar de las raíces.

13.12. ¿Qué partes del eje real están en el lugar de las raíces para

$$GH = \frac{K}{s(s+1)^2(s+2)} \qquad K > 0$$

Los puntos sobre el eje real entre 0 y -1 y entre -1, y -2, se encuentran a la izquierda de un número impar de polos y ceros, y por tanto están en el lugar de las raíces para $K > 0$.

Asíntotas

13.13. Verifique que los ángulos de las asíntotas están dados por

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{(2l+1)180}{n-m} \text{ grados} & \text{para } K > 0 \\ \dfrac{(2l)180}{n-m} \text{ grados} & \text{para } K < 0 \end{cases} \qquad (13.7)$$

Para los puntos s lejos del origen en el plano s, el ángulo con que cada uno de los m ceros contribuye al arg GH es

$$\arg(s + z_i)\big|_{|s| \gg |z_i|} \cong \arg(s)$$

De manera similar, el ángulo con que cada uno de los n polos contribuye al arg GH es aproximadamente igual a $-\arg(s)$. En consecuencia

$$\arg\left[\frac{N(s)}{D(s)}\right] \cong -(n-m)\cdot\arg(s) = -(n-m)\beta$$

en donde $\beta \equiv \arg(s)$. Para que s esté en el lugar de las raíces, debe satisfacerse el criterio de ángulo, ecuación (*13.4b*). Así

$$\arg\left[\frac{N(s_1)}{D(s_1)}\right] = -(n-m)\beta = \begin{cases} (2l+1)\pi & \text{para } K>0 \\ (2l)\pi & \text{para } K<0 \end{cases}$$

y, puesto que $\pm\pi$ radianes ($\pm$ 180°) son los mismos ángulos en el plano s, entonces

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{(2l+1)180}{n-m} \text{ grados} & \text{para } K>0 \\ \dfrac{(2l)180}{n-m} \text{ grados} & \text{para } K<0 \end{cases}$$

La prueba es similar para el plano z.

13.14. Demuestre que el centro de asíntotas está dado por

$$\sigma_c = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m} \tag{13.6}$$

Los puntos en el lugar de las raíces satisfacen la ecuación característica $D + KN = 0$, o

$$s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_0 + K\left(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_0\right) = 0$$

Dividiendo por el polinomio del numerador $N(s)$, se obtiene

$$s^{n-m} + (b_{n-1} - a_{m-1})s^{n-m-1} + \cdots + K = 0$$

(lo mismo para el plano z, remplazando s por z). Cuando el primer coeficiente de un polinomio es la unidad, el segundo coeficiente es igual a menos la suma de las raíces (*véase* el problema 5.26). Así, a partir de $D(s) = 0$, $b_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} p_i$. Para $N(s) = 0$, $a_{m-1} = \sum_{i=1}^{m} z_i$; y $-(b_{n-1} - a_{m-1})$ es igual a la suma de las $n - m$ raíces de la ecuación característica.

Ahora, para valores grandes de K y distancias del origen igualmente grandes, estas $n - m$ raíces se aproximan a las líneas rectas asíntotas y; a lo largo de estas asíntotas, la suma de las $n - m$ raíces es igual a $-(b_{n-1} - a_{m-1})$. Puesto que $b_{n-1} - a_{m-1}$ es un número real, las asíntotas deben intersecarse en un punto sobre el eje real. El centro de asíntotas está dado entonces por el punto en el eje real, en donde $n - m$ raíces iguales se suman hasta $-(b_{n-1} - a_{m-1})$. Así

$$\sigma_c = -\frac{b_{n-1} - a_{m-1}}{n-m} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

Para una prueba más detallada, *véase* la referencia [6].

13.15. Encuentre los ángulos y el centro, y dibuje las asíntotas para

$$GH = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3+j)(s+3-j)(s+4)} \qquad K > 0$$

El centro de asíntotas es

$$\sigma_c = -\frac{1+3+j+3-j+4-2}{4-1} = -3$$

Hay tres asíntotas localizadas en los ángulos de $\beta = 60°$, $180°$ y $300°$, como se muestra en la figura 13-22.

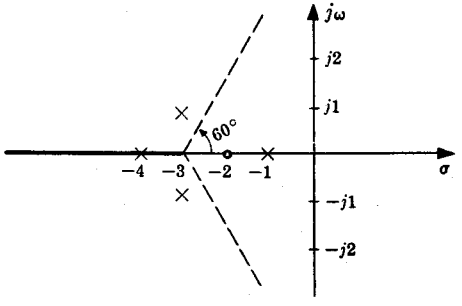


Figura 13-22

13.16. Dibuje las asíntotas para $K > 0$ y $K < 0$, para

$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}$$

El centro de asíntotas es $\sigma_c = -(0 + 2 + 1 + j + 1 - j)/4 = -1$.

Para $K > 0$, los ángulos de las asíntotas son $\beta = 45°$, $135°$, $225°$ y $315°$, como se muestra en la figura 13-23.

Para $K < 0$, los ángulos de las asíntotas son $\beta = 0°$, $90°$, $180°$ y $270°$, como se muestra en la figura 13-24.

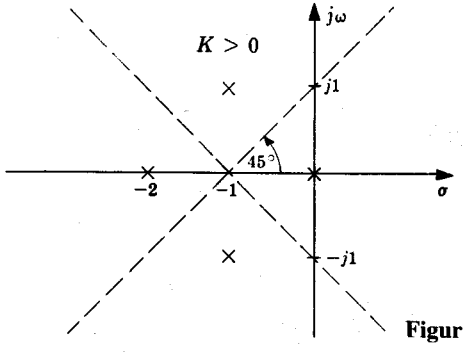


Figura 13-23

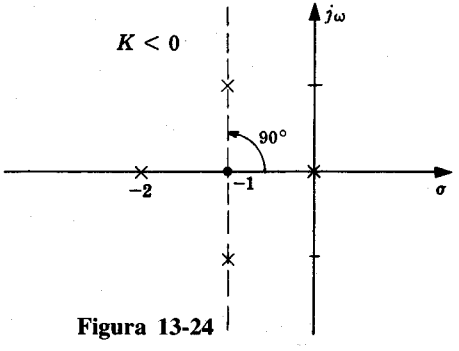


Figura 13-24

Puntos de separación

13.17. Demuestre que un punto de separación σ_s satisface

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\sigma_s + p_i)} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\sigma_s + z_i)} \tag{13.8}$$

Un punto de separación es un punto sobre el eje real en donde el factor de ganancia K a lo largo de la parte del eje real del lugar de las raíces es un máximo para los polos que se alejan del eje real, o un mínimo para los polos que se acercan al eje real (*véase* la sección 13.2.). El factor de ganancia a lo largo del lugar de las raíces está dado por

$$|K| = \left| \frac{D}{N} \right| \tag{13.5}$$

En el eje real, $s = \sigma$ (o $z = \mu$) y los signos de magnitud pueden cancelarse porque $D(\sigma)$ y $N(\sigma)$ son reales. Entonces

$$K = \frac{D(\sigma)}{N(\sigma)}$$

Para encontrar el valor de σ para el cual K es un máximo o un mínimo, se iguala a cero la derivada de K con respecto a σ:

$$\frac{dK}{d\sigma} = \frac{d}{d\sigma}\left[\frac{(\sigma + p_1) \cdots (\sigma + p_n)}{(\sigma + z_1) \cdots (\sigma + z_m)} \right] = 0$$

Por derivación y factorización repetidas, ésta puede escribirse como

$$\frac{dK}{d\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\sigma + p_i)} \left[\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)} \right] - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(\sigma + z_i)} \left[\frac{D(\sigma)}{N(\sigma)} \right] = 0$$

Finalmente, al dividir ambos lados por $D(\sigma)/N(\sigma)$ se produce el resultado deseado.

13.18. Determine el punto de separación para $GH = K/s(s + 3)^2$.

El punto de separación satisface

$$\frac{1}{\sigma_s} + \frac{1}{\sigma_s + 3} + \frac{1}{\sigma_s + 3} = 0$$

de la cual $\sigma_s = -1$.

13.19. Encuentre el punto de separación para

$$GH = \frac{K(s + 2)}{(s + 1 + j\sqrt{3})(s + 1 - j\sqrt{3})}$$

A partir de la ecuación (*13.8*),

$$\frac{1}{\sigma_s+1+j\sqrt{3}}+\frac{1}{\sigma_s+1-j\sqrt{3}}=\frac{1}{\sigma_s+2}$$

lo que nos da $\sigma_s^2+4\sigma_s=0$. Esta ecuación tiene las soluciones $\sigma_s=0$ y $\sigma_s=-4$; $\sigma_s=-4$ es el punto de separación para $K>0$, y $\sigma_s=0$ es el punto de separación para $K<0$, como se muestra en la figura 13-25.

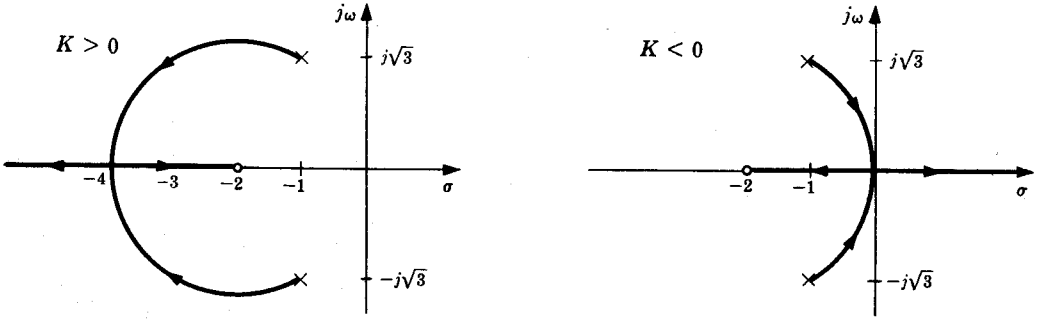


Figura 13-25

13.20. Encuentre el punto de separación entre 0 y -1 para

$$GH=\frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$$

El punto de separación debe satisfacer

$$\frac{1}{\sigma_s}+\frac{1}{(\sigma_s+1)}+\frac{1}{(\sigma_s+3)}+\frac{1}{(\sigma_s+4)}=0$$

Si se simplificara esta ecuación, se obtendría un polinomio de tercer orden. Para evitar la resolución de un polinomio de tercer orden; puede utilizarse el siguiente procedimiento. Como primera aproximación, suponemos $\sigma_s=-0.5$ y utilizamos este valor en los dos términos para los polos más alejados del punto de separación. Entonces

$$\frac{1}{\sigma_s}+\frac{1}{\sigma_s+1}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.5}=0$$

la cual se simplifica a $\sigma_s^2+3.92\sigma_s+1.46=0$, y tiene la raíz $\sigma_s=-0.43$ entre 0 y -1. Este valor se utiliza para obtener una mejor aproximación, como sigue:

$$\frac{1}{\sigma_s}+\frac{1}{\sigma_s+1}+\frac{1}{2.57}+\frac{1}{3.57}=0 \qquad \sigma_s^2+3.99\sigma_s+1.496=0 \qquad \sigma_s=-0.424$$

El segundo cálculo resultó ser un valor no muy diferente del primero. A menudo puede suceder que la primera aproximación produzca un valor bastante exacto solamente con un cálculo.

Angulos de salida y de llegada

13.21. Demuestre que el ángulo de salida del lugar de las raíces de un polo complejo está dado por

$$\theta_p = 180° + \arg GH' \qquad (13.9)$$

Considere un círculo de radio infinitesimalmente pequeño alrededor del polo complejo. Con claridad puede verse que el ángulo de fase arg GH' de GH es constante alrededor de este círculo, despreciando la contribución del polo complejo. Si θ_P representa el ángulo de salida, el ángulo de fase total de GH en el punto sobre el círculo en donde se cruza con el lugar de las raíces es

$$\arg GH = \arg GH' - \theta_P$$

puesto que $-\theta_P$ es el ángulo de fase con que el polo complejo contribuye al arg GH. Para satisfacer el criterio del ángulo, el arg GH = arg $GH' - \theta_P = 180°$, o $\theta_P = 180° + \arg GH'$, puesto que $+180°$ y $-180°$ son equivalentes.

13.22. Determine la relación entre el ángulo de salida de un polo complejo para $K > 0$ y $K < 0$.

Puesto que arg GH' cambia en 180° si K cambia de un número positivo a uno negativo, el ángulo de partida para $K < 0$ difiere en 180° del ángulo de partida para $K > 0$.

13.23. Demuestre que el ángulo de llegada a un cero complejo satisface

$$\theta_{LL} = 180° - \arg GH'' \qquad (13.10)$$

De la misma manera que en la solución del problema 13.21, el ángulo de fase de GH en la vecindad del cero complejo está dado por arg GH = arg $GH'' + \theta_{LL}$, puesto que θ_{LL} es el ángulo de fase con que el cero complejo contribuye al arg GH. Entonces, aplicando el criterio de ángulo se produce $\theta_{LL} = 180° - \arg GH''$.

13.24. Determine gráficamente el arg GH' y calcule el ángulo de salida del lugar de las raíces del polo complejo en $s = -2 + j$ para

$$GH = \frac{K}{(s+1)(s+2-j)(s+2+j)} \qquad K > 0$$

A partir de la figura 13-26, el arg $GH' = -135° - 90° = -225°$; y $\theta_P = 180° - 225° = -45°$, como se muestra en la figura 13-27.

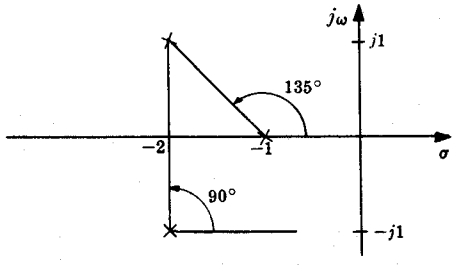


Figura 13-26

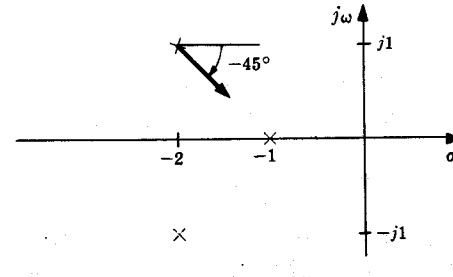


Figura 13-27

13.25. Determine los ángulos de partida de los polos complejos y los ángulos de llegada a los ceros complejos, para la función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{K(s+1+j)(s+1-j)}{s(s+2j)(s-2j)} \qquad K > 0$$

Para el polo complejo en $s = 2j$,

$$\arg GH' = 45° + 71.6° - 90° - 90° = -63.4° \qquad \text{y} \qquad \theta_D = 180° - 63.4° = 116.6°$$

Puesto que el lugar de las raíces es simétrico alrededor del eje real, el ángulo de salida del polo en $s = -2j$ es $-116.6°$. Para el cero complejo en $s = -1 + j$,

$$\arg GH'' = 90° - 108.4° - 135° - 225° = -18.4° \qquad \text{y} \qquad \theta_{LL} = 180° - (-18.4°) = 198.4°$$

Así, el ángulo de llegada al cero complejo $s = -1 - j$ es $\theta_{LL} = -198.4°$.

Construcción del lugar de las raíces

13.26. Construya el lugar de las raíces para

$$GH = \frac{K}{(s+1)(s+2-j)(s+2+j)} \qquad K > 0$$

El eje real desde -1 hasta $-\infty$ está sobre el lugar de las raíces. El centro de asíntotas está en

$$\sigma_c = \frac{-1-2+j-2-j}{3} = -1.67$$

Hay tres asíntotas ($n - m = 3$), localizadas en ángulos de 60°, 180° y 300°. El ángulo de salida del polo complejo en $s = -2 + j$, calculado en el problema 13.24, es $-45°$. En la figura 13.28 se muestra un esbozo del lugar de las raíces resultante. Al verificar el criterio de ángulo en varios puntos a lo largo de las ramas dibujadas, se obtiene un diagrama exacto del lugar de las raíces, ajustando la localización de las ramas si es necesario, y aplicando luego el criterio de magnitud para determinar los valores de K en los puntos seleccionados a lo largo de las ramas. En la figura 13-29 se muestra el lugar de las raíces completo.

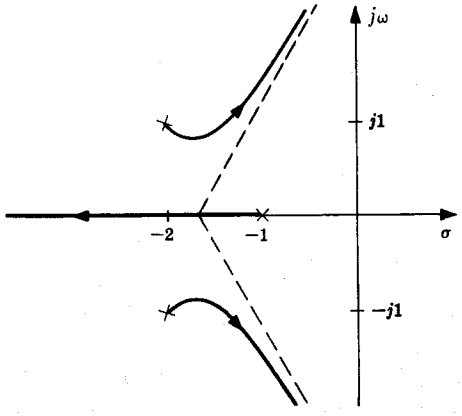


Figura 13-28

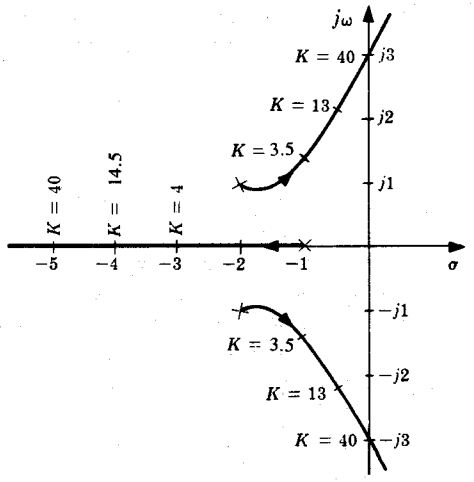


Figura 13-29

13.27. Dibuje las ramas del lugar de las raíces para la función de transferencia

$$GH = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3+j)(s+3-j)} \qquad K > 0$$

El eje real entre -1 y -2 está sobre el lugar de las raíces (problema 13.11). Hay dos asíntotas con ángulos de 90° y 270°. El centro de asíntotas puede calcularse fácilmente como $\sigma_c = -2.5$, y el ángulo de partida del polo complejo en $s = -3 + j$, como 72°. Por simetría, el ángulo de partida del polo en $-3 - j$ es $-72°$. Las ramas del lugar de las raíces pueden dibujarse entonces como se muestra en la figura 13-30.

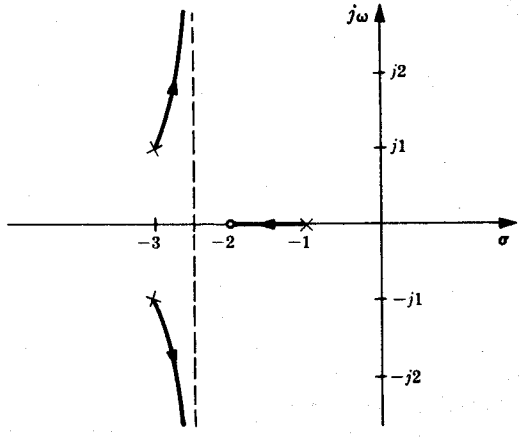


Figura 13-30

13.28. Construya el lugar de las raíces para $K > 0$ y $K < 0$, para la función de transferencia

$$GH = \frac{K}{s(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Para esta función de transferencia el centro de asíntotas es simplemente $\sigma_c = -2$, y $n - m = 4$. Por tanto para $K > 0$, las asíntotas tienen ángulos de 45°, 135°, 225° y 315°. Las secciones del eje real entre 0 y -1, y entre -3 y -4, están en el lugar de las raíces para $K > 0$, y en el problema 13.20 se determinó que hay un punto de separación localizado en $\sigma_s = -0.424$. A partir de la simetría de localización de los polos, otro punto de separación se localiza en -3.576. Este puede verificarse al sustituir este valor en la relación para el punto de separación, ecuación (*13.8*). En la figura 13-31 se muestra el lugar de las raíces completo para $K > 0$.

Para $K < 0$, las asíntotas tienen ángulos de 0°, 90°, 180° y 270°. En este caso las partes del eje real entre ∞ y 0, entre -1 y -3, y entre -4 y $-\infty$, están en el lugar de las raíces. Solamente hay un punto de separación, localizado en -2. En la figura 13-32 se muestra el lugar de las raíces completo para $K < 0$.

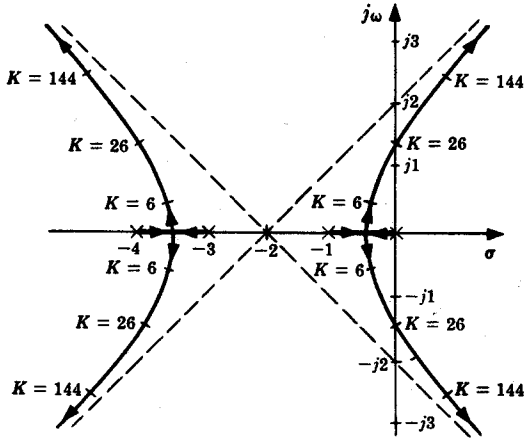


Figura 13-31

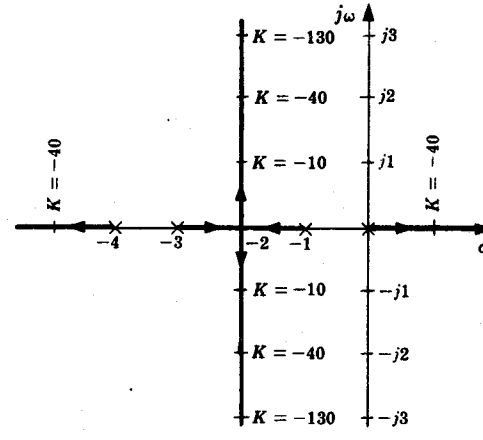


Figura 13-32

13.29. Construya el lugar de las raíces para $K > 0$ para la función de transferencia del sistema discreto

$$GH(z) = \frac{K(z-0.5)}{(z-1)^2}$$

Este lugar de las raíces tiene dos lugares geométricos y una asíntota. El lugar de las raíces está en el eje real para $z < 0.5$. Los puntos de separación están en $z = 0$ y $z = 1$. En la figura 13-33 se muestra el lugar de las raíces completo.

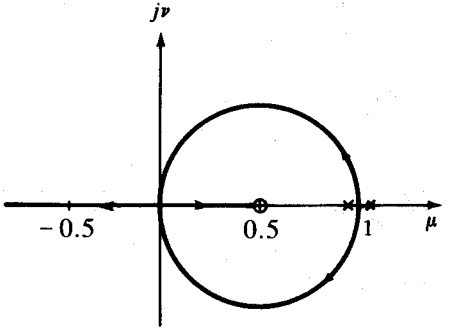


Figura 13-33

13.30. Construya el lugar de las raíces para $K > 0$ para la función de transferencia del sistema discreto

$$GH(z) = \frac{K}{(z + 0.5)(z - 1.5)}$$

Este lugar de las raíces tiene dos ramas y dos asíntotas. El punto de separación y el centro de asíntotas están en $z = 0.5$. En la figura 13-34 se muestra el lugar de las raíces.

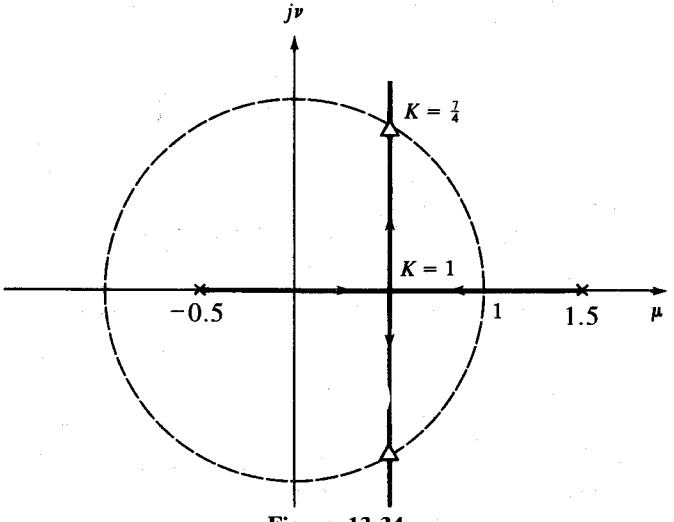


Figura 13-34

13.31. Construya el lugar de las raíces para $K > 0$ para el sistema discreto con $H = 1$ y función de transferencia directa

$$G(z) = \frac{K\left(z + \frac{1}{3}\right)(z + 1)}{z\left(z + \frac{1}{2}\right)(z - 1)}$$

El sistema tiene un polo más que ceros, así que el lugar de las raíces tiene sólo una asíntota a lo largo del eje real negativo. El lugar de las raíces está sobre el eje real entre 0 y 1, entre $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{1}{2}$, y a la izquierda de -1. Los puntos de separación están localizados entre 0 y 1, y a la izquierda de -1. Por ensayo y error (o solución por computador), los puntos de separación se encuentran en $z = 0.383$ y $z = -2.22$.

El lugar de las raíces es una elipse entre los puntos de separación en $z = 0.383$ y $z = -2.22$. El punto en el eje jv, en donde el arg $G(z) = -180°$, se encuentra que es $z = j\,0.85$ mediante el procedimiento de ensayo y error. De manera similar, el punto en la línea $z = -1 + jv$, en donde el arg $G(z) = -180°$, es $z = -1 + j1.26$. En la figura 13-35 se dibuja el lugar de las raíces. El factor de ganancia a lo largo del lugar de las raíces se determina de manera gráfica a partir del diagrama de polos y ceros, o de manera analítica al evaluar $G(z)$.

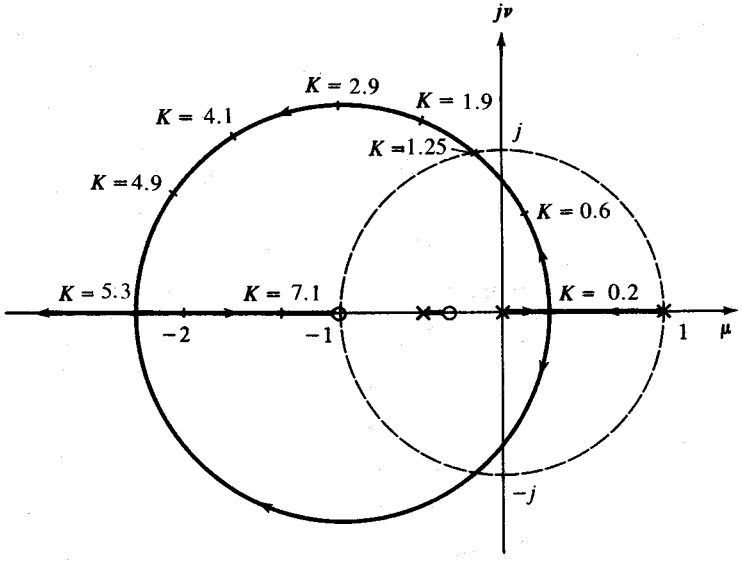


Figura 13-35

La función de transferencia en malla cerrada y la respuesta en el dominio del tiempo

13.32. Determine la función de transferencia en malla cerrada del sistema continuo del ejemplo 13.8 para $K = 48$, dadas las siguientes funciones de transferencia para H: *a*) $H = 1$, *b*) $H = 4/(s + 1)$, *c*) $H = (s + 1)/(s + 2)$.

A partir de la gráfica del lugar de las raíces del ejemplo 13.8, los polos de la malla cerrada para $K = 48$ están localizados en $s = -6$, $j2.83$ y $-j2.83$. Para $H = 1$,

$$G = \frac{48}{s(s+2)(s+4)} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{R} = \frac{GH}{1+GH} = \frac{48}{(s+6)(s-j2.83)(s+j2.83)}$$

Para $H = 4/(s+1)$,

$$G = \frac{12(s+1)}{s(s+2)(s+4)} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{R} = \frac{1}{H}\left(\frac{GH}{1+GH}\right) = \frac{12(s+1)}{(s+6)(s-j2.83)(s+j2.83)}$$

Para $H = (s+1)/(s+2)$,

$$G = \frac{48}{s(s+1)(s+4)} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{R} = \frac{48(s+2)}{(s+1)(s+6)(s-j2.83)(s+j2.83)}$$

Nótese que en este último caso hay cuatro polos en la malla cerrada, mientras que GH sólo tiene tres. Esto se debe a la cancelación de un polo de G con un cero de H.

13.33. Determine la respuesta paso unitario del sistema del ejemplo 13.1 con $K = 1.5$.

La función de transferencia en malla cerrada de este sistema es

$$\frac{C}{R} = \frac{1.5(s+1)}{(s+0.5)(s+3)}$$

Para $R = 1/s$,

$$C = \frac{1.5(s+1)}{s(s+0.5)(s+3)} = \frac{1}{s} + \frac{-0.6}{s+0.5} + \frac{-0.4}{s+3}$$

y la respuesta paso unitario es $\mathcal{L}^{-1}[C(s)] = c(t) = 1 - 0.6e^{-0.5t} - 0.4e^{-3t}$.

13.34. Determine la relación entre los ceros de la malla cerrada y los polos y ceros de G y H, suponiendo que no hay cancelaciones.

Hagamos $G = N_1/D_1$ y $H = N_2/D_2$, en donde N_1 y D_1 son los polinomios del numerador (los ceros) y del denominador (los polos) de G, y N_2 y D_2 son los polinomios del numerador y el denominador de H. Entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{G}{1+GH} = \frac{N_1 D_2}{D_1 D_2 + N_1 N_2}$$

De esta manera, los ceros de la malla cerrada son iguales a los ceros de G y a los polos de H.

Márgenes de ganancia y de fase

13.35. Encuentre el margen de ganancia del sistema del ejemplo 13.8 para $K = 6$.

El factor de ganancia en el cruce del eje $j\omega$ es 48, como se muestra en la figura 13-12. Por tanto el margen de ganancia es $48/6 = 8$.

13.36. Demuestre cómo puede utilizarse una tabla de Routh (sección 5.3) para determinar la frecuencia y la ganancia en el cruce con el eje $j\omega$.

En la sección 5.3 se destacó que una fila de ceros en la fila s^1 de la tabla de Routh indica que el polinomio tiene un par de raíces que satisfacen la ecuación auxiliar $As^2 + B = 0$, en donde A y B son

el primero y segundo elementos de la fila s^2. Si A y B tienen el mismo signo, las raíces de la ecuación auxiliar son imaginarias (sobre el eje $j\omega$). De esta manera, si se construye una tabla de Routh para la ecuación característica de un sistema, pueden determinarse los valores de K y ω correspondientes a los cruces con el eje $j\omega$. Por ejemplo, considere el sistema con función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{K}{s(s+2)^2}$$

La ecuación característica para este sistema es

$$s^3 + 4s^2 + 4s + K = 0$$

La tabla de Routh para el polinomio característico es

s^3	1	4
s^2	4	K
s^1	$(16-K)/4$	
s^0	K	

La fila s^1 es cero para $K = 16$. La ecuación auxiliar entonces se convierte en

$$4s^2 + 16 = 0$$

De esta manera, para $K = 16$ la ecuación característica tiene soluciones (polos de la malla cerrada) en $s = \pm j2$, y el lugar de las raíces cruza el eje $j\omega$ en $j2$.

13.37. Determine el margen de fase para el sistema del ejemplo 13.8 (figura 13-12) para $K = 6$.

El punto sobre el eje $j\omega$ para el cual $|GH(j\omega)| = 1$, se encuentra que es $j\,0.7$ mediante el procedimiento de ensayo y error. Entonces el arg $GH(j0.7)$ se calcula como $-120°$. Por tanto el margen de fase es $180° - 120° = 60°$.

13.38. ¿Es necesario construir totalmente el lugar de las raíces para determinar los márgenes de ganancia y de fase de un sistema?

No. Solamente se requiere un punto en el lugar de las raíces para determinar el margen de ganancia. Este punto, en ω_π, en donde el lugar de las raíces cruza el límite de estabilidad, puede determinarse por el procedimiento de ensayo y error, o mediante el uso de una tabla de Routh, como se describió en el problema 13.36. Para determinar el margen de fase sólo es necesario determinar el punto en el límite de estabilidad en donde $|GH(j\omega)| = 1$. Aunque no es necesaria la gráfica completa del lugar de las raíces, a menudo puede ser útil, especialmente en el caso de cruces múltiples del límite de estabilidad.

Relación de amortiguación a partir del lugar de las raíces para sistemas continuos

13.39. Verifique la ecuación (*13.18*).

Las raíces de $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$ son $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. Entonces

$$|s_1| = |s_2| = \sqrt{\zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} = \omega_n$$

y

$$\arg s_{1,2} = \mp \tan^{-1}\left(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta\right) \equiv 180° \pm \theta$$

o $s_{1,2} = \omega_n \angle 180° \pm \theta$. Así $\cos\theta = \zeta\omega_n/\omega_n = \zeta$.

13.40. Determine el valor positivo de la ganancia que resulta en una relación de amortiguación de 0.55 para los polos complejos en el lugar de las raíces que se muestra en la figura 13-12.

El ángulo de los polos deseados es $\theta = \cos^{-1} 0.55 = 56.6°$. Una línea trazada desde el origen y a un ángulo de 55.6° con el eje real negativo, interseca en $K = 7$ el lugar de las raíces de la figura 13-12.

13.41. Encuentre la relación de amortiguación de los polos complejos del problema 13.26 para $K = 3.5$.

Una línea trazada desde el lugar de las raíces con $K = 3.5$ hasta el origen hace un ángulo de 53° con el eje real negativo. De aquí que la relación de amortiguación de los polos complejos es $\zeta = \cos 53° = 0.6$.

Problemas suplementarios

13.42. Determine el ángulo y la magnitud de

$$GH = \frac{16(s+1)}{s(s+2)(s+4)}$$

en los siguientes puntos en el plano s: *a*) $s = j2$, *b*) $s = -2 + j2$, *c*) $s = -4 + j2$, *d*) $s = -6$, *e*) $s = -3$.

13.43. Determine el ángulo y la magnitud de

$$GH = \frac{20(s+10+j10)(s+10-j10)}{(s+10)(s+15)(s+25)}$$

en los siguientes puntos del plano s: *a*) $s = j10$, *b*) $s = j20$, *c*) $s = -10 + j20$, *d*) $s = -20 + j20$, *e*) $s = -15 + j5$.

13.44. Para cada función de transferencia, encuentre los puntos de separación en el lugar de las raíces:

a) $GH = \dfrac{K}{s(s+6)(s+8)}$, *b*) $GH = \dfrac{K(s+5)}{(s+2)(s+4)}$, *c*) $GH = \dfrac{K(s+1)}{s^2(s+9)}$.

13.45. Encuentre el ángulo de partida del lugar de las raíces del polo en $s = -10 + j10$ para

$$GH = \frac{K(s+8)}{(s+14)(s+10+j10)(s+10-j10)} \qquad K > 0$$

13.46. Encuentre el ángulo de salida del lugar de las raíces del polo en $s = -15 + j9$ para

$$GH = \frac{K}{(s+5)(s+10)(s+15+j9)(s+15-j9)} \qquad K > 0$$

13.47. Encuentre el ángulo de llegada del lugar de las raíces al cero en $s = -7 + j5$ para

$$GH = \frac{K(s+7+j5)(s+7-j5)}{(s+3)(s+5)(s+10)} \qquad K > 0$$

13.48. Construya el lugar de las raíces para $K > 0$ para la función de transferencia del problema 13.44*a*).

13.49. Construya el lugar de las raíces para $k > 0$ para la función de transferencia del problema 13.44*c*).

13.50. Construya el lugar de las raíces para $K > 0$ para la función de transferencia del problema 13.45.

13.51. Construya el lugar de las raíces para $K > 0$ para la función de transferencia del problema 13.46.

13.52. Determine los márgenes de ganancia y de fase para el sistema con la función de transferencia en malla abierta del problema 13.46, si el factor de ganancia K se iguala a 20.000.

Respuestas a algunos problemas suplementarios

13.42. *a*) $\arg GH = -99°$, $|GH| = 1.5$; *b*) $\arg GH = -153°$, $|GH| = 2.3$; *c*) $\arg GH = -232°$, $|GH| = 1.8$; *d*) $\arg GH = 0°$, $|GH| = 1.7$; *e*) $\arg GH = -180°$, $|GH| = 10.7$

13.43. *a*) $\arg GH = -38°$, $|GH| = 0.68$; *b*) $\arg GH = -40°$, $|GH| = 0.37$; *c*) $\arg GH = -41°$, $|GH| = 0.60$; *d*) $\arg GH = -56°$, $|GH| = 0.95$; *e*) $\arg GH = +80°$, $|GH| = 6.3$

13.44. *a*) $\sigma_s = -2.25, -7.07$; *b*) $\sigma_s = -3.27, -6.73$; *c*) $\sigma_s = 0, -3$

13.45. $\theta_P = 124°$

13.46. $\theta_P = 193°$

13.47. $\theta_{LL} = 28°$

13.52. Margen de ganancia = 3.7; Margen de fase = 102°

Capítulo 14

Diseño utilizando el lugar de las raíces

14.1 El problema de diseño

El método del lugar de las raíces puede resultar bastante efectivo en el diseño de sistemas de control con retroalimentación, continuos o discretos, porque ilustra gráficamente la variación de los polos en malla cerrada del sistema como una función del factor de ganancia K en malla abierta. En su forma más simple, el diseño se efectúa escogiendo un valor de K que produzca un comportamiento satisfactorio en malla cerrada. Esto se llama *compensación del factor de ganancia* (*véase* también la sección 12.2). Las especificaciones sobre los errores permisibles en estado estacionario usualmente toman la forma de un valor mínimo de K, expresado en términos de las constantes de error, por ejemplo K_p, K_v y K_a (Capítulo 9). Si no es posible cumplir todas las especificaciones usando la sola compensación del factor de ganancia, pueden agregarse al sistema otras formas de compensación para alterar el lugar de las raíces según sea necesario, por ejemplo con redes de atraso, de adelanto, de atraso-adelanto o controladores PID.

Para efectuar el diseño del sistema en los planos s ó z utilizando las técnicas del lugar de las raíces, es necesario interpretar las especificaciones del sistema en términos de las configuraciones deseadas de polos y ceros.

Los programas para computador digital que construyen el lugar de las raíces son muy útiles en el diseño de sistemas, al igual que para su análisis, como se indicó en el Capítulo 13.

EJEMPLO 14.1. Considérese el diseño de un sistema continuo con retroalimentación unitaria con la planta $G = K/(s + 1)(s + 3)$ y las siguientes especificaciones: 1) Sobretensión menor que el 20%, 2) $K_p \geq 4$, 3) tiempo de subida del 10% al 90% menor que 1 s.

En la figura 14-1 se presenta el lugar de las raíces para este sistema. Su función de transferencia en malla cerrada puede escribirse como

$$\frac{C}{R} = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

en donde ζ y ω_n pueden determinarse a partir del lugar de las raíces para un valor K dado. Para satisfacer la primera especificación, ζ debe ser mayor que 0.45 (*véase* la figura 3-4). Entonces, a partir del lugar de las raíces vemos que K debe ser menor que 16 (*véase* la sección 13.12). En este sistema, K_p está dada por $K/3$. Así, para satisfacer la segunda especificación, K debe ser mayor que 12. El tiempo de subida es función de ζ y de ω_n. Supóngase que se escoge un valor de prueba de $K = 13$. En este caso, $\zeta = 0.5$, $\omega_n = 4$, y el tiempo de subida es 0.5 s. En consecuencia, todas las especificaciones pueden cumplirse haciendo $K = 13$. Nótese que si la especificación de K_p fuera mayor que 5.33, o la especificación del tiempo de subida fuera menor que 0.34 s, todas las especificaciones no podrían cumplirse ajustando simplemente el factor de ganancia en malla abierta.

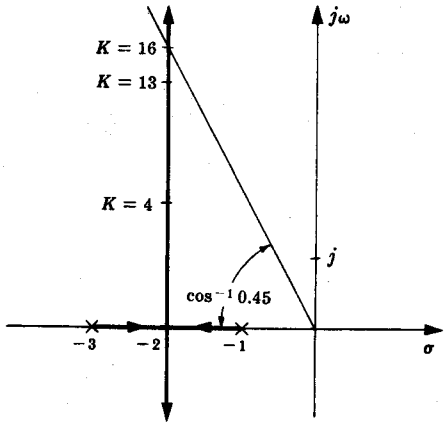


Figura 14-1

14.2 Compensación por cancelación

Si la configuración de polos y ceros de la planta es tal que las especificaciones del sistema no pueden cumplirse mediante un ajuste del factor de ganancia en malla abierta, puede agregarse un compensador en cascada más complicado, como se presenta en la figura 14-2, con el propósito de cancelar algunos o todos los polos y ceros de la planta. Debido a consideraciones de factibilidad, el compensador no debe tener más ceros que polos. En consecuencia, cuando los polos de la planta se cancelan por los ceros del compensador, éste agrega nuevos polos a la función de transferencia de la malla directa. La filosofía de esta técnica de compensación es entonces remplazar polos inconvenientes con polos convenientes.

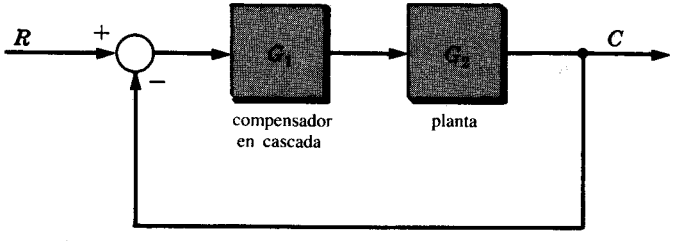


Figura 14-2

La dificultad encontrada al aplicar este esquema es que no siempre resulta aparente qué configuración de polos y ceros en malla abierta es conveniente desde el punto de vista de cumplir las especificaciones de desempeño en un sistema en malla cerrada.

Las siguientes son algunas situaciones en las cuales puede utilizarse con ventaja la compensación por cancelación:

1. Si las especificaciones de tiempo de subida o de ancho de banda del sistema no pueden cumplirse sin compensación, es útil cancelar los polos de baja frecuencia y remplazarlos por polos de alta frecuencia.

2. Si las especificaciones de los errores permisibles en estado estacionario no pueden cumplirse, podría cancelarse un polo de baja frecuencia y remplazarse por otro de más baja frecuencia, obteniéndose entonces una mayor ganancia de malla directa a frecuencias bajas.
3. Si ciertos polos con pequeñas razones de amortiguación están presentes en la función de transferencia de la planta, pueden cancelarse y remplazarse por polos que tengan mayores razones de amortiguación.

14.3 Compensación de fase: redes de adelanto y de atraso

A un sistema puede agregarse un compensador en cascada para alterar las características de fase de su función de transferencia en malla abierta, de tal modo que afecte favorablemente su desempeño. Estos efectos se trataron en el Capítulo 12, secciones 12.4 a 12.7, las cuales resumen los efectos generales de estas redes en el dominio de la frecuencia, para redes de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto, utilizando los diagramas polares.

En las figuras 14-3 y 14-4 se presentan los diagramas de polos y ceros de las redes de adelanto y de atraso de sistemas continuos. Nótese que una red de adelanto hace una contribución de fase positiva, y una red de atraso hace una negativa. Puede obtenerse una red de atraso-adelanto al combinar en serie, de manera apropiada, una red de atraso y otra de adelanto, o a partir de la construcción descrita en el problema 6.14.

Puesto que el lugar de las raíces del sistema compensado se determina mediante los puntos en el plano complejo, para los cuales el ángulo de fase de $G = G_1G_2$ es igual a $-180°$, las ramas del lugar de las raíces pueden moverse por medio de la selección adecuada del ángulo de fase con que contribuye el compensador. En general, el compensador por adelanto tiene el efecto de mover a la izquierda los lugares de las raíces.

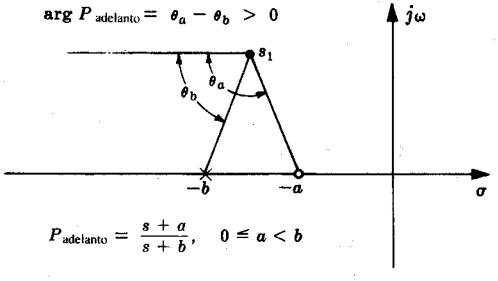


Figura 14-3

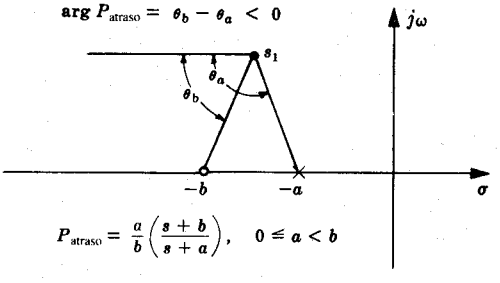


Figura 14-4

EJEMPLO 14.2 El compensador por adelanto de fase $G_1 = (s + 2)/(s + 8)$ altera el lugar de las raíces del sistema con planta $G_2 = K/(s + 1)^2$, como se ilustra en la figura 14-5.

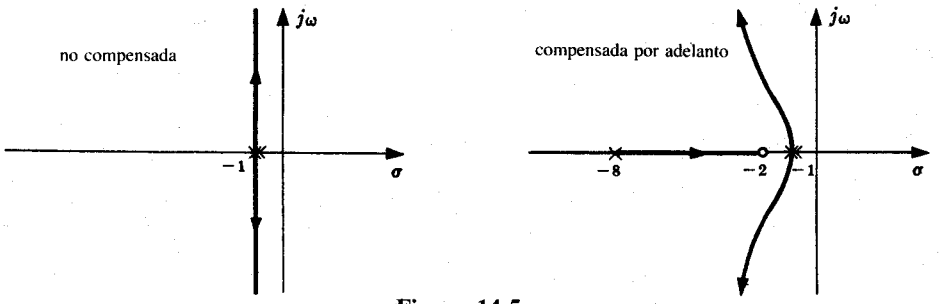


Figura 14-5

EJEMPLO 14.3. En la figura 14-6 se ilustra el uso de *compensación por atraso simple* (un polo en -1 y ningún cero) para alterar los ángulos de separación del lugar de las raíces de un par de polos complejos.

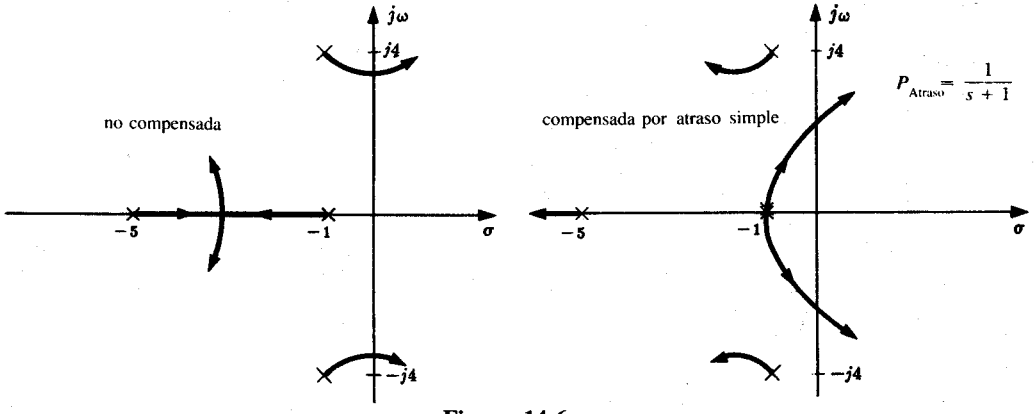


Figura 14-6

14.4 Compensación de magnitud y combinaciones de compensadores

Las redes de compensación pueden emplearse para alterar la característica de magnitud ($|(C/R)(\omega)|$) en malla cerrada de un sistema de control con retroalimentación. La característica de baja frecuencia puede modificarse mediante la adición de un par polo-cero de baja frecuencia, o **dipolo**, de tal manera que el comportamiento de alta frecuencia, prácticamente no se altera.

EJEMPLO 14.4. En la figura 14-7 se presenta el lugar de las raíces para el sistema continuo $GH = K/s(s + 2)^2$. Supongamos que este sistema tiene una respuesta transitoria satisfactoria con $K = 3$, pero la constante de error de velocidad resultante $K_v = 0.75$ es demasiado pequeña. Podemos incrementar K_v a 5 sin afectar seriamente la respuesta transitoria agregando el compensador $G_1 = (s + 0.1)/(s + 0.015)$, puesto que

$$K_v' = K_v G_1(0) = \frac{0.75(0.1)}{0.015} = 5$$

En la figura 14-8 se muestra el lugar de las raíces resultante. La parte de alta frecuencia del lugar de las raíces y la respuesta transitoria no se afectan de manera esencial, porque la función de transferencia en malla cerrada tiene un par polo-cero de baja frecuencia que se cancelan entre sí casi totalmente.

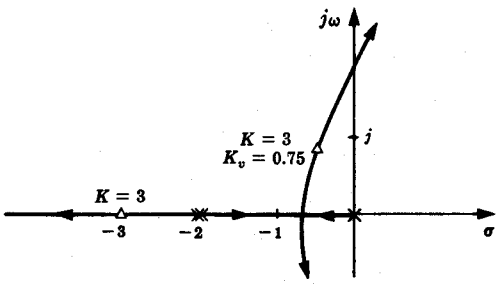


Figura 14-7

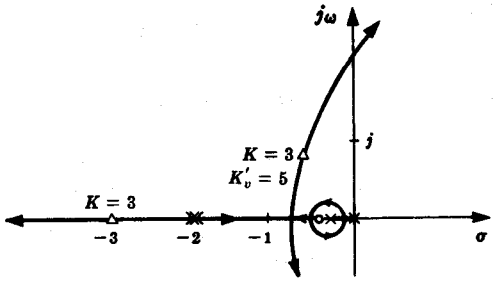


Figura 14-8

Como se muestra en la figura 14-9, un dipolo de baja frecuencia para la compensación de magnitud de un sistema continuo puede sintetizarse con el polo en el origen utilizando un compensador proporcional integral (PI), con la función de transferencia

$$G_1 = \frac{s + K_I}{s}$$

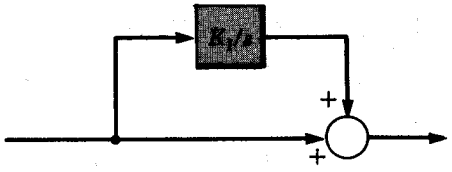


Figura 14-9

Algunas veces se necesitan combinaciones de varios esquemas de compensación para satisfacer requerimientos que competen a las especificaciones de desempeño de las respuestas transitoria y en estado estacionario, como se ilustra a continuación. Este ejemplo, resuelto por métodos del lugar de las raíces, es la repetición de un problema de diseño resuelto por los métodos de Nyquist en el ejemplo 12.7, y por los métodos de Bode en el ejemplo 16.6.

EJEMPLO 14.5. Nuestro objetivo es determinar un compensador apropiado $G_1(z)$ en el sistema discreto con retroalimentación unitaria, con

$$G_2(z) = \frac{3(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{8z(z+0.5)}$$

El sistema en malla cerrada resultante debe satisfacer las siguientes especificaciones de desempeño:

1. Error en estado estacionario menor que o igual a 0.2 para una entrada rampa unitaria
2. Margen de fase $= \phi_{MF} \geq 30°$.
3. Frecuencia de ganancia de cruce $\omega_1 \geq 10$ rad/s, con $T = 0.1$ s.

Para tener un error finito en estado estacionario con rampa unitaria, el sistema debe ser del tipo 1. La compensación entonces debe proporcionar un polo en $z = 1$. Considérese el compensador

$$G_1' = \frac{K_1}{z-1}$$

La función de transferencia de la malla directa se hace entonces

$$G_1'G_2(z) = \frac{3K_1(z+1)(z+\frac{1}{3})}{8(z-1)z(z+0.5)}$$

A partir de la sección 9.9, el coeficiente del error de velocidad es

$$K_v = \frac{3K_1(1+1)(1+\frac{1}{3})}{8(1)(1+0.5)} = 0.667K_1$$

Ahora, para que el sistema en estado estacionario tenga un error menor que 0.2, con entrada rampa unitaria, debe tenerse $K_v \geq 5$, o $K_1 \geq 7.5$. Para investigar los efectos de la ganancia agregada, considérese el lugar de las raíces para

$$G_1'G_2(z) = \frac{K(z+1)(z+\frac{1}{3})}{z(z+0.5)(z-1)}$$

en donde $K = 3K_1/8$. Este lugar de las raíces se construyó en el problema 13.31 y se repite en la figura 14-10.

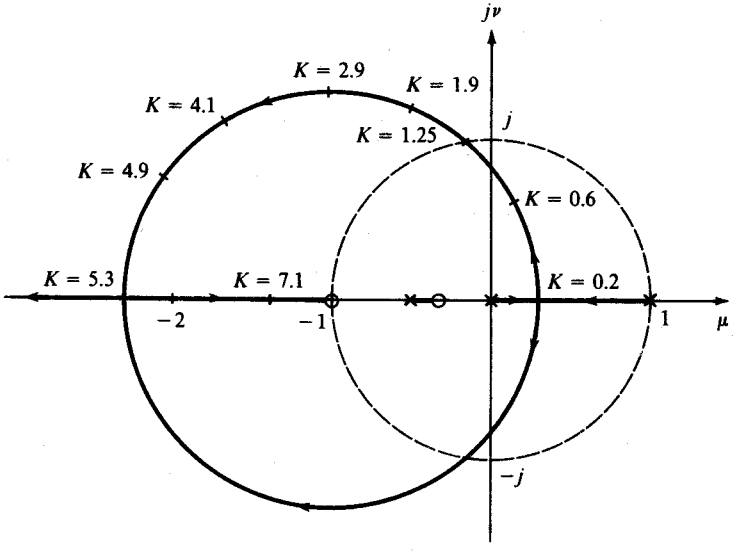


Figura 14-10

En el punto $z = -0.18 + j0.98$ en donde el lugar de las raíces cruza el círculo unitario, $\omega_\pi T = 1.75$ rad y $K = 1.25$ ($K_1 = 8K/3 = 3.33$). Puesto que ésta es menor que la ganancia $K_1 = 7.5$ necesaria para hacer $K_v = 5$, es insuficiente la compensación simple del factor de ganancia.

El paso siguiente es evaluar la magnitud y la fase de $G_1'G_2(z)$ a la frecuencia de cruce de ganancia mínima requerida, $\omega_1 = 10$, u $\omega_1 T = 1$ rad. Este es el punto $z = e^{j\omega T} = e^j$ sobre el círculo unitario. En este punto,

$|G_1'G_2(e^j)| = 1.66K$ y el $\arg G_1' G_2(e^j) = -142.5°$. Si se ajustara la ganancia K de tal modo que $|G_1'G_2(e^j)| = 1$, es decir, $K = 0.6$, el margen de fase sería $(180 - 142.5)° = 37.5°$ y se cumpliría con el requerimiento de 30°. Ello requiere que $K_1 = 8K/3 = 1.6$, y la constante de velocidad se hace $K_v = 0.667K_1 = 1.067$.

Para completar el diseño debe agregarse la ganancia adicional para aumentar la constante de velocidad hasta el valor requerido de 5 a bajas frecuencias, sin alterar significativamente las características de alta frecuencia ya obtenidas. Esto requiere una ganancia adicional de $5/1.067 = 4.69$, la cual puede suministrarse con un compensador por atraso. Este deberá tener una ganancia en $z = 1$ que sea 4.69 veces tan grande como la ganancia en $\omega T = 1$, sin agregar más de 7.5° de retraso de fase en $\omega T = 1$, para satisfacer el requerimiento de $\phi_{MF} \geq 30°$. Si se elige el valor de 0.97 para el polo del compensador por atraso, el cero debería localizarse de tal modo que

$$P_{\text{atraso}} = \frac{1 - z_1}{1 - 0.97} \geq 4.69$$

o $z_1 \leq 0.86$. Si se asigna $z_1 = 0.86$, entonces

$$|P_{\text{atraso}}| = \left|\frac{z - 0.86}{z - 0.97}\right| = \begin{cases} 4.7 & \text{para } z = 1 \\ 0.95 & \text{para } z = e^j \end{cases} \qquad (\omega T = 1)$$

y

$$\arg P_{\text{atraso}} = \arg\left(\frac{e^j - 0.86}{e^j - 0.97}\right) = -6.25° \qquad \text{para } z = e^j$$

El compensador entonces se convierte en

$$G_1 = \frac{K_1(z - 0.86)}{(z - 0.97)(z - 1)}$$

Finalmente, para $\omega_1 T = 1$, se necesita $|G_1G_2(e^j)| = 1$, así que $K_1 = 1.60/0.95 = 1.68$, para tener en cuenta la ganancia del compensador por atraso en $\omega T = 1$. El compensador completo es

$$G_1 = \frac{1.68(z - 0.86)}{(z - 0.97)(z - 1)}$$

que es casi el mismo diseño obtenido por los métodos de Nyquist en el ejemplo 12.7.

14.5 Aproximaciones por polos-ceros dominantes

El método del lugar de las raíces ofrece la ventaja de un despliegue gráfico de los polos y los ceros del sistema en malla cerrada. El diseñador puede determinar teóricamente las características de la respuesta del sistema a partir del diagrama de polos y ceros en malla cerrada. Sin embargo, en la práctica esta tarea se hace cada vez más difícil para sistemas con cuatro o más polos y ceros. En algunos casos el problema puede simplificarse de manera considerable si la respuesta está dominada por dos o tres polos y ceros.

Efectos en las respuestas de tiempo del sistema

La influencia de un polo particular (o un par de polos complejos) en la respuesta, se determina principalmente por dos factores: la razón relativa de disminución del término transitorio debido a ese polo, y la magnitud relativa del residuo en el mismo.

Para **sistemas continuos**, la parte real σ del polo p determina la tasa a la cual disminuye el término transitorio debido a ese polo; entre más grande sea σ, más rápida es la tasa de disminución. La magnitud relativa del residuo determina el porcentaje de la respuesta total debida a ese polo particular.

EJEMPLO 14.6. Considérese un sistema con función de transferencia en malla cerrada

$$\frac{C}{R} = \frac{5}{(s+1)(s+5)}$$

La respuesta paso de este sistema es

$$c(t) = 1 - 1.25e^{-t} + 0.25e^{-5t}$$

En la respuesta el término debido al polo en $s_1 = \sigma_1 = -5$ disminuye cinco veces más rápido que el término debido al polo en $s_2 = \sigma_2 = -1$. Además, el residuo en el polo $s_1 = -5$ es tan solo $\frac{1}{5}$ del de $s_2 = -1$. En consecuencia, para la mayor parte de los propósitos prácticos, el efecto del polo $s_1 = -5$ puede ignorarse y el sistema aproximarse mediante

$$\frac{C}{R} \cong \frac{1}{s+1}$$

El polo en $s_1 = -5$ se ha removido de la función de transferencia y el numerador se ha ajustado para mantener la misma ganancia en estado estacionario ($(C/R)(0) = 1$). La respuesta en el sistema aproximado es $c(t) = 1 - e^{-t}$.

EJEMPLO 14.7. El sistema con función de transferencia en malla cerrada

$$\frac{C}{R} = \frac{5.5(s+0.91)}{(s+1)(s+5)}$$

tiene la respuesta paso $c(t) = 1 + 0.125e^{-t} - 1.125e^{-5t}$

En este caso, la presencia de un cero cerca del polo en -1 reduce de manera significativa la magnitud del residuo en ese polo. En consecuencia el polo en -5 es el que ahora domina la respuesta del sistema. El polo de la malla cerrada y el cero efectivamente se cancelan entre sí y $(C/R)(0) = 1$, de tal modo que su función de transferencia aproximada es

$$\frac{C}{R} \cong \frac{5}{s+5}$$

y la correspondiente respuesta paso aproximada es $c \cong 1 - e^{-5t}$.

Para **sistemas discretos en el tiempo** con polos distintos (no repetidos) p_1, p_2,..., la parte transitoria $y_T(k)$ de la respuesta debida al polo p tiene la forma $y_T(k) = p^k$, con $k = 0,1,2,...$ (*véase* la tabla 4.2.). Por tanto cada muestra sucesiva en el tiempo es igual al muestreo anterior multiplicado por p, es decir

$$y_T(k+1) = py_T(k)$$

La magnitud de un polo distinto determina entonces la tasa de disminución de la respuesta transitoria, al ser la tasa de disminución inversamente proporcional a $|p|$: entre más pequeña la magnitud, más rápida la tasa de disminución. Por ejemplo, los polos cerca del círculo unitario disminuyen de manera mucho más lenta que los polos cerca del origen, puesto que sus magnitudes son más pequeñas.

El análisis en los sistemas con polos repetidos es más complicado, y las aproximaciones pueden resultar inapropiadas.

EJEMPLO 14.8. El sistema discreto con función de transferencia en malla cerrada

$$\frac{C}{R} = \frac{0.45z}{(z-0.1)(z-0.5)}$$

tiene la respuesta paso

$$c(k) = 1 - 1.125(0.5)^k + 0.125(0.1)^k \qquad k = 0,1,2,...$$

En la respuesta el término debido al polo en $z = 0.1$, el valor de la muestra en el tiempo k es sólo el 10% del valor de la muestra en el tiempo $k-1$, y por tanto disminuye cinco veces más rápido que el término debido al polo en $z = 0.5$. La magnitud del residuo en $z = 0.1$ es 0.125, que es una novena parte de la magnitud del residuo 1.125 en $z = 0.5$. En consecuencia, para muchos propósitos prácticos, a menudo puede ignorarse el polo en $z = 0.1$, y el sistema aproximarse mediante

$$\frac{C}{R} \cong \frac{0.5}{z-0.5}$$

en donde el numerador se ha ajustado para mantener la misma ganancia en estado estacionario

$$\frac{C}{R}(1) = 1$$

y el cero en $z = 0$ se eliminó para mantener un polo más que los ceros en el sistema aproximado. Ello es necesario para dar el mismo retardo inicial (tiempo de una muestra) en el sistema aproximado que en el original. La respuesta paso del sistema aproximado es $c(k) = 1 - (0.5)^k$, con $k = 0,1,2,...$

Efectos en otras características del sistema

En las figuras 14-11 y 14-12 se ilustra el efecto de un *polo* de la malla cerrada en el eje real, en $-p_r < 0$, sobre la sobretensión y el tiempo de subida T_s de un sistema continuo que también tiene los polos complejos $-p_c$, $-p_c^*$. Para

$$\frac{p_r}{\zeta\omega_n} > 5 \qquad (14.1)$$

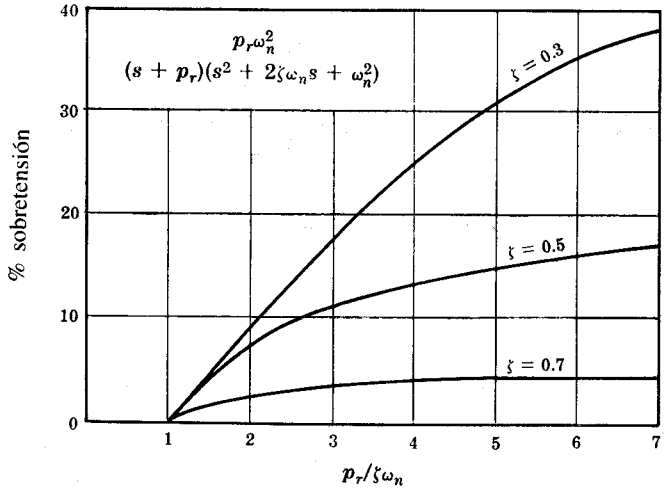


Figura 14-11

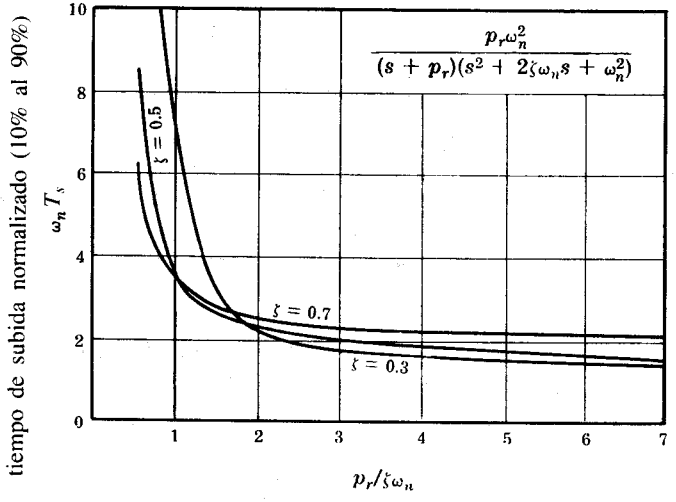


Figura 14-12

la sobretensión y el tiempo de subida se aproximan a los de un sistema de segundo orden que solamente tiene polos complejos (*véase* la figura 3-4). Por tanto, p_r puede despreciarse en la determinación de la sobretensión y el tiempo de subida si $\zeta > 0.5$ y

$$p_r > 5|\text{Re}\, p_c| = 5\zeta\omega_n \qquad (14.2)$$

No hay sobretensión si $$p_r \leq |\text{Re}\, p_c| = \zeta\omega_n \tag{14.3}$$

y el tiempo de subida se aproxima al de un sistema de primer orden que contiene solamente un polo en el eje real.

En las figuras 14-13 y 14-14 se ilustra el efecto de un *cero* de la malla cerrada en el eje real, en $-z_r < 0$, sobre la sobretensión y el tiempo de subida T_s de un sistema continuo que también tiene los polos complejos $-p_c$, $-p_c^*$. Estas gráficas muestran que z_r puede despreciarse al determinar la sobretensión y el tiempo de subida si $\zeta > 0.5$ y

$$z_r > 5|\text{Re}\, p_c| = 5\zeta\omega_n \tag{14.4}$$

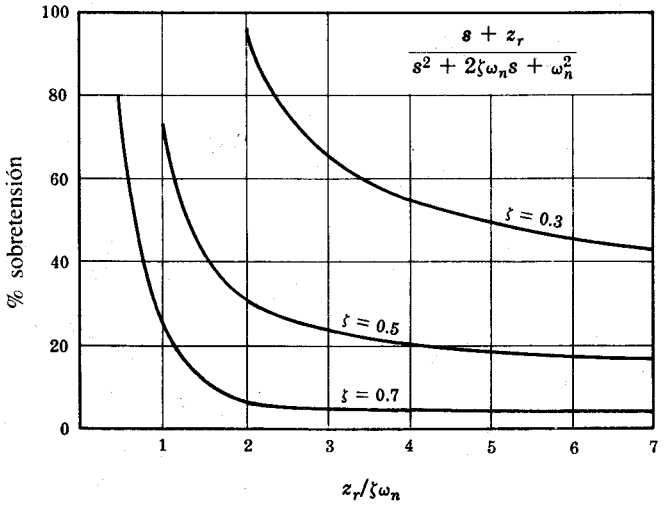


Figura 14-13

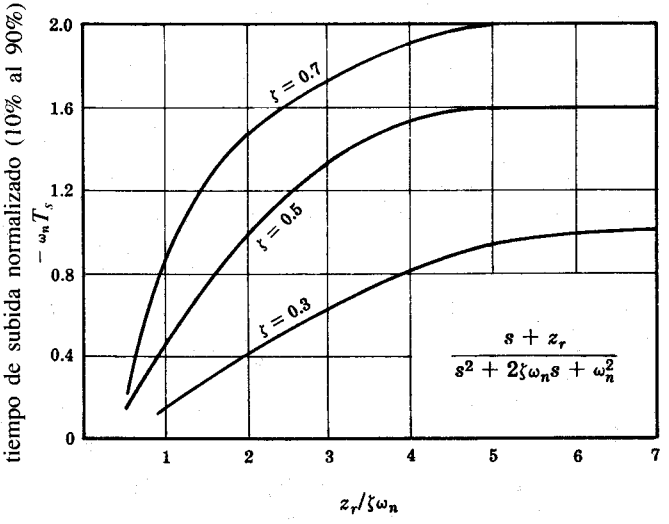


Figura 14-14

EJEMPLO 14.9. La función de transferencia en malla cerrada de un sistema continuo particular está representada por el diagrama de polos y ceros que se muestra en la figura 14-15. Dado que la ganancia en estado estacionario es $(C/R)(j0) = 1$, una aproximación de polo-cero dominante es

$$\frac{C}{R} \cong \frac{4}{s^2 + 2s + 4}$$

Esta es una aproximación razonable porque el polo y el cero cerca de $s = -2$ efectivamente se cancelan entre sí, y los demás polos y ceros satisfacen las ecuaciones (*14.2*) y (*14.4*) con $-p_c = -1 + j\sqrt{3}$ y $\zeta = 0.5$.

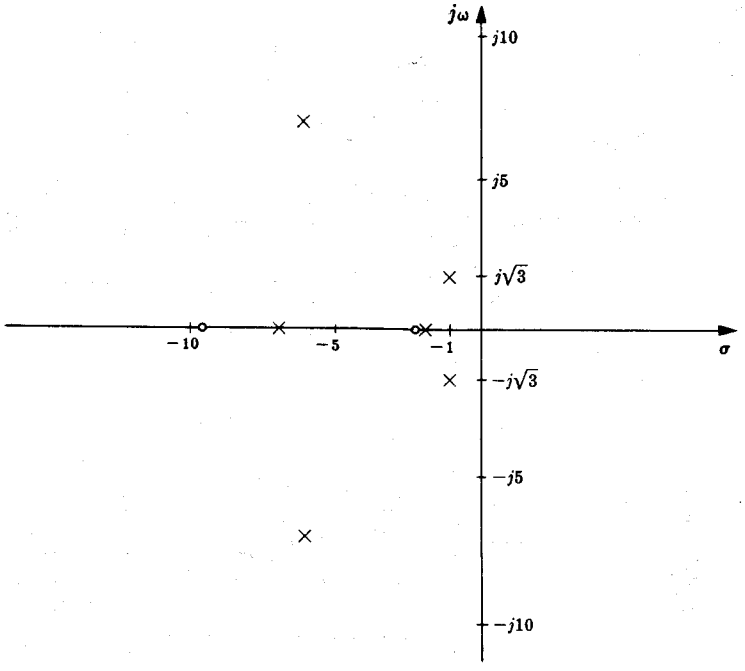


Figura 14-15

14.6 Diseño puntual

Si a partir de las especificaciones del sistema puede determinarse la posición deseada p_1 de un polo en malla cerrada, el lugar de las raíces del sistema puede alterarse para asegurar que una rama

del lugar de las raíces pasará por el punto deseado p_1. La especificación de un polo en malla cerrada en un punto particular del plano complejo se llama **diseño puntual**. La técnica se lleva a cabo utilizando la compensación de fase y de magnitud.

EJEMPLO 14.10. Considérese la planta continua

$$G_2 = \frac{K}{s(s+2)^2}$$

La respuesta en malla cerrada debe tener un tiempo de subida del 10% al 90% menor que 1 s, y una sobretensión menor que el 20%. A partir de la figura 3-4 se observa que estas especificaciones se cumplen si el sistema en malla cerrada tiene una configuración de dos polos dominantes con $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$. Así, p_1 se escoge en $-1 + j\sqrt{3}$, la cual es una solución de

$$p_1^2 + 2\zeta\omega_n p_1 + \omega_n^2 = 0$$

para $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$. Claramente puede verse que $p_1^* = -1 - j\sqrt{3}$ es la otra solución de esta ecuación cuadrática. En la figura 14-16 se muestra la orientación de p_1 con respecto a los polos de G_2.

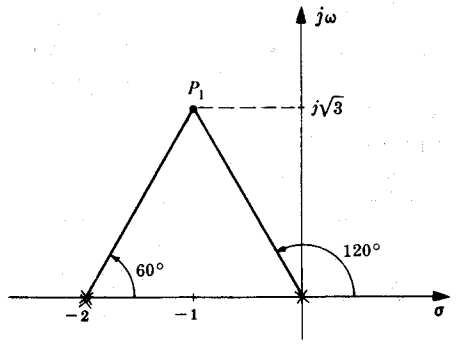


Figura 14-16

El ángulo de fase de G_2 es $-240°$ en p_1. Para que una rama del lugar de las raíces pase por p_1, el sistema debe modificarse de tal modo que el ángulo de fase del sistema compensado sea $-180°$ en p_1. Ello se logra al agregar una red de adelanto en cascada que tenga un ángulo de fase de $240° - 180° = 60°$ en p_1, lo cual se satisface mediante

$$G_1 = P_{\text{Adelanto}} = \frac{s+1}{s+4}$$

como se muestra en el diagrama de polos y ceros de la función de transferencia en malla abierta compensada G_1G_2, en la figura 14-17. El polo de la malla cerrada puede localizarse ahora en p_1 escogiendo un valor para K que satisfaga el criterio de magnitud del lugar de las raíces. La solución de la ecuación (*13.5*) produce $K = 16$. El lugar de las raíces o diagrama de polos y ceros en malla cerrada del sistema compensado debe dibujarse para verificar la validez de la suposición de los dos polos dominantes. La figura 14-18 ilustra que los polos en p_1 y p_1^* dominan la respuesta.

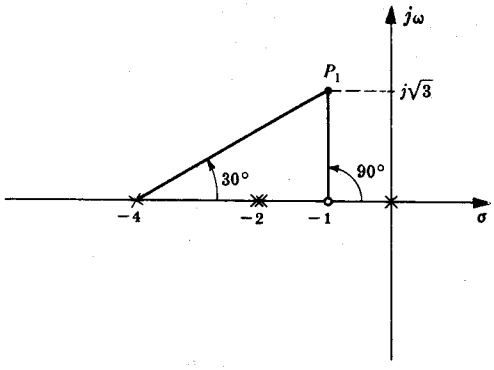


Figura 14-17

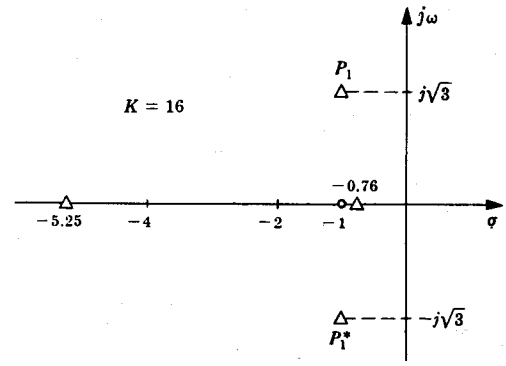


Figura 14-18

14.7 Compensación por retroalimentación

La adición de elementos de compensación a una trayectoria de retroalimentación de un sistema de control puede emplearse en el diseño del lugar de las raíces de un modo similar al que se trató en las secciones anteriores. Los elementos de compensación afectan el lugar de las raíces de la función de transferencia en malla abierta de la misma manera. Pero, aunque el lugar de las raíces es el mismo cuando el compensador está en la trayectoria directa o en la de retroalimentación, la función de transferencia en malla cerrada puede ser significativamente diferente. Se demostró, en el problema 13.34, que los *ceros* de la retroalimentación no aparecen en la función de transferencia en malla cerrada, mientras que sus *polos* se hacen ceros de la función de transferencia en malla cerrada (suponiendo que no se producen cancelaciones).

EJEMPLO 14.11. Suponga que se agrega un compensador por retroalimentación a un sistema continuo con función de transferencia directa

$$G = \frac{K}{(s+1)(s+4)(s+5)}$$

en un intento por cancelar el polo en -1 y remplazarlo por un polo en -6. Entonces, el compensador sería $H = (s + 1)/(s + 6)$, GH estaría dada por $GH = K/(s + 4)(s + 5)(s + 6)$, y la función de transferencia en malla cerrada se volvería

$$\frac{C}{R} = \frac{K(s+6)}{(s+1)[(s+4)(s+5)(s+6)+K]}$$

Aunque el polo en -1 se cancela en GH, éste aparece como un polo de la *malla cerrada*. Además, el polo de la retroalimentación en -6 se convierte en un cero de la malla cerrada. En consecuencia, *la técnica de cancelación no funciona con un compensador en la trayectoria de retroalimentación.*

EJEMPLO 14.12. El diagrama de bloques del sistema continuo en la figura 14-19 contiene dos trayectorias de retroalimentación.

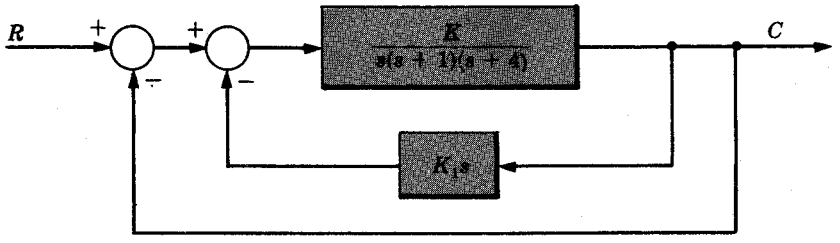


Figura 14-19

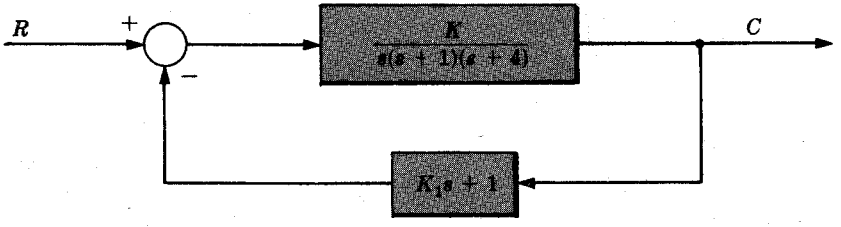


Figura 14-20

Estas dos trayectorias pueden combinarse como se muestra en la figura 14-20.

En esta representación la trayectoria de retroalimentación contiene un cero en $s = -1/K_1$. Este cero aparece en GH y en consecuencia afecta el lugar de las raíces. Sin embargo, no aparece en la función de transferencia de la malla cerrada, la cual contiene tres polos sin importar dónde esté localizado el cero.

El hecho de que los ceros de la retroalimentación no aparezcan en la función de transferencia de la malla cerrada puede utilizarse con ventaja de la siguiente manera. Si se desean polos de malla cerrada en ciertas localizaciones en el plano complejo, los ceros de retroalimentación pueden colocarse en estos puntos. Puesto que las ramas del lugar de las raíces terminarán en estos ceros, las localizaciones de los polos deseados de la malla cerrada pueden obtenerse al hacer suficientemente grande el factor de ganancia en malla abierta.

EJEMPLO 14.13. En un sistema continuo, el compensador por retroalimentación

$$H = \frac{s^2 + 2s + 4}{(s+6)^2}$$

se agrega al sistema con función de transferencia en malla directa

$$G = \frac{K}{s(s+2)}$$

para garantizar que los polos dominantes de la malla cerrada estén cerca de $s = -1 + j\sqrt{3}$. En la figura 14-21 se muestra el lugar de las raíces resultante.

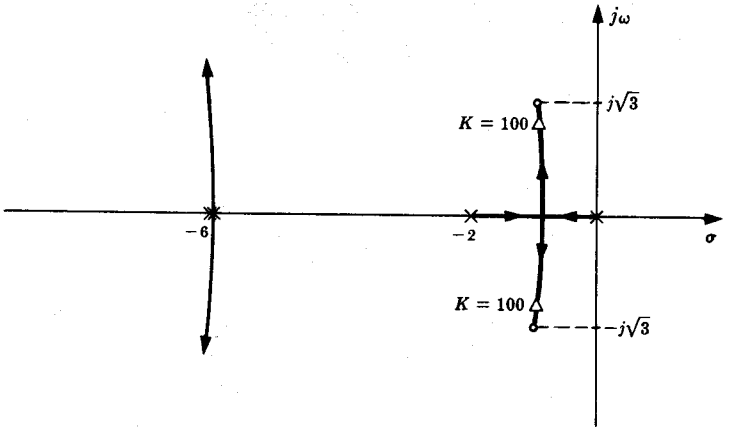


Figura 14-21

Si K se iguala a 100, la función de transferencia de la malla cerrada es

$$\frac{C}{R} = \frac{100(s+6)^2}{(s^2+1.72s+2.96)(s^2+12.3s+135)}$$

y el par de polos complejos dominante $s_{1,2} = 0.86 \pm j1.5$ están lo suficientemente cercanos a $-1 \pm j\sqrt{3}$.

Problemas resueltos

Compensación del factor de ganancia

14.1. Determine el valor del factor de ganancia K para el cual el sistema con función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}$$

tiene polos de malla cerrada con una razón de amortiguación $\zeta = 0.5$.

Los polos de la malla cerrada tendrán una razón de amortiguación de 0.5 cuando formen un ángulo de 60° con el eje real negativo [ecuación (*13.18*)]. El valor deseado de K se determina en el punto en donde el lugar de las raíces cruce la línea $\zeta = 0.5$ en el plano s. En la figura 14-22 se muestra un diagrama del lugar de las raíces. El valor deseado para K es 8.3

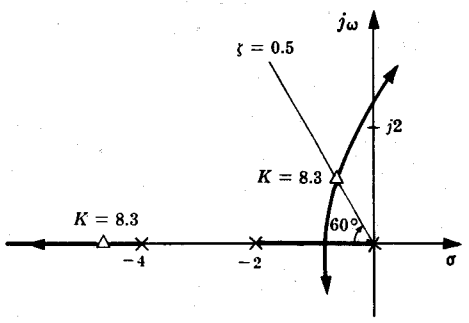


Figura 14-22

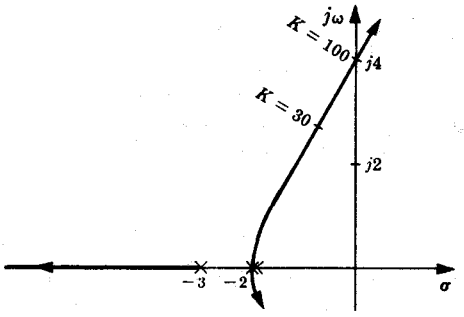


Figura 14-23

14.2. Determine un valor de K para el cual la función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{K}{(s+2)^2(s+3)}$$

satisfaga las siguientes especificaciones: *a*) $K_p \geq 2$, *b*) margen de ganancia ≥ 3.

Para este sistema, $K_p = K/12$. Por tanto, para satisfacer la primera especificación, K debe ser mayor que 24. El valor de K en el cruce del eje $j\omega$ con el lugar de las raíces es igual a 100, como se muestra en la figura 14-23. Entonces, para satisfacer la segunda especificación, K debe ser menor que $100/3 = 33.3$. $K = 30$ satisface ambas especificaciones.

14.3. Determine un factor de ganancia K para el cual el sistema del ejemplo 13.11 tenga un margen de ganancia de 2.

Como se muestra en la figura 13-15, la ganancia en el límite de estabilidad es $K = 1$. Por tanto, para tener un margen de ganancia de 2, K debe ser 0.5.

Compensación por cancelación

14.4. ¿Pueden cancelarse efectivamente los polos de una planta en la mitad derecha del plano s con un compensador que tiene un cero en la mitad derecha del plano s?

No. Por ejemplo, supóngase una planta particular que tiene la función de transferencia

$$G_2 = \frac{K}{s-1} \qquad K > 0$$

y se agrega un compensador en cascada con función de transferencia $G_1 = (s - 1 + \epsilon)/(s + 1)$. El término ϵ en la función de transferencia representa cualquier pequeño error entre la localización deseada del cero en $+1$ y la localización real. La función de transferencia de la malla cerrada es entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{K(s-1+\epsilon)}{s^2 + Ks + K\epsilon - K - 1}$$

Aplicando el criterio de estabilidad de Hurwitz o de Routh (Capítulo 5) al denominador de esta función de transferencia, puede verse que el sistema es inestable para cualquier valor de K si ϵ es menor que $(1 + K)/K$, que usualmente es el caso porque ϵ representa el error en la localización deseada del cero.

14.5. En el sistema discreto con retroalimentación unitaria, con función de transferencia en malla directa.

$$G_2 = \frac{z+1}{z(z-1)}$$

determine un compensador G_1 que proporcione una respuesta con transitorio mínimo para el sistema en malla cerrada.

Para una respuesta con transitorio mínimo (sección 10.8), queremos que todos los polos de la malla cerrada estén en $z = 0$. En la figura 14-24*a*) se muestra un diagrama de polos y ceros del sistema. Si cancelamos el polo en $z = 0$ y el cero en $z = -1$, el lugar de las raíces pasará por $z = 0$, como se muestra en la figura 14-24*b*). El compensador resultante es entonces

$$G_1 = \frac{z}{z+1}$$

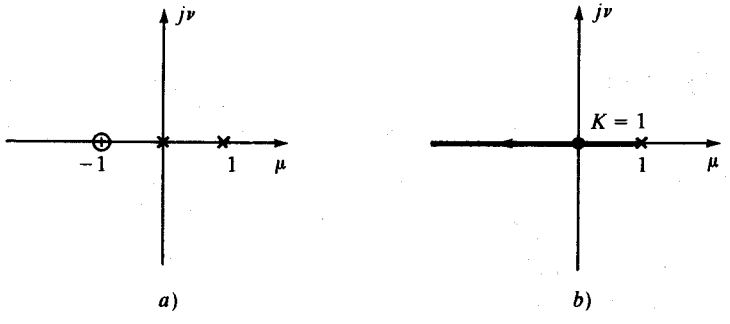


Figura 14-24

y la función de transferencia en malla cerrada es

$$\frac{C}{R} = \frac{G_1G_2}{1 + G_1G_2} = \frac{1}{z}$$

Compensación de fase

14.6. Se desea agregar a un sistema un compensador con un *cero* en $s = -1$ para producir un adelanto de fase de 60° en $s = -2 + j3$. ¿Cómo puede determinarse la localización apropiada del *polo*?

Con referencia a la figura 14-3, queremos que la contribución de fase de la red sea $\theta_a - \theta_b = 60°$. De la figura 14-25, $\theta_a = 108°$. De donde $\theta_b = \theta_a - 60° = 48°$, y el polo estaría localizado en $s = -4.7$, como se muestra en la figura 14-25.

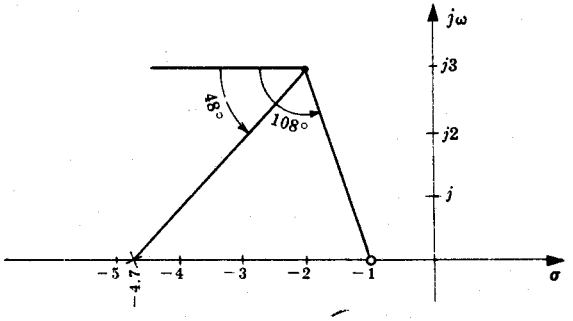


Figura 14-25

14.7. Determine un compensador que cambie a $-135°$ el ángulo de desviación del lugar de las raíces a partir del polo en $s = -0.5 + j$ para la función de transferencia de la planta

$$G_2 = \frac{K}{s(s^2 + s + 1.25)}$$

El ángulo de desviación del sistema no compensado es $-27°$. Para cambiarlo a $-135°$, puede emplearse un compensador por atraso con retraso de fase de 108° en $s = -0.5 + j$. El retraso de fase requerido podría suministrarse por medio de un compensador por atraso *simple* (un polo y ningún cero) con un polo en $s = -0.18$, como se muestra en la figura 14-26*a*), o mediante dos atrasos simples en cascada con dos polos en $s = -1.22$, como se muestra en la figura 14-26*b*).

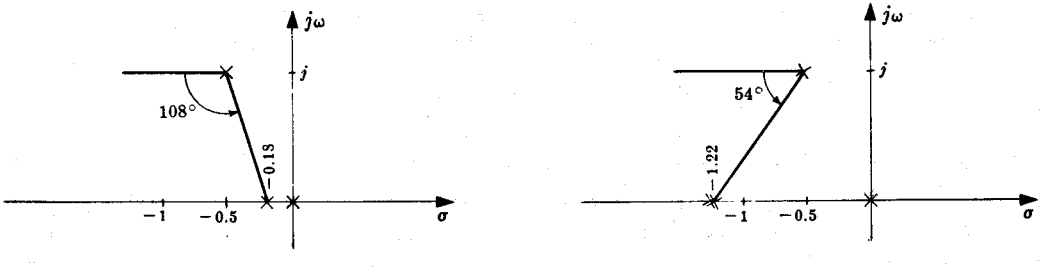


Figura 14-26

14.8. Determine un compensador para el sistema discreto en el tiempo con

$$GH(z) = \frac{K}{z(z-1)}$$

que proporcione una frecuencia de cruce de fase ω_π tal que $\omega_\pi T = \pi/2$ rad.

El arg GH en $z = e_j{}^{\pi/2} = j$ se determina a partir del diagrama de polos y ceros de la figura 14-27 es $-225°$. Para que el lugar de las raíces pase por este punto, se necesita agregar 45° de adelanto de fase, de tal forma que el arg $GH = \pm 180°$. Esto puede lograrlo el compensador

$$P_{\text{Adelanto}}(z) = \frac{z}{z+1}$$

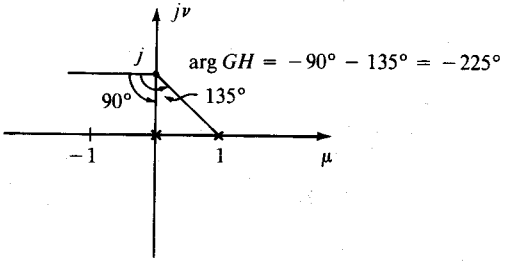


Figura 14-27

El cero en $z = 0$ proporciona un adelanto de fase de 90°, y el polo en $z = -1$ proporciona un atraso de fase de 45°, lo cual resulta en un adelanto neto de 45°.

Compensación de magnitud

14.9. En el ejemplo 14.4, la constante de error de velocidad K_v se incrementó en un factor de $6\frac{2}{3}$ sin aumentar el factor de ganancia. ¿Cómo puede lograrse esto?

Se supuso que el compensador G_1 tenía una ganancia de 1 en alta frecuencia y una ganancia en (c.c.) de $6\frac{2}{3}$ en baja frecuencia. Este compensador no puede mecanizarse pasivamente porque un compensador pasivo de atraso tiene una ganancia en c.c. de 1. En consecuencia, G_1 debe incluir un amplificador. Un método alterno sería dejar que G_1 sea un compensador pasivo de atraso

$$G_1' = \frac{0.015}{0.1}\left(\frac{s+0.1}{s+0.015}\right)$$

y luego amplificar el factor de ganancia por $6\frac{2}{3}$. Sin embargo, cuando se emplean las técnicas del lugar de las raíces, a menudo es más conveniente suponer que el compensador justamente agrega un polo y un cero, como se hizo en el problema 14.4. Algunos ajustes apropiados pueden hacerse en las etapas finales del diseño para alcanzar la más simple y/o la menos costosa mecanización del compensador.

Aproximaciones de polo-cero dominante

14.10. Determine la sobretensión y el tiempo de subida en el sistema con función de transferencia

$$\frac{C}{R} = \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}$$

Para este sistema, $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.5$, $p_r = 1$ y $p_r/\zeta\,\omega_n = 2$. A partir de la figura 14-11, el porcentaje de sobretensión es aproximadamente 8%. A partir de la figura 14-12, el tiempo de subida es 2.4. Los números correspondientes en un sistema con sólo polos complejos son 18% y 1.6 s. De esta manera el polo sobre el eje real reduce la sobretensión y retarda la respuesta.

14.11. Determine la sobretensión y el tiempo de subida en el sistema con la función de transferencia

$$\frac{C}{R} = \frac{s+1}{s^2+s+1}$$

Para este sistema $\omega_n = 1$, $\zeta = 0.5$, $z_r = 1$ y $z_r/\zeta\omega_n = 2$. A partir de la figura 14-13, el porcentaje de sobretensión es 31%. A partir de la figura 14-14, el tiempo de subida, del 10% al 90%, es 1.0 s. Los números correspondientes en un sistema sin el cero son 18% y 1.6 s. De esta manera el cero sobre el eje real aumenta la sobretensión y reduce el tiempo de subida, es decir, acelera la respuesta.

14.12. ¿Cuál es la aproximación adecuada del polo-cero dominante para el siguiente sistema?

$$\frac{C}{R} = \frac{2(s+8)}{(s+1)(s^2+2s+3)(s+6)}$$

El polo en $s = -6$ y el cero en $s = -8$, sobre el eje real, satisfacen las ecuaciones (*14.2*) y (*14.4*), respectivamente, en relación con los polos complejos ($\zeta\omega_n = 1$ y $\zeta > 0.5$) y por tanto pueden despreciarse. El polo sobre el eje real en $s = -1$ y los polos complejos no pueden despreciarse. De aquí que una aproximación adecuada (con la misma ganancia en c.c.) es

$$\frac{C}{R} = \frac{8}{3(s+1)(s^2+2s+3)}$$

14.13. Determine una aproximación de polo dominante en el sistema discreto con función de transferencia

$$\frac{C}{R} = \frac{0.16}{(z-0.2)(z-0.8)}$$

La respuesta paso está dada por

$$c(k) = 1 - 1.33(0.8)^k + 0.33(0.2)^k \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

La magnitud 0.33 del residuo en $z = 0.2$ es cuatro veces menor que la magnitud 1.33 del residuo en $z = 0.8$. También, la respuesta transitoria debida al pòlo en $z = 0.2$ disminuye $0.8/0.2 = 4$ veces más rápido que la del polo en $z = 0.8$. Así, el sistema en malla cerrada aproximado tendría sólo un polo en $z = 0.8$. Sin embargo, para mantener en la respuesta del sistema un retardo de dos muestras (el sistema original tiene dos polos más que los ceros), es necesario agregar a la aproximación un polo en $z = 0$. Entonces

$$\frac{C}{R} \cong \frac{0.2}{z(z-0.8)}$$

La respuesta paso en el sistema aproximado es

$$c(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k = 0 \\ 1 - 1.25(0.8)^k & \text{para } k > 0 \end{cases}$$

Nótese que el único efecto del polo en $z = 0$ sobre la respuesta es retardarla en una muestra.

Diseño puntual

14.14. Determine K, a y b, tales que el sistema con función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{K(s+a)}{(s+b)(s+2)^2(s+4)}$$

tenga un polo en malla cerrada en $p_1 = -2 + j3$.

El ángulo que contribuye con los polos en $s = -2$ y en $s = -4$ al arg $GH(s_1)$ es $-237°$. Para satisfacer el criterio del ángulo, las contribuciones del cero en $s = -a$ y del polo en $s = -b$ deben totalizar $-180° - (-237°) = 57°$. Puesto que este es un ángulo positivo, el cero debe estar más a la derecha que el polo ($b > a$). Arbitrariamente (a o b) pueden elegirse tan grande que permita que el otro pueda fijarse en la mitad izquierda finita del plano s para dar una contribución total de 57°. Hagamos $a = 2$, lo cual resulta en una contribución de fase de 90°. Entonces b debe colocarse en donde la contribución del polo sea $-33°$. Una línea trazada desde p_1 en un ángulo de 33° intercepta el eje real en $6.6 = b$, como se muestra en la figura 14-28.

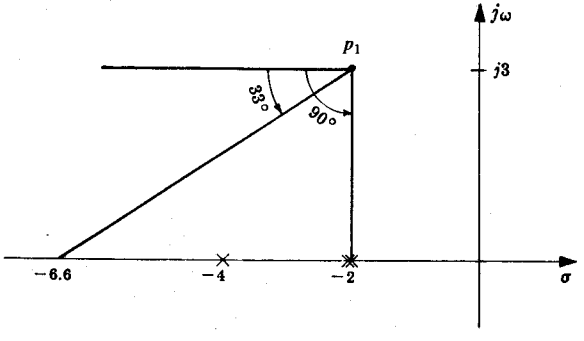


Figura 14-28

El valor necesario de K, requerido para satisfacer el criterio de magnitud en p_1 puede calcularse ahora utilizando los valores escogidos para a y b. A partir del siguiente cálculo, el valor requerido de K es

$$\left| \frac{(p_1 + 6.6)(p_1 + 2)^2(p_1 + 4)}{(p_1 + 2)} \right|_{p_1 = -2+j3} = 60$$

14.15. Determine la compensación requerida en un sistema con la función de transferencia de planta

$$G_2 = \frac{K}{(s + 8)(s + 14)(s + 20)}$$

para satisfacer las siguientes especificaciones: *a*) sobretensión $\leq 5\%$, *b*) tiempo de subida del 10% al 90% $T_s \leq 150$ ms, *c*) $K_p > 6$.

La primera especificación puede satisfacerse con una función de transferencia en malla cerrada cuya respuesta esté dominada por dos polos complejos con $\zeta \geq 0.7$, como se observa en la figura 3-4. Una amplia variedad de configuraciones de polo-cero dominante puede satisfacer la especificación de sobretensión; pero la configuración de dos polos usualmente es la forma más simple de obtener. A partir de la figura 3-4 también vemos que, si $\zeta = 0.7$, el tiempo de subida del 10% al 90% normalizado es cerca de $\omega_n T_s = 2.2$. Así, para satisfacer la segunda especificación con $\zeta = 0.7$, tenemos $T_s = 2.2/\omega_n \leq 0.15$ s u $\omega_n \geq 14.7$ rad/s.

Pero escojamos $\omega_n = 17$ de tal modo que se logre algún margen con respecto a la especificación de tiempo de subida. Otros polos en malla cerrada, si aparecen en el diseño final, pueden retardar la respuesta. Así, para satisfacer las primeras dos especificaciones, diseñaremos el sistema con una respuesta dominante de dos polos con $\zeta = 0.7$ y $\omega_n = 17$. Una evaluación de $G_2(p_1)$ en el plano s, con $p_1 = -12 + j\,12$ (correspondiente a $\zeta = 0.7$, $\omega_n = 17$), produce el arg $G_2(p_1) = -245°$. Entonces, para satisfacer el criterio del ángulo en p_1, debemos compensar el sistema con un adelanto de fase tal que el ángulo total sea $-180°$. Por tanto agregamos un compensador por adelanto en cascada con $245° - 180° = 65°$ de adelanto de fase en p_1. Colocando arbitrariamente el cero del compensador por adelanto en $s = -8$ se obtiene $\theta_a = 108°$ (*véase* la figura 14-3). Entonces, puesto que queremos $\theta_a - \theta_b = 65°$, $\theta_b = 108° - 65° = 43°$. Dibujando una línea desde p_1 al eje real con el ángulo θ_b requerido se determina la localización del polo en $s = -25$. La adición del compensador por adelanto con $a = 8$ y $b = 25$ produce la función de transferencia en malla abierta

$$G_2 G_{\text{Adelanto}} \frac{K}{(s + 14)(s + 20)(s + 25)}$$

El valor de K necesario para satisfacer el criterio de magnitud en p_1 es $K = 3100$. La constante de error posicional resultante para este diseño es $K_p = 3100/(14)(20)(25) = 0.444$, la cual es sustancialmente menor que el valor especificado de 6 o más. K_p podría incrementarse levemente al intentar otros diseños puntuales (ω_n más alta); pero el K_p requerido no puede alcanzarse sin algún modo de compensación de magnitud en baja frecuencia. El aumento requerido es $6/0.444 = 13.5$, y puede obtenerse con un compensador por atraso en baja frecuencia con $b/a = 13.5$. El único requerimiento

adicional es que a y b para el compensador por atraso deben ser lo suficientemente pequeños como para no afectar el diseño en alta frecuencia logrado con la red de adelanto. Es decir,

$$\arg\ P_{\text{atraso}}\ (p_1) \cong 0$$

Haciendo $b = 1$ y $a = 0.074$. El compensador requerido es

$$G_{\text{atraso}} = \frac{s+1}{s+0.074}$$

Para sintetizar este compensador utilizando una red de atraso convencional con función de transferencia

$$P_{\text{atraso}} = \frac{0.074(s+1)}{s+0.074}$$

se requiere un amplificador adicional con una ganancia de 13.5; o de manera equivalente, el valor de diseño de K escogido antes puede incrementarse en 13.5. Con cualquiera de las mecanizaciones prácticas, la función de transferencia total en malla abierta es

$$GH = \frac{3100(s+1)}{(s+0.075)(s+14)(s+20)(s+25)}$$

En la figura 14-29 se muestran los polos y ceros de la malla cerrada. El polo y el cero de baja frecuencia efectivamente se cancelan entre sí. El polo sobre el eje real en $s = -35$ afectará de manera leve la respuesta del sistema porque $p_r / \zeta\omega_n$ para este polo es aproximadamente de 3 [ecuación (*14.2*)]. Sin embargo, hay necesidad de referirse a las figuras 14-11 y 14-12 para verificar que la sobretensión y el tiempo de subida cumplen bien con las especificaciones. Si el sistema se ha diseñado para cumplir apenas con la especificación del tiempo de subida con la aproximación de dos polos dominantes, la presencia del polo adicional en la función de transferencia en malla cerrada puede haber retardado la respuesta lo suficiente para que no se cumpla esa especificación.

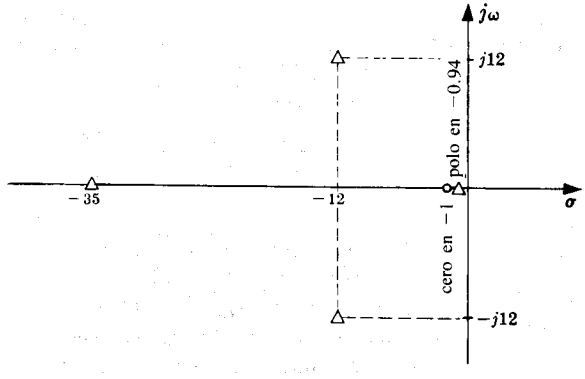


Figura 14-29

Compensación por retroalimentación

14.16. Un sistema de control de posición con un tacómetro en la trayectoria de retroalimentación tiene el diagrama de bloques que se muestra en la figura 14-30. Determine los valores de K_1 y K_2 que resultan en el diseño del sistema que produce un tiempo de subida del 10% al 90% menor que $1s$ y una sobretensión menor que el 20%.

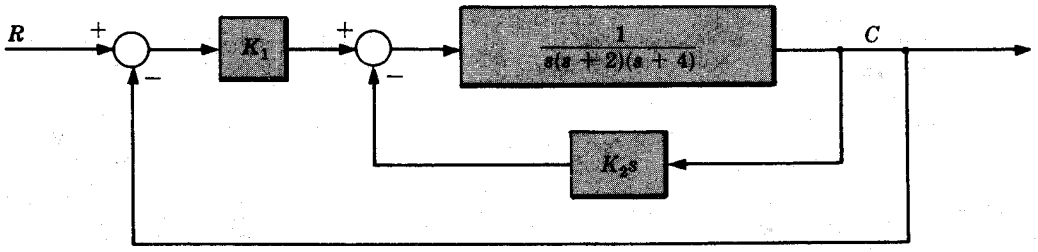


Figura 14-30

Una vía directa para lograr este diseño es determinar un punto de diseño apropiado en el plano s y utilizar la técnica de diseño puntual. Si se combinan las dos trayectorias de retroalimentación, se obtiene el diagrama de bloques que se muestra en la figura 14-31.

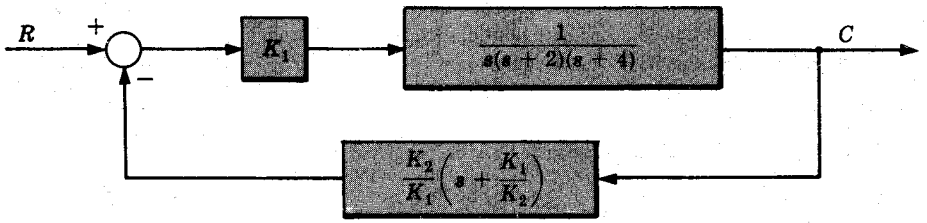


Figura 14-31

Para esta configuración

$$GH = \frac{K_2(s + K_1/K_2)}{s(s+2)(s+4)}$$

La localización del cero en $s = -K_1/K_2$ aparece en la trayectoria de retroalimentación y el factor de ganancia es K_2. Así, para una localización fija del cero (la relación K_1/K_2) un lugar de las raíces para el sistema puede construirse en función de K_2. La función de transferencia en malla cerrada contendrá entonces tres polos, pero ningún cero. Los esbozos tentativos del lugar de las raíces (figura 14-32) revelan que si la relación K_1/K_2 se localiza en cualquier lugar entre 0 y 4, la función de transferencia en malla cerrada probablemente contendrá dos polos complejos (si K_2 es lo suficientemente grande) y un polo sobre el eje real cerca del valor de $-K_1/K_2$.

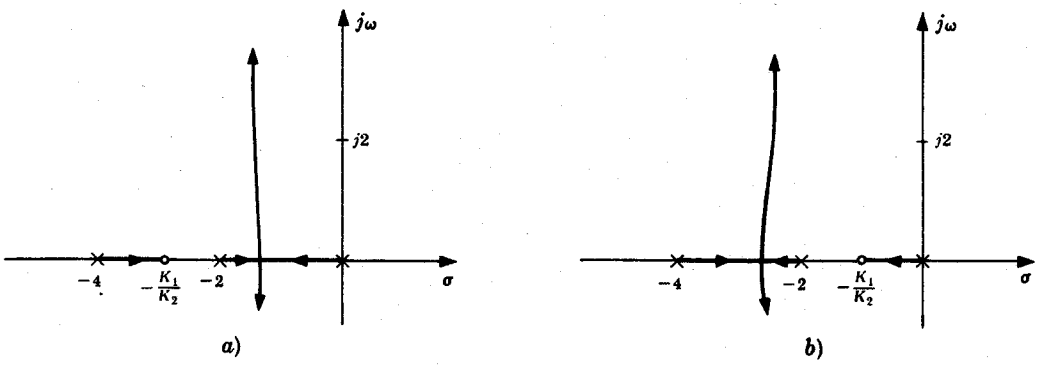


Figura 14-32

Entonces, es posible que una configuración de tres polos dominantes sea apropiada para el diseño. Un valor de $\zeta = 0.5$ para los polos complejos satisfará el requerimiento de sobretensión. Para $\zeta = 0.5$ y $p_r/\zeta\omega_n = 2$, la figura 14-12 muestra un tiempo de subida normalizado $\omega_n T_s = 2.3$. Así, $T_s = 2.3/\omega_n < 1$ s u $\omega_n > 2.3$ rad/s. Si $p_r/\zeta\omega_n$ se hace mayor que 2, el tiempo de subida será más rápido, y viceversa. Para tener un pequeño margen en el caso que $p_r/\zeta\omega_n$ sea menor que 2, se escoge $\omega_n = 2.6$. El punto de diseño en el plano s es entonces $p_1 = -1.3 + j2.3$, que corresponde a $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2.6$.

De la figura 14-33 se obtiene que la contribución de los polos en $s = 0, -2$ y -4 al arg $GH(p_1)$ es $-233°$. Entonces la contribución del cero debe ser $-180° - (-233°) = 53°$ en p_1 para satisfacer el criterio del ángulo en p_1. La localización del cero debe ser entonces $s = -3$, el cual se obtiene al trazar una línea desde p_1 hasta el eje real en un ángulo de 53° con el eje real. Con $K_1/K_2 = 3$, el factor de ganancia en p_1 para GH es 7.5. Así, los valores de diseño son $K_2 = 7.5$ y $K_1 = 22.5$. El polo sobre el eje real para la malla cerrada está a la izquierda del cero localizado en $s = -3$, pero cerca de él. Por consiguiente, para este diseño $p_r/\zeta\omega_n$ es por lo menos $3/1.3 = 2.3$.

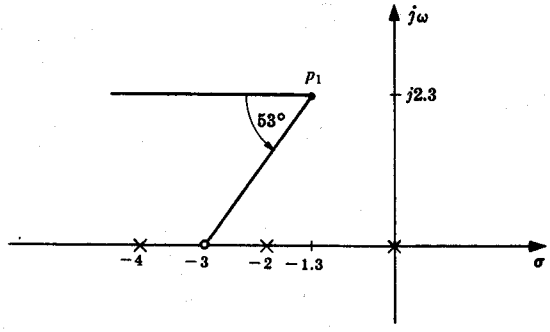


Figura 14-33

14.17 En el sistema discreto en el tiempo con función de transferencia en malla directa

$$G_2 = \frac{K}{z(z-1)}$$

determine un compensador por retroalimentación que produzca un sistema en malla cerrada con una respuesta con transitorio mínimo.

Para una respuesta con transitorio mínimo (sección 10.8), la función de transferencia en malla cerrada debe tener todos sus polos en $z = 0$. Puesto que los polos cancelados por los ceros de la retroalimentación aparecen en la función de transferencia en malla cerrada, hagamos que H tenga un cero en $z = 0$. Esto elimina el polo en $z = 0$ del lugar de las raíces, pero permanece en la función de transferencia en malla cerrada.

Para que H sea factible también debe tener por lo menos un polo. Si colocamos el polo de H en $z = -1$, el lugar de las raíces resultante pasa por $z = 0$, como se muestra en la figura 14-34. Entonces, haciendo $K = 1$, todos los polos de la malla cerrada están localizados en $z = 0$, y el sistema tiene respuesta con transitorio mínimo.

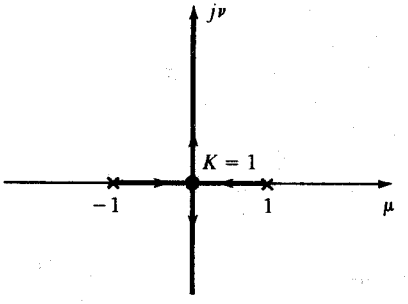


Figura 14-34

Problemas suplementarios

14.18. En el sistema con función de transferencia en malla abierta $GH = K(s + a)/(s^2 - 1)(s + 5)$ determine K y a, tales que el sistema en malla cerrada tenga polos dominantes con $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$. ¿Cuál es el porcentaje de sobretensión en el sistema en malla cerrada con estos valores de K y a?

14.19. Determine un compensador apropiado en el sistema con función de transferencia de planta

$$G_2 = \frac{1}{s(s+1)(s+4)}$$

para satisfacer las siguientes especificaciones: 1) sobretensión $< 20\%$, 2) tiempo de subida del 10% al 90% ≤ 1 s, 3) margen de ganancia ≥ 5.

14.20. Determine la compensación adecuada en el sistema con función de transferencia de planta $G_2 = 1/s(s + 4)^2$ para satisfacer las siguientes especificaciones: 1) sobretensión $< 20\%$, 2) constante de error de velocidad $K_v \geq 10$.

14.21. En el sistema que se muestra en el diagrama de bloques de la figura 14-35, determine K_1 y K_2 tales que el sistema tenga polos en malla cerrada en $s = -2 \pm j\,2$.

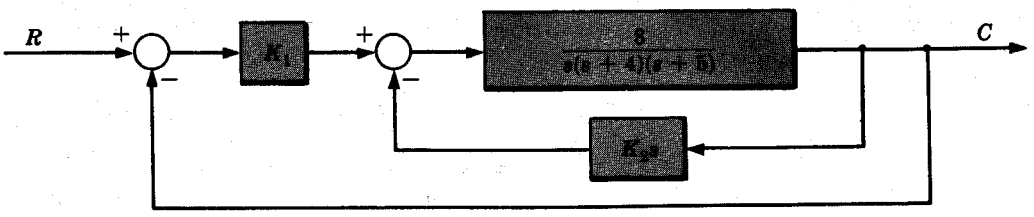


Figura 14-35

14.22. Determine un valor de K en el sistema con función de transferencia en malla abierta $GH = K/s(s^2 + 6s + 25)$ tal que la constante de error de velocidad $K_v > 1$, la respuesta paso en malla cerrada no tenga sobretensión y el margen de ganancia > 5.

14.23. Diseñe un compensador en el sistema con función de transferencia de planta $G_2 = 63/s(s + 7)(s + 9)$ tal que la constante de error de velocidad $K_v > 30$, la sobretensión sea menor que el 20% y el tiempo de subida del 10% al 90% sea menor que 0.5 s.

Respuestas a los problemas suplementarios

14.18. $K = 11.25$, $a = 1.6$, sobretensión = 38%; nótese que el sistema tiene un cero de malla cerrada en $s = -a = -1.6$.

14.19. $G_1 = 24(s + 1)/(s + 4)$

14.20. $G_1 = 24(s + 0.2)/(s + 0.03)$

14.21. $K_2 = 1$, $K_1 = 5$

14.22. $K = 28$

14.23. $G_1 = 3(s + 0.5)/(s + 0.05)$

Capítulo 15

Análisis de Bode

15.1 Introducción

El análisis de los sistemas de control con retroalimentación utilizando el método de Bode es equivalente al análisis de Nyquist en que ambas técnicas emplean representaciones gráficas para la función de respuesta de frecuencia en malla abierta $GH(\omega)$, en donde $GH(\omega)$ se refiere a un sistema discreto o a uno continuo. Sin embargo, los **diagramas de Bode** constan de dos gráficas: la magnitud de $GH(\omega)$ y el ángulo de fase de $GH(\omega)$, ambos representados en términos de la frecuencia ω. Usualmente se emplean escalas logarítmicas para los ejes de frecuencia y para $|GH(\omega)|$.

Los diagramas de Bode ilustran de manera clara la estabilidad relativa de un sistema. En efecto, a menudo se definen los márgenes de ganancia y de fase en términos de los diagramas de Bode (*véase* el ejemplo 10.1). Estas medidas de estabilidad relativa pueden determinarse para un sistema particular con un mínimo de esfuerzo de cálculo utilizando los diagramas de Bode, especialmente para aquellos casos en los cuales se dispone de los datos experimentales de la respuesta de frecuencia.

15.2 Escalas logarítmicas y diagramas de Bode

Los diagramas de Bode utilizan escalas logarítmicas porque simplifican de manera considerable su construcción, manipulación e interpretación.

Se usa una escala logarítmica para el eje ω (la abscisa) porque con ello pueden representarse la magnitud y el ángulo de fase sobre un intervalo de frecuencias mucho mayor que lo que podría representarse con el eje lineal de frecuencias, acentuando por igual todas las frecuencias, y tales gráficas a menudo resultan líneas rectas para sistemas continuos en el tiempo (sección 15.4).

La magnitud $|P(\omega)|$ de cualquier función de respuesta de frecuencia $P(\omega)$ para cualquier valor de ω se representa en una escala logarítmica en decibeles (dB), en donde

$$\text{dB} = 20 \log_{10} |P(\omega)| \tag{15.1}$$

[*Véase* también la ecuación (*10.4*).]

EJEMPLO 15.1. Si $|P(2)| \equiv |GH(2)| = 10$, la magnitud es $20 \log_{10} 10 = 20$ dB.

Puesto que el decibel es una unidad logarítmica, la **magnitud en dB** de una función de respuesta de frecuencia compuesta de un *producto* de términos es igual a la *suma* de las magnitudes en dB de los términos individuales. Así, cuando se emplea la escala logarítmica, la gráfica de magnitud de una función de respuesta de frecuencia que puede expresarse como el producto de más de un término, se obtiene al sumar las magnitudes en dB de las gráficas individuales para cada término del producto.

La gráfica de la *magnitud en dB en función del log* ω se llama **diagrama de magnitud de Bode**, y la gráfica de *ángulo de fase en función del log* ω es el **diagrama de ángulo de fase de Bode**. Algunas veces en la literatura técnica el diagrama de magnitud de Bode se llama *diagrama log-módulo*.

EJEMPLO 15.2. El diagrama de magnitud de Bode para la función de respuesta de frecuencia continua en el tiempo

$$P(j\omega) = \frac{100[1 + j(\omega/10)]}{1 + j\omega}$$

puede obtenerse al sumar los diagramas de magnitud de Bode para 100, $1 + j(\omega/10)$ y $1/(1 + j\omega)$.

15.3 La forma de Bode y la ganancia de Bode para sistemas continuos en el tiempo

Debido a las aproximaciones asintóticas, de la sección 15.4, es conveniente utilizar la llamada *forma de Bode* de una función de respuesta de frecuencia continua en el tiempo cuando se utilizan los diagramas de Bode para el análisis y el diseño.

La **forma de Bode** para la función

$$\frac{K(j\omega + z_1)(j\omega + z_2)\cdots(j\omega + z_m)}{(j\omega)^l(j\omega + p_1)(j\omega + p_2)\cdots(j\omega + p_n)}$$

en donde l es un entero no negativo, se obtiene al factorizar todos los p_i y z_i y reordenarlos para formar

$$\frac{\left[K\prod_{i=1}^{m} z_i \Big/ \prod_{i=1}^{n} p_i\right](1 + j\omega/z_1)(1 + j\omega/z_2)\cdots(1 + j\omega/z_m)}{(j\omega)^l(1 + j\omega/p_1)(1 + j\omega/p_2)\cdots(1 + j\omega/p_n)} \qquad (15.2)$$

La **ganancia de Bode** K_B se define como el coeficiente del numerador en la ecuación (*15.2*):

$$K_B \equiv \frac{K\prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{i=1}^{n} p_i} \qquad (15.3)$$

15.4 Diagramas de Bode de funciones de respuesta de frecuencia sencillas continuas en el tiempo y sus aproximaciones asintóticas

La constante K_B tiene una magnitud $|K_B|$ y un ángulo de fase de 0° si K_B es positiva, y de

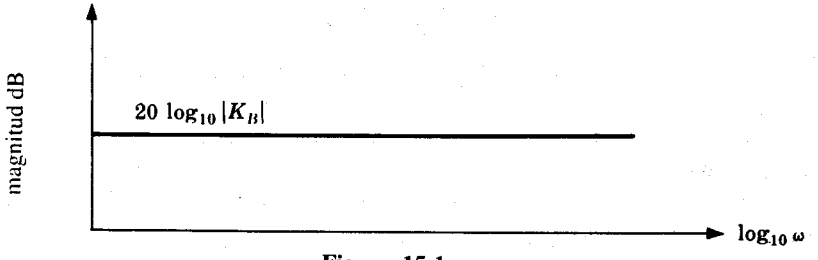


Figura 15-1

$-180°$ si K_B es negativa. En consecuencia los diagramas de Bode para K_B son simplemente líneas rectas horizontales, como las que se muestran en las figuras 15-1 y 15-2.

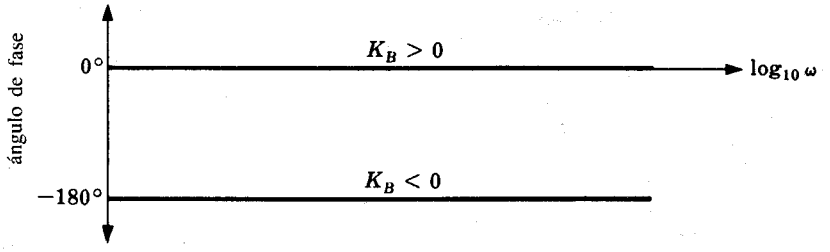


Figura 15-2

La función de respuesta de frecuencia (o función de transferencia sinusoidal) para un *polo de orden l en el origen* es

$$\frac{1}{(j\omega)^l} \tag{15.4}$$

Los diagramas de Bode para esta función son líneas rectas, como las que se muestran en las figuras 15-3 y 15-4.

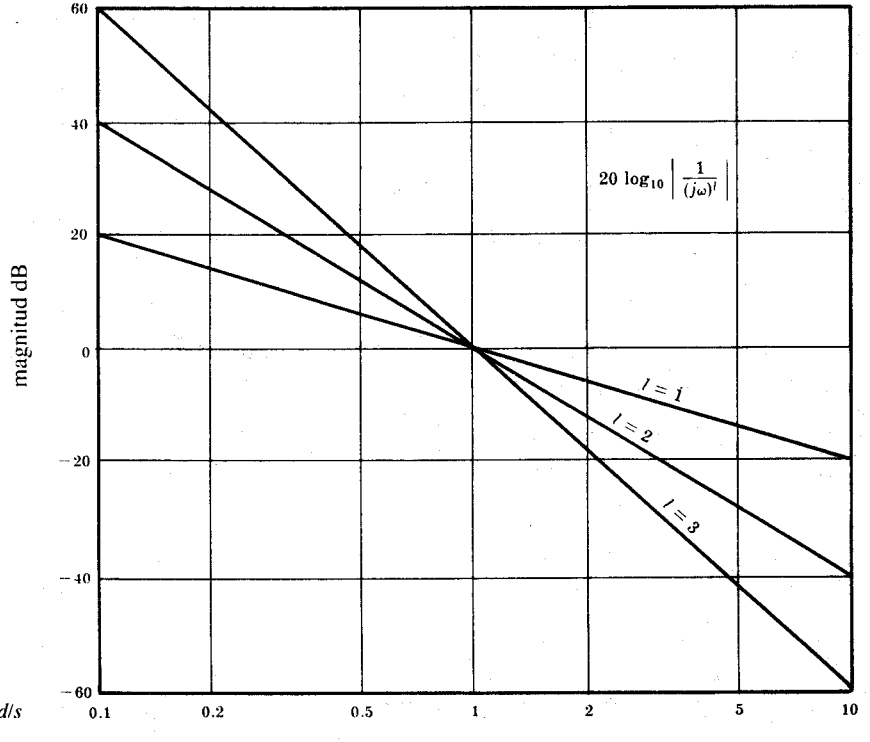


Figura 15-3

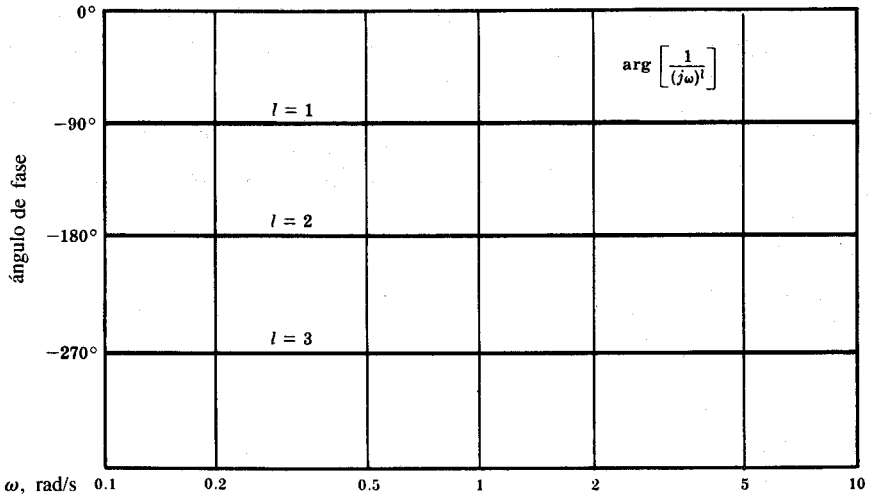


Figura 15-4

Para un *cero de orden l en el origen*,

$$(j\omega)^l. \tag{15.5}$$

los diagramas de Bode son las reflexiones alrededor de las líneas de 0 dB y 0° de las figuras 15-3 y 15-4, como se muestra en las figuras 15-5 y 15-6.

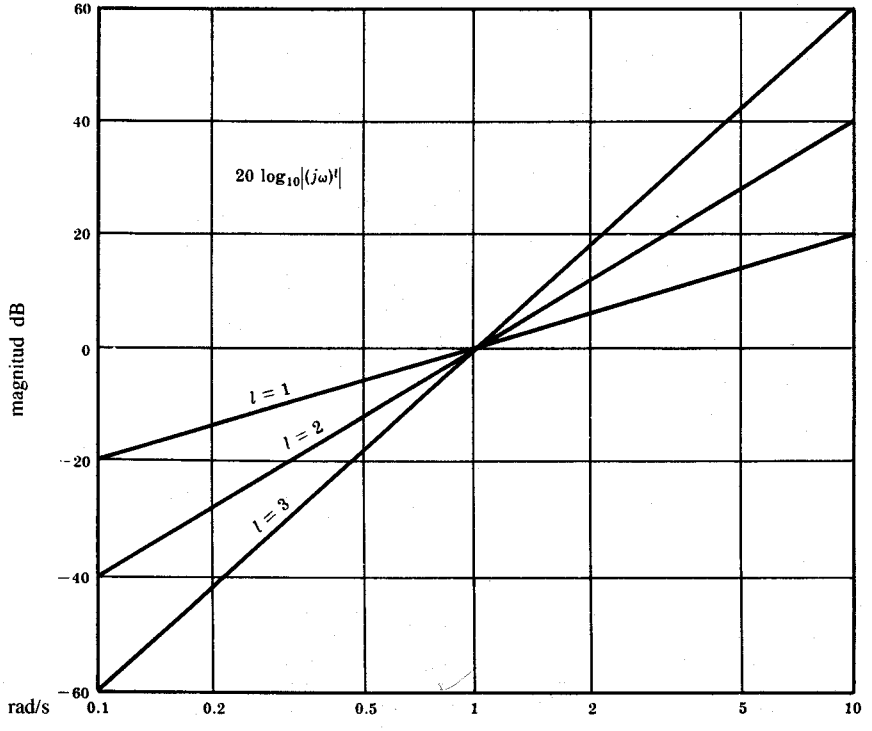


Figura 15-5

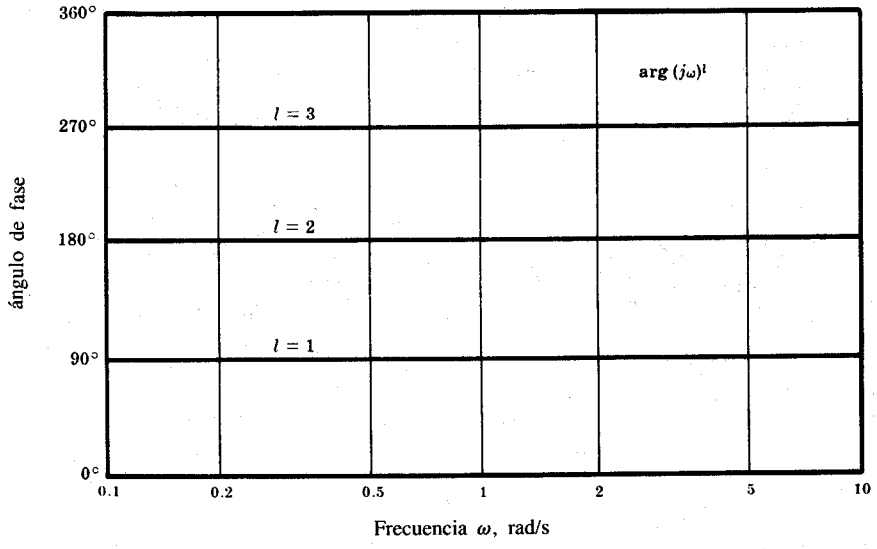


Figura 15-6

Considere la función de transferencia de *polo sencillo* $p/(s + p)$, $p > 0$. Los diagramas de Bode para su función de respuesta de frecuencia

$$\frac{1}{1 + j\omega/p} \tag{15.6}$$

se presenta en las figuras 15-7 y 15-8. Nótese que la escala de frecuencia logarítmica está normalizada en términos de p.

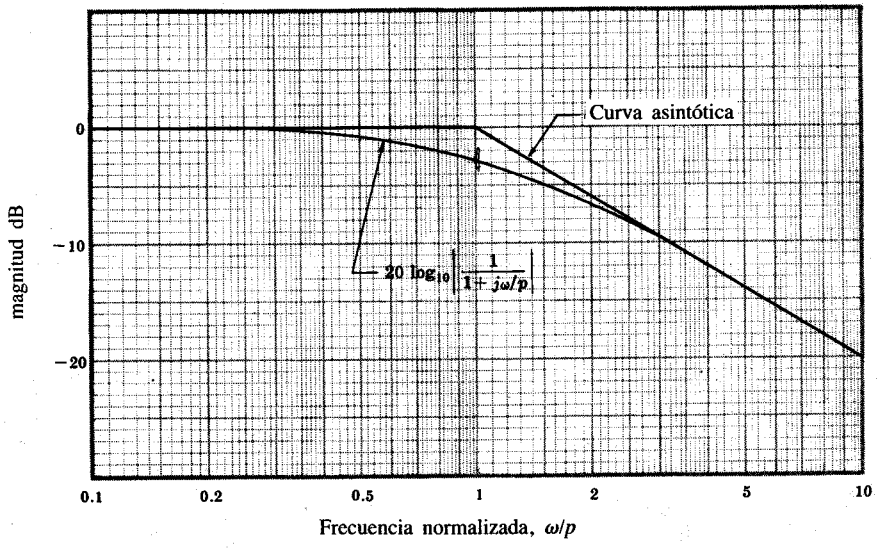


Figura 15-7

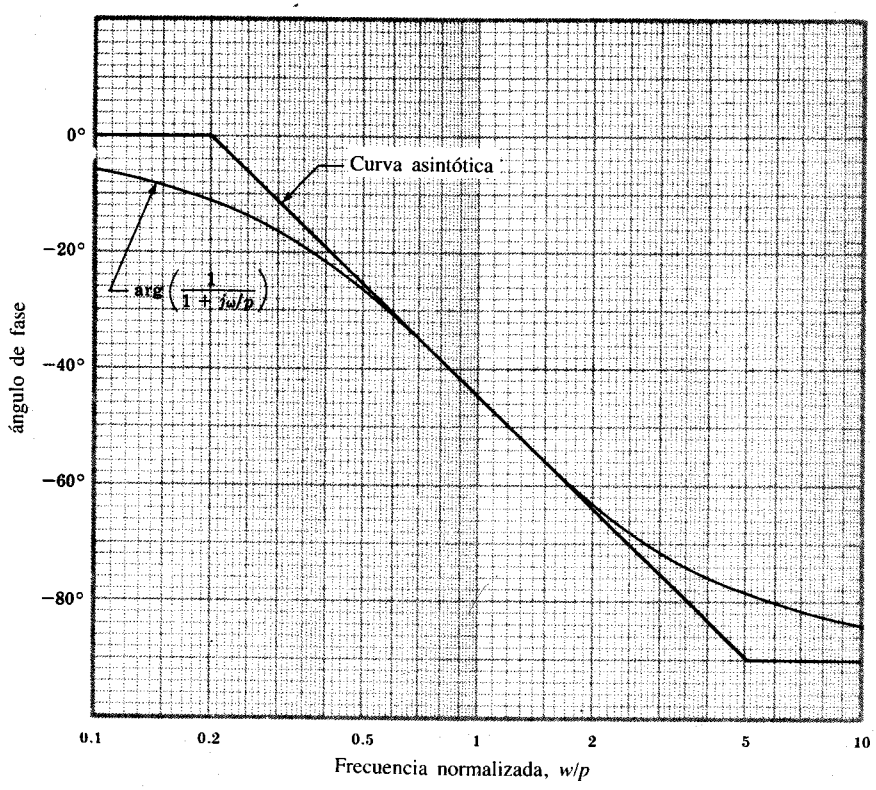


Figura 15-8

Para determinar las *aproximaciones asintóticas* para estos diagramas de Bode, vemos que para $\omega/p \ll 1$, u $\omega \ll p$,

$$20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega/p}\right| \cong 20\log_{10}1 = 0 \text{ dB}$$

y para $\omega/p \gg 1$, u $\omega \gg p$,

$$20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega/p}\right| \cong 20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega/p}\right| = -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{p}\right)$$

En consecuencia el diagrama de magnitud de Bode se aproxima asintóticamente a una línea recta horizontal a 0 dB a medida que ω/p se aproxima a cero, y a $-20\log_{10}(\omega/p)$ a medida que ω/p tiende a infinito (figura 15-7). Nótese que esta asíntota de alta frecuencia es una línea recta con una pendiente de -20 dB/década o -6 dB/octava cuando se representan en escalas logarítmicas de frecuencia, como se muestra en la figura 15-7. Las dos asíntotas se intersecan en la **frecuencia de corte** $\omega = p$ rad/s. Para determinar la asíntota del ángulo de fase, vemos que para $\omega/p \ll 1$, u $\omega \ll p$,

$$\arg\left(\frac{1}{1+j\omega/p}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\Big|_{\omega \ll p} \cong 0°$$

y para $\omega/p \gg 1$, u $\omega \gg p$,

$$\arg\left(\frac{1}{1+j\omega/p}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{p}\right)\Big|_{\omega \gg p} \cong -90°$$

Así, el diagrama de ángulo de fase de Bode tiende asintóticamente a 0° a medida que ω/p tiende a cero, y a $-90°$ a medida que ω/p tiende a infinito, como se muestra en la figura 15-8. Una línea recta asíntota de pendiente negativa puede utilizarse para unir la asíntota de 0° y la asíntota de $-90°$, trazando una línea desde la asíntota de 0° en $\omega = p/5$ hasta la asíntota de $-90°$ en $\omega = 5p$. Nótese que ésta es tangente a las curvas exactas en $\omega = p$.

En la tabla 15-1 se muestran los *errores* introducidos por estas aproximaciones asintóticas para la función de transferencia de polo sencillo a diferentes frecuencias.

Tabla 15-1. Errores asintóticos para $\dfrac{1}{1+j\omega/p}$

ω	$p/5$	$p/2$	p	$2p$	$5p$
Error de magnitud (dB)	-0.17	-0.96	-3	-0.96	-0.17
Error de ángulo de fase	$-11.3°$	$-0.8°$	0°	$+0.8°$	$+11.3°$

En las figuras 15-9 y 15-10 se muestran los diagramas de Bode y sus aproximaciones asintóticas para la función de respuesta de frecuencia de *cero sencillo*

$$1 + \frac{j\omega}{z_1} \qquad (15.7)$$

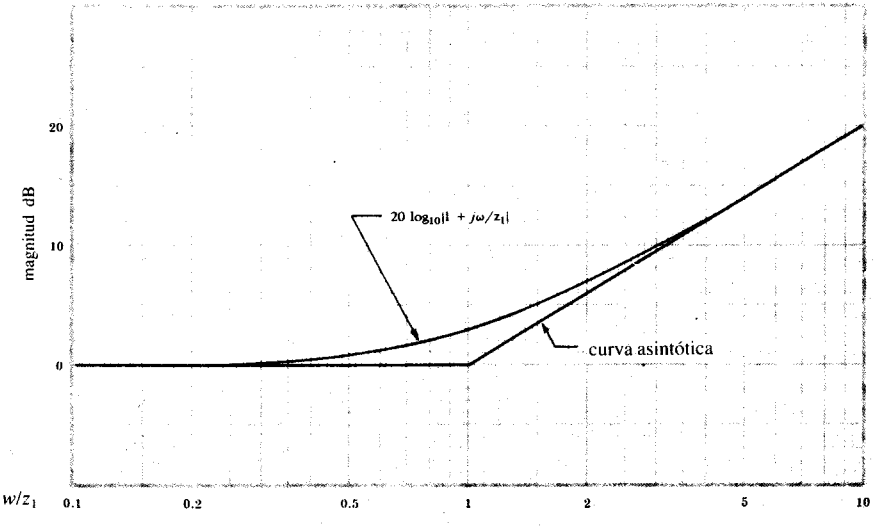


Figura 15-9

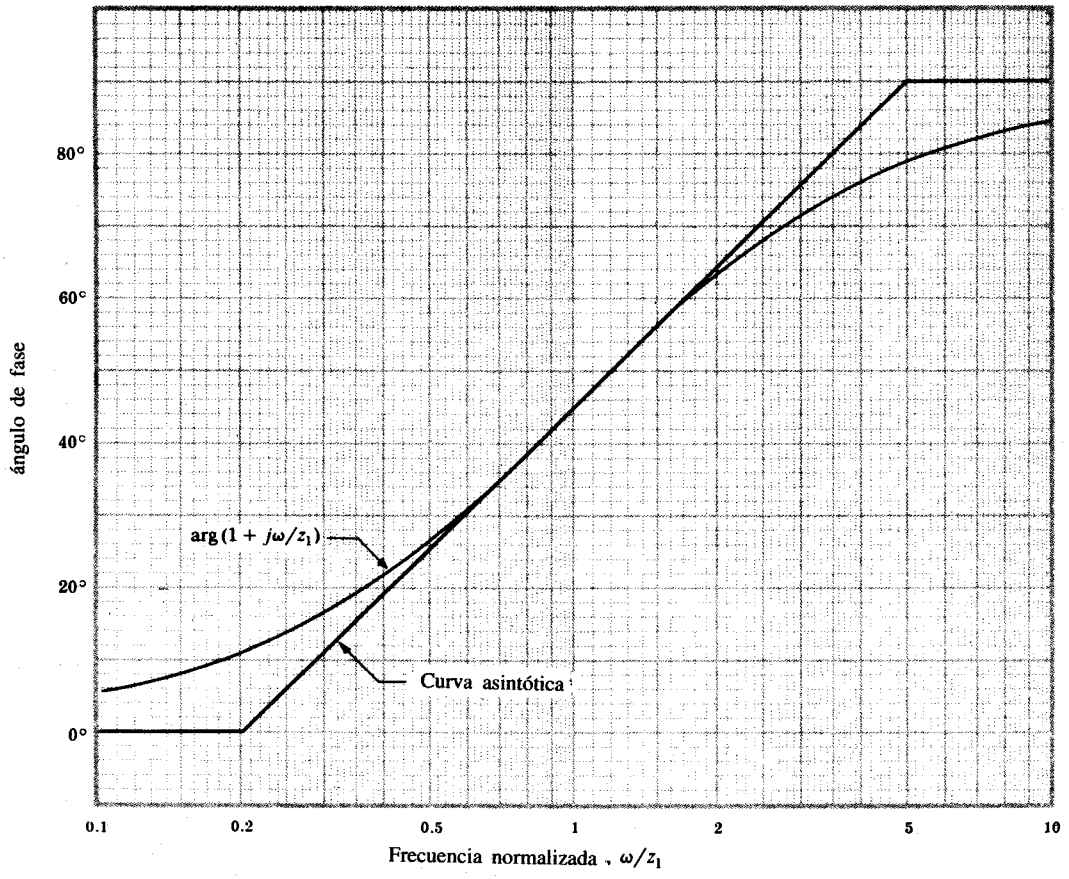

80°
60°
40°
20°
0°
ángulo de fase
arg(1 + jω/z1)
Curva asintótica
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
Frecuencia normalizada , ω/z1

Figura 15-10

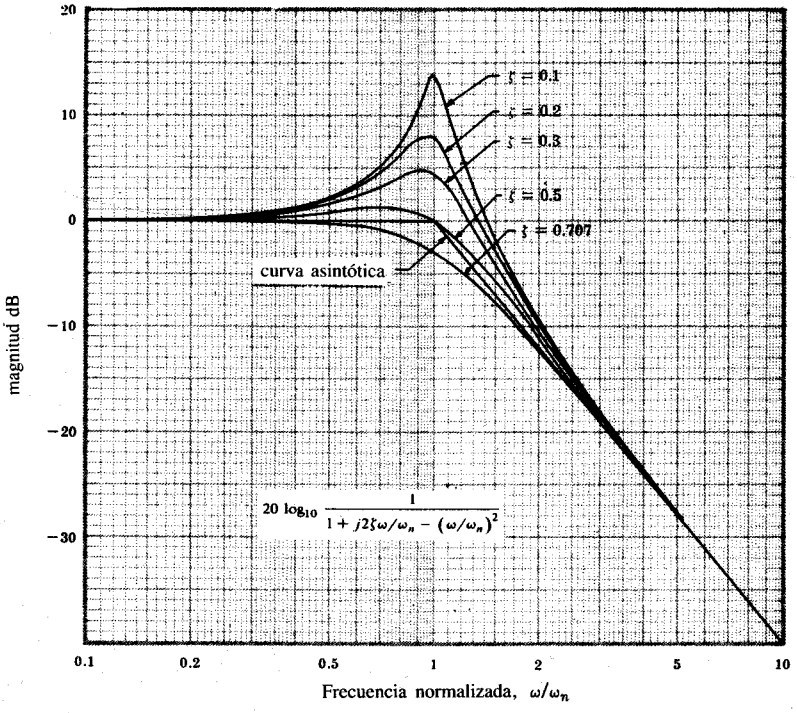


Figura 15-11

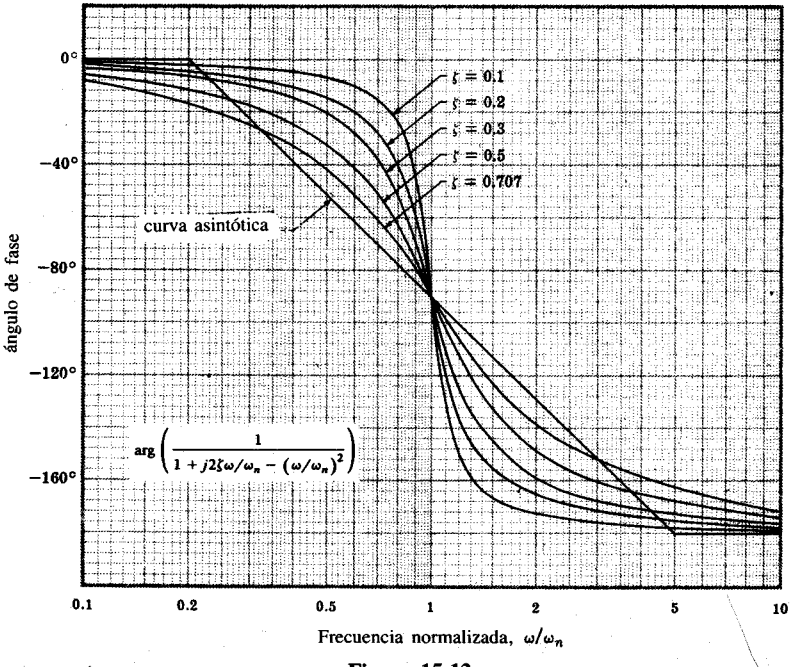


Figura 15-12

En las figuras 15-11 y 15-12 se muestran los diagramas de Bode y sus aproximaciones asintóticas para la función de respuesta de frecuencia de segundo orden con *polos complejos*,

$$\frac{1}{1+j2\zeta\omega/\omega_n-(\omega/\omega_n)^2} \qquad 0\le\zeta\le 1 \qquad (15.8)$$

Nótese que en estas gráficas la relación de amortiguación ζ es un parámetro.

La asíntota de magnitud que se muestra en la figura 15-11 tiene un frecuencia de corte en $\omega=\omega_n$, y una pendiente de alta frecuencia que es dos veces la de la asíntota para el caso del polo sencillo de la figura 15-7. La asíntota del ángulo de fase es similar a la de la figura 15-8 excepto que la parte de alta frecuencia se encuentra en $-180°$ en lugar de $-90°$, y el punto de tangencia o inflexión está en $-90°$.

Los diagramas de Bode para un par de *ceros complejos* son las reflexiones alrededor de las líneas de 0 dB y 0° para aquellos polos complejos.

15.5 Construcción de diagramas de Bode para sistemas continuos en el tiempo

Los diagramas de Bode de funciones de respuesta de frecuencia continuas en el tiempo se construyen sumando las contribuciones de magnitud y de ángulo de fase para cada polo y cada cero (o pares de polos y ceros complejos). A menudo son suficientes las aproximaciones asintóticas de estas gráficas. Si se desean gráficas más exactas, se consiguen muchos paquetes de programas de aplicación para efectuar de manera rápida esta tarea.

En general, para la función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(j\omega)=\frac{K_B(1+j\omega/z_1)(1+j\omega/z_2)\cdots(1+j\omega/z_m)}{(j\omega)^l(1+j\omega/p_1)(1+j\omega/p_2)\cdots(1+j\omega/p_n)} \qquad (15.9)$$

en donde l es un entero positivo o cero, la magnitud y el ángulo de fase están dados por

$$20\log_{10}|GH(j\omega)|=20\log_{10}|K_B|+20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{z_1}\right|+\cdots+20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{z_m}\right|$$
$$+20\log_{10}\frac{1}{|(j\omega)^l|}+20\log_{10}\frac{1}{|1+j\omega/p_1|}+\cdots+20\log_{10}\frac{1}{|1+j\omega/p_n|} \qquad (15.10)$$

y

$$\arg GH(j\omega)=\arg K_B+\arg\left(1+\frac{j\omega}{z_1}\right)+\cdots+\arg\left(1+\frac{j\omega}{z_m}\right)$$
$$+\arg\left(\frac{1}{(j\omega)^l}\right)+\arg\left(\frac{1}{1+j\omega/p_1}\right)+\cdots+\arg\left(\frac{1}{1+j\omega/p_n}\right) \qquad (15.11)$$

En las figuras 15-1 a 15-12 se muestran los diagramas de Bode para cada uno de los términos de las ecuaciones (*15.10*) y (*15-11*). Si $GH(j\omega)$ tiene polos o ceros complejos, los términos que tengan forma similar a la ecuación (*15.8*) simplemente se suman a las ecuaciones (*15.10*) y (*15.11*). El procedimiento de construcción se ilustra mejor mediante un ejemplo.

EJEMPLO 15.3. Los diagramas de Bode asintóticos para la función de respuesta de frecuencia

$$GH(j\omega) = \frac{10(1+j\omega)}{(j\omega)^2[1+j\omega/4-(\omega/4)^2]}$$

se construyen utilizando las ecuaciones (*15.10*) y (*15.11*):

$$20\log_{10}|GH(j\omega)| = 20\log_{10}10 + 20\log_{10}|1+j\omega| + 20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^2}\right| + 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega/4-(\omega/4)^2}\right|$$

$$\arg GH(j\omega) = \arg(1+j\omega) + \arg\left(1/(j\omega)^2\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j\omega/4-(\omega/4)^2}\right)$$

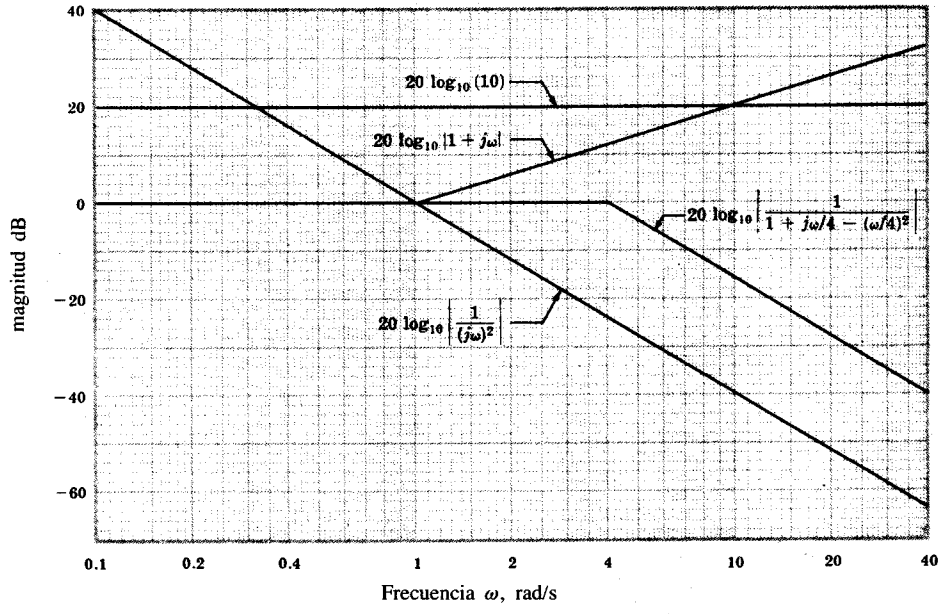


Figura 15-13

Los diagramas para cada uno de los términos en estas ecuaciones se obtienen de las figuras 15-1 a 15-12, y se presentan en las figuras 15-13 y 15-14. Los diagramas de Bode asintóticos para $GH(j\omega)$ se obtienen al sumar estas curvas, como se muestra en las figuras 15-15 y 15-16, en las cuales también se muestran, para comparación con las aproximaciones asintóticas, los diagramas de Bode para la función de respuesta de frecuencia generados por computador.

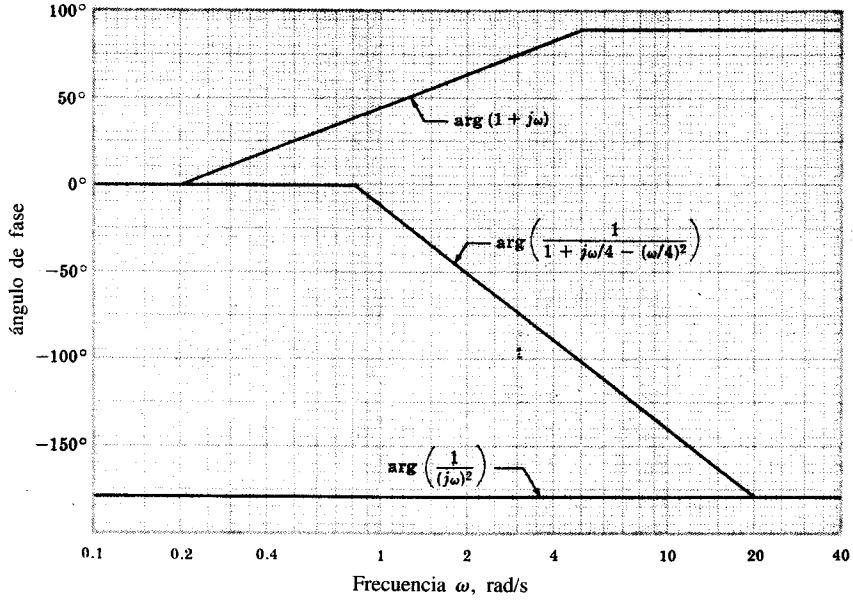


Figura 15-14

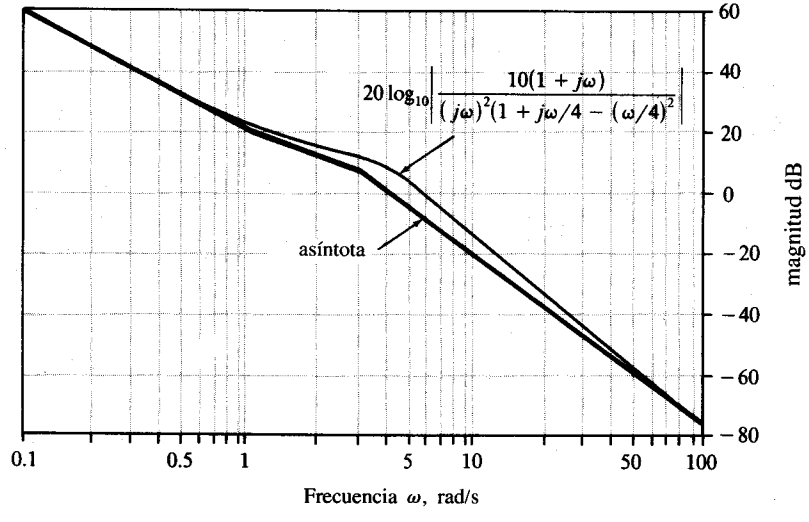


Figura 15-15

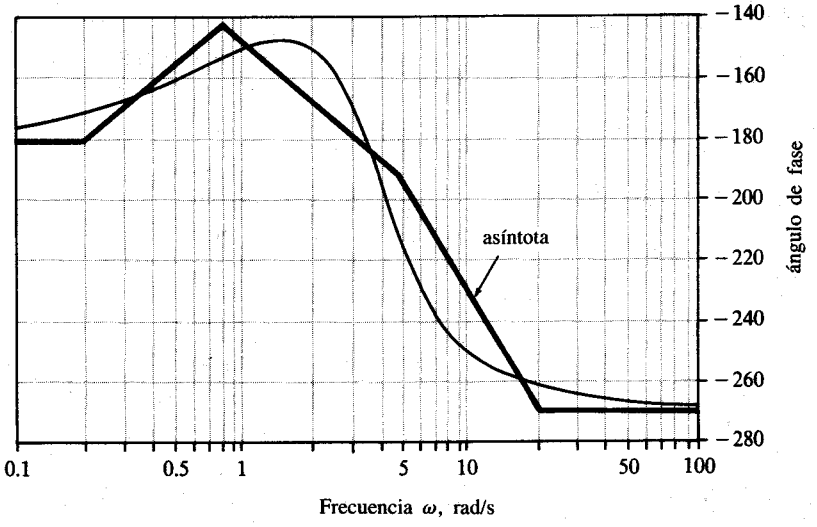


Figura 15-16

15.6 Diagramas de Bode de funciones de respuesta de frecuencia discretas en el tiempo

La forma factorizada de la función general de respuesta de frecuencia en malla abierta discreta en el tiempo es

$$GH(e^{j\omega T}) = \frac{K(e^{j\omega T}+z_1)(e^{j\omega T}+z_2)\cdots(e^{j\omega T}+z_m)}{(e^{j\omega T}+p_1)(e^{j\omega T}+p_2)\cdots(e^{j\omega T}+p_n)} \qquad (15.12)$$

No existen aproximaciones asintóticas simples, similares a las de la sección 15.4, para los términos individuales de la ecuación (*15.12*). Así que no hay ninguna ventaja particular para una *forma de Bode* del tipo de la ecuación (*15.12*) para sistemas discretos. En general, los computadores proporcionan la vía más conveniente para generar los diagramas de Bode de los sistemas discretos en el tiempo, y existen varios paquetes de programas de aplicación para realizar esta tarea.

Para la función general de respuesta de frecuencia en malla abierta de la ecuación (*15-12*), la magnitud y el ángulo de fase se obtienen por medio de

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|GH(e^{j\omega T})| &= 20\log_{10}|K| \\ &\quad + 20\log_{10}|e^{j\omega T}+z_1| + \cdots + 20\log_{10}|e^{j\omega T}+z_m| \\ &\quad + 20\log_{10}\frac{1}{|e^{j\omega T}+p_1|} + \cdots + 20\log_{10}\frac{1}{|e^{j\omega T}+p_n|} \end{aligned} \qquad (15.13)$$

y

$$\begin{aligned} \arg GH(e^{j\omega T}) &= \arg K + \arg(e^{j\omega T}+z_1) + \cdots \\ &\quad + \arg(e^{j\omega T}+z_m) + \arg\frac{1}{(e^{j\omega T}+p_1)} + \cdots + \arg\left(\frac{1}{e^{j\omega T}+p_n}\right) \end{aligned} \qquad (15.14)$$

Es importante hacer notar que la magnitud y el ángulo de fase de las funciones de respuesta de frecuencia discretas en el tiempo son periódicos en la variable de frecuencia angular real ω. Esto es cierto puesto que

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega + 2k\pi/T)T} = e^{j\omega T} e^{j2k\pi}$$

así $e^{j\omega T}$ es periódica en el dominio de la frecuencia con un periodo $2\pi/T$. De este modo, cada término tanto en la magnitud como en el ángulo de fase es periódico. En consecuencia, sólo es necesario generar diagramas de Bode en un intervalo angular de $-\pi \leq \omega T \leq \pi$ radianes; y normalmente la magnitud y el ángulo de fase se representan en términos del ángulo ωT en lugar de la frecuencia angular ω.

Otra propiedad útil de la función de respuesta de frecuencia discreta en el tiempo es que la magnitud es una función par de la frecuencia ω (y de ωT) y que el ángulo de fase es una función impar de ω (y de ωT).

EJEMPLO 15.4 En las figuras 15-17 y 15-18 se presentan los diagramas de Bode para la función de respuesta de frecuencia discreta en el tiempo

$$GH(e^{j\omega T}) = \frac{\frac{1}{100}(e^{j\omega T} + 1)^2}{(e^{j\omega T} - 1)(e^{j\omega T} + \frac{1}{3})(e^{j\omega T} + \frac{1}{2})}$$

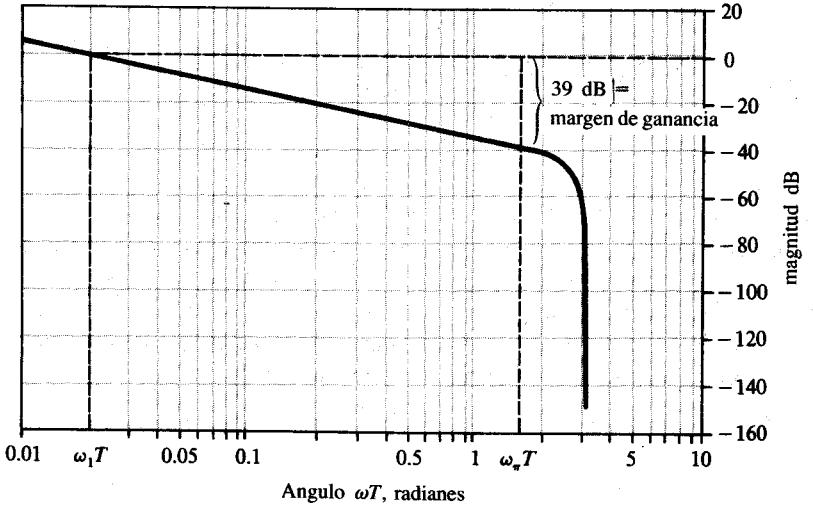


Figura 15-17

15.7 Estabilidad relativa

Los indicadores de estabilidad relativa "margen de ganancia" y "margen de fase", para sistemas discretos y sistemas continuos, se definen en términos de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta del sistema, en la sección 10.4. En consecuencia, estos parámetros se determinan de manera fácil a partir de los diagramas de Bode de $GH(\omega)$, como se ilustró en los ejemplos

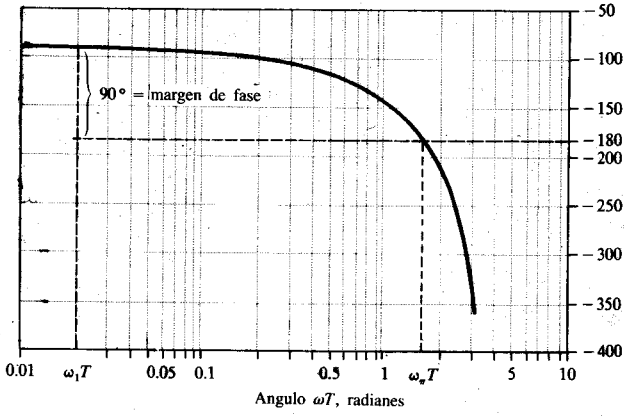


Figura 15-18

10.1 y 15.4. Puesto que 0 dB corresponde a una magnitud de 1, el **margen de ganancia** es el número de decibeles que $|GH(\omega)|$ está *por debajo* de 0 dB a la frecuencia de cruce de fase ω_π (el arg $GH(\omega_\pi) = -180°$). El **margen de fase** es el número de grados que el arg $GH(\omega)$ está por encima de $-180°$ a la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 ($|GH(\omega_1)| = 1$). Para determinar con exactitud ω_π, ω_1 y los márgenes de ganancia y de fase, deben utilizarse diagramas de Bode generados por computador.

En la mayor parte de los casos, márgenes de ganancia y de fase positivos, como se definieron antes, aseguran la estabilidad del sistema en malla cerrada. Sin embargo, puede dibujarse un diagrama de estabilidad de Nyquist (Capítulo 11) o utilizarse uno de los métodos del Capítulo 5 para verificar la estabilidad absoluta del sistema.

EJEMPLO 15.5. El sistema continuo en el tiempo cuyos diagramas de Bode se presentan en la figura 15-19, tiene un margen de ganancia de 8 dB y un margen de fase de 40°.

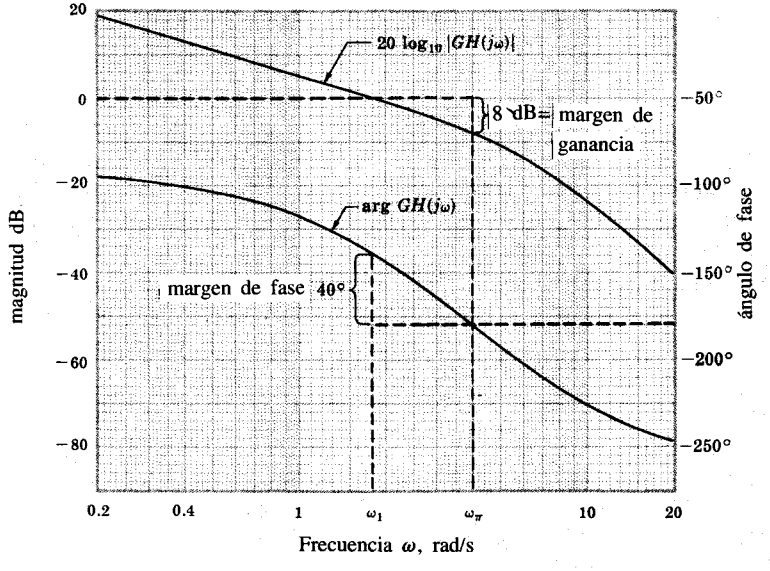


Figura 15-19

EJEMPLO 15.6. Para el sistema del ejemplo 15.4, el margen de ganancia es 39 dB, el ángulo en la frecuencia de cruce de fase ω_π es $\omega_\pi T = 1.57$ rad, el margen de fase es 90°, y el ángulo en la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 es $\omega_1 T = 0.02$ rad, tal como se ilustra en las figuras 15-17 y 15-18.

15.8 Respuesta de frecuencia en malla cerrada

Aunque no hay un método directo para representar la gráfica de la respuesta de frecuencia en malla cerrada $(C/R)(\omega)$ a partir de los diagramas de Bode de $GH(\omega)$, puede aproximarse de la siguiente manera, para sistemas de control tanto continuos como discretos en el tiempo. La respuesta de frecuencia en malla cerrada está dada por

$$\frac{C}{R}(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 + GH(\omega)}$$

Si $|GH(\omega)| \gg 1$,

$$\left.\frac{C}{R}(\omega)\right|_{|GH(\omega)| \gg 1} \cong \frac{G(\omega)}{GH(\omega)} = \frac{1}{H(\omega)}$$

Si $|GH(\omega)| \ll 1$,

$$\left.\frac{C}{R}(\omega)\right|_{|GH(\omega)| \ll 1} \cong G(\omega)$$

La respuesta de frecuencia en malla abierta para la mayor parte de los sistemas se caracteriza por una ganancia grande para bajas frecuencias y una disminución de la ganancia para frecuencias más altas, debido al usual exceso de polos sobre ceros. De esta manera, la respuesta de frecuencia en malla cerrada *para un sistema con retroalimentación unitaria* ($H = 1$) se aproxima a una magnitud de 1 (0 dB) y un ángulo de fase de 0° para frecuencias por debajo de la frecuencia de cruce de ganancia ω_1. Para frecuencias por encima de ω_1, la respuesta de frecuencia en malla cerrada puede aproximarse a la magnitud y al ángulo de fase de $G(\omega)$. *La frecuencia de cruce de ganancia ω_1 es para muchos sistemas un ancho de banda en malla cerrada aproximado* (*véase* el ejemplo 12.7).

EJEMPLO 15.7. En la figura 15-20 se presentan el diagrama de magnitud de Bode en malla abierta y el diagrama de magnitud de Bode en malla cerrada aproximado para el sistema continuo con retroalimentación unitaria representado por $G(j\omega) = 10/j\omega(1 + j\omega)$.

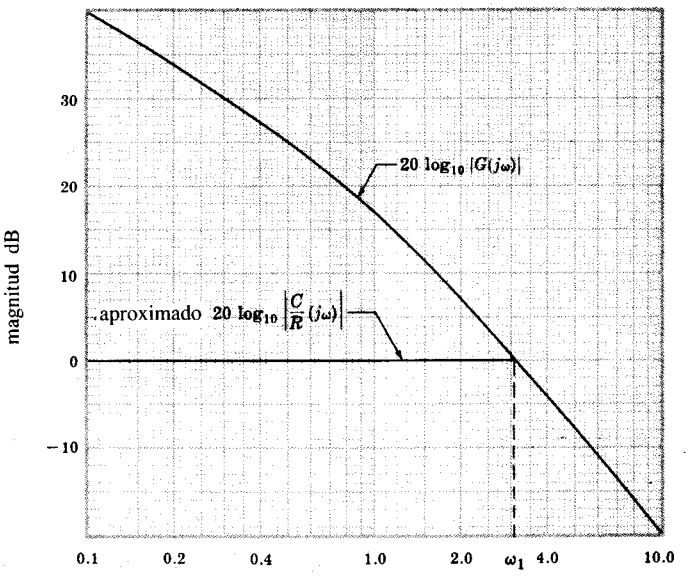


Figura 15-20

15.9 Análisis de Bode de sistemas discretos en el tiempo utilizando la transformada *w*

La transformada w, estudiada en la sección 10.7, puede utilizarse en el análisis de Bode de sistemas discretos en el tiempo. El algoritmo para el análisis de Bode utilizando la transformada w es:

1. Sustituir z por $(1 + w)/(1 - w)$ en la función de transferencia en malla abierta $GH(z)$:

$$GH(z)\big|_{z=\frac{1+w}{1-w}} \equiv GH'(w)$$

2. Hacer $w = j\omega_w$ y generar los diagramas de Bode para $GH'(j\omega_w)$, utilizando los métodos de las secciones 15.3 a 15.5.
3. Analizar la estabilidad relativa del sistema en el plano w determinando los márgenes de ganancia y de fase, las frecuencias de cruce de ganancia y de fase, la respuesta de frecuencia en malla cerrada, el ancho de banda y/o cualquier otra característica relacionada con la frecuencia de interés.
4. Transformar las frecuencias críticas determinadas en el paso 3 al dominio de la frecuencia del plano z utilizando la transformación $\omega T = 2 \tan^{-1}\omega_w$.

EJEMPLO 15.8. La función de transferencia en malla abierta

$$GH(z) = \frac{\frac{1}{100}(z+1)^2}{(z-1)(z+\frac{1}{3})(z+\frac{1}{2})}$$

se transforma al dominio w al hacer $$z = \frac{1+w}{1-w}$$

lo cual produce $$GH'(w) = \frac{-\frac{6}{100}(w-1)}{w(w+2)(w+3)}$$

Nótese, en particular, que el signo menos contribuye con $-180°$ de ángulo de fase, y el cero en $+1$ contribuye con $+90°$ en $\omega_w = 0°$. En las figuras 15-21 y 15-22 se muestran los diagramas de Bode de $GH'(j\omega_w)$

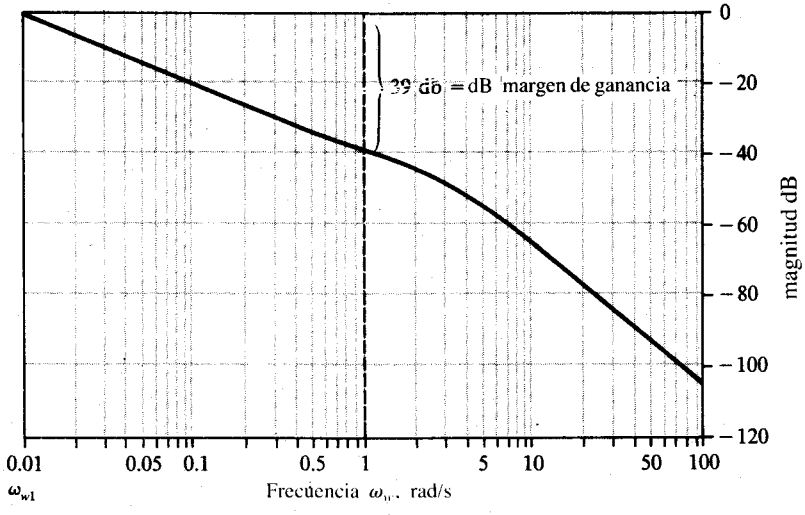


Figura 15-21

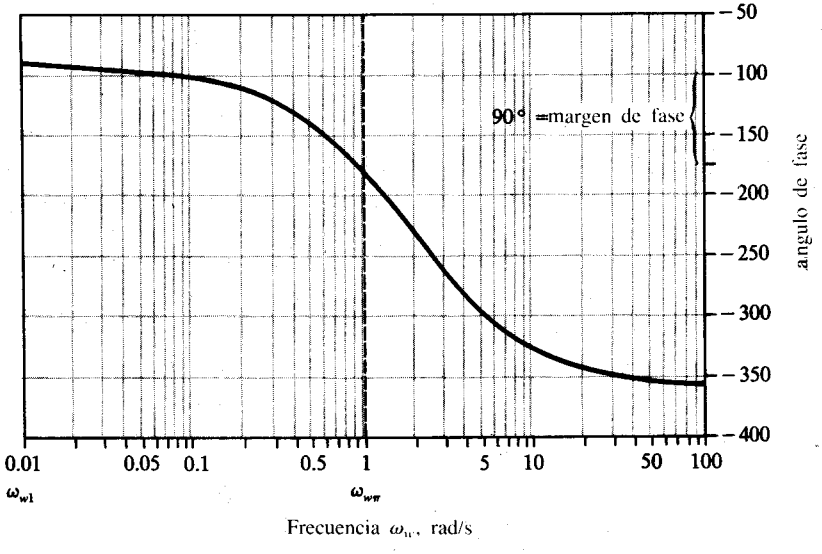


Figura 15-22

EJEMPLO 15.9. A partir de los diagramas de Bode del ejemplo 15.8, el margen de ganancia en el dominio w es 39 dB, y la frecuencia de cruce de fase es $\omega_{w\pi} = 1$ rad/s. Al transformar de nuevo al dominio z, la frecuencia de cruce de fase ω_π se obtiene a partir de

$$\omega_\pi T = 2\tan^{-1}\omega_{w\pi} = 1.57 \text{ rad}$$

Compare estos resultados con los del ejemplo 15.6, notará que son los mismos.

EJEMPLO 15.10. A partir de los diagramas de Bode del ejemplo 15.8, el margen de fase es 90°, y la frecuencia de cruce de ganancia es $\omega_{w1} = 0.01$ rad/s. Al transformar al dominio z, la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 se obtiene a partir de

$$\omega_1 T = 2\tan^{-1}\omega_{w1} = 0.02 \text{ rad}$$

Compare estos resultados con los del ejemplo 15.6, notará que son los mismos.

Con la amplia disponibilidad de programas de aplicación (*software*) para el análisis de sistemas de control, a menudo es innecesario el uso de la transformada w para el *análisis* de Bode de sistemas discretos en el tiempo. Sin embargo, para el *diseño* utilizando el análisis de Bode como se estudiará en el Capítulo 16, en donde la visión ganada en las técnicas de diseño de sistemas continuos en el tiempo se transfiere al diseño de sistemas discretos en el tiempo, la transformada w puede ser una herramienta muy útil.

Problemas resueltos

Escalas logarítmicas

15.1. Exprese las siguientes cantidades en decibeles (dB): *a*) 2, *b*) 4, *c*) 8, *d*) 20, *e*) 25, *f*) 140.

A partir de la ecuación (*15.1*),

$$\text{dB}_a = 20\log_{10}2 = 20(0.301) = 6.02 \qquad \text{dB}_d = 20\log_{10}20 = 20(1.301) = 26.02$$
$$\text{dB}_b = 20\log_{10}4 = 20(0.602) = 12.04 \qquad \text{dB}_e = 20\log_{10}25 = 20(1.398) = 27.96$$
$$\text{dB}_c = 20\log_{10}8 = 20(0.903) = 18.06 \qquad \text{dB}_f = 20\log_{10}140 = 20(2.146) = 42.92$$

Nótese que, puesto que $4 = 2 \times 2$, entonces para la parte *b*) tenemos

$$20\log_{10}4 = 20\log_{10}2 + 20\log_{10}2 = 12.04$$

y puesto que $8 = 2 \times 4$, entonces para la parte *c*) tenemos

$$20\log_{10}8 = 20\log_{10}2 + 20\log_{10}4 = 6.02 + 12.04 = 18.06$$

La forma de Bode y la ganancia de Bode en sistemas continuos en el tiempo

15.2 Determine la forma de Bode y la ganancia de Bode para la función de transferencia

$$GH = \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)(s+6)}$$

Al tomar 2 como factor en el numerador, y 4 y 6 en el denominador, y al hacer $s = j\omega$, se obtiene la forma de Bode

$$GH(j\omega) = \frac{(K/12)(1+j\omega/2)}{(j\omega)^2(1+j\omega/4)(1+j\omega/6)}$$

La ganancia de Bode es $K_B = K/12$.

15.3. ¿Cuándo la ganancia de Bode es igual a la ganancia de c.c. (magnitud a frecuencia cero) de una función de transferencia?

La ganancia de Bode es igual a la ganancia de c.c. de cualquier función de transferencia sin polos ni ceros en el origen [$l = 0$ en la ecuación (*15.2*)].

Diagramas de Bode de funciones de respuesta de frecuencia sencillas

15.4. Demuestre que el diagrama de magnitud de Bode para $(j\omega)^l$ es una línea recta.

El diagrama de magnitud de Bode para $(j\omega)^l$ es una representación gráfica de $20 \log_{10}\omega^l$ en términos de $\log_{10}\omega$. De esta manera

$$\text{pendiente} = \frac{d(20\log_{10}\omega^l)}{d(\log_{10}\omega)} = \frac{20l\,d(\log_{10}\omega)}{d(\log_{10}\omega)} = 20l$$

Puesto que la pendiente es constante para cualquier l, el diagrama de magnitud de Bode es una línea recta.

15.5. Determine: 1) las condiciones bajo las cuales el diagrama de magnitud de Bode para un par de polos complejos tiene un pico en un valor infinito ω, diferente de cero; y 2) la frecuencia a la cual se presenta ese pico.

La magnitud de Bode está dada por

$$20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j2\zeta\omega/\omega_n-(\omega/\omega_n)^2}\right|$$

Puesto que el logaritmo es una función que aumenta de manera monótona, la magnitud en decibeles tiene un pico (máximo) si y sólo si la magnitud en sí misma es máxima. La magnitud al cuadrado, que es máxima cuando la magnitud también lo es, resulta

$$\frac{1}{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+4(\zeta\omega/\omega_n)^2}$$

Al tomar la derivada de esta función e igualarla a cero se produce

$$\frac{(4\omega/\omega_n^2)\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]-8\zeta^2\omega/\omega_n^2}{\left\{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+4(\zeta\omega/\omega_n)^2\right\}^2}=0$$

o

$$1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2-2\zeta^2=0$$

y la frecuencia en el pico es $\omega=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$. Puesto que ω debe ser real, por definición, la magnitud tiene un pico en un valor ω diferente de cero si y sólo si $1-2\zeta^2>0$ ó $\zeta<1/\sqrt{2}=0.707$. Para $\zeta\geq 0.707$, la magnitud de Bode disminuye de manera monótona.

Construcción de diagramas de Bode para sistemas continuos en el tiempo

15.6. Construya los diagramas de Bode asintóticos para la función de respuesta de frecuencia

$$GH(j\omega)=\frac{1+j\omega/2-(\omega/2)^2}{j\omega(1+j\omega/0.5)(1+j\omega/4)}$$

Los diagramas de Bode asintóticos se determinan al sumar las gráficas de las representaciones asintóticas de cada uno de los términos de $GH(j\omega)$, como se hizo en las ecuaciones (*15.10*) y (*15.11*). En las figuras 15-23 y 15-24 se presentan las asíntotas de cada uno de estos términos, y los diagramas de Bode asintóticos para $GH(j\omega)$, en las figuras 15-25 y 15-26. Para comparación se muestran los diagramas de Bode exactos generados por computador.

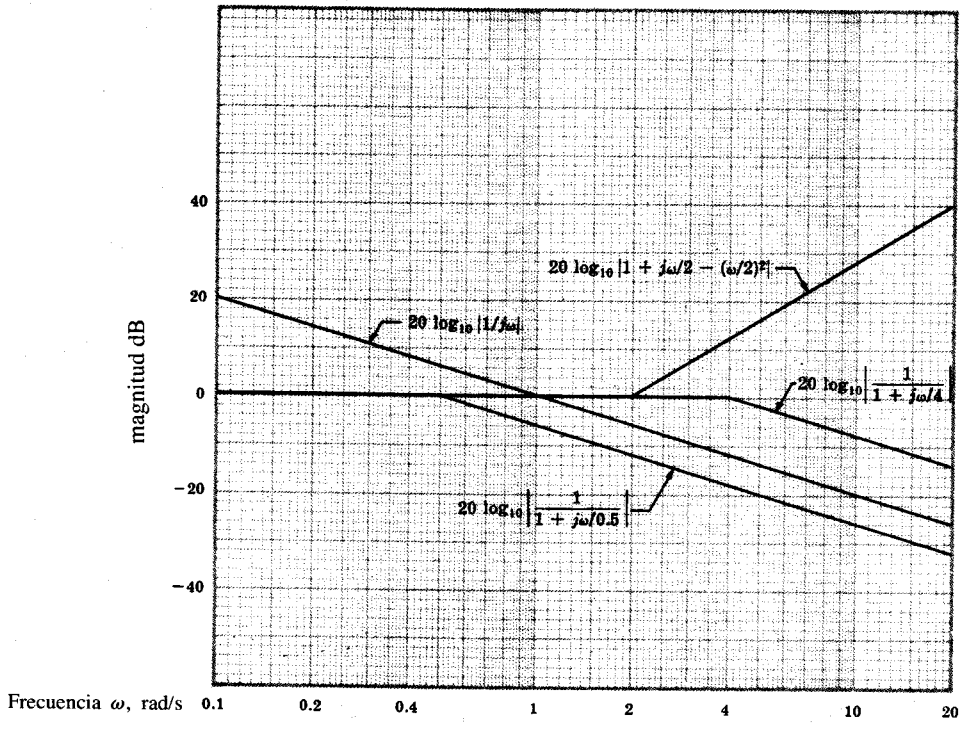


Figura 15-23

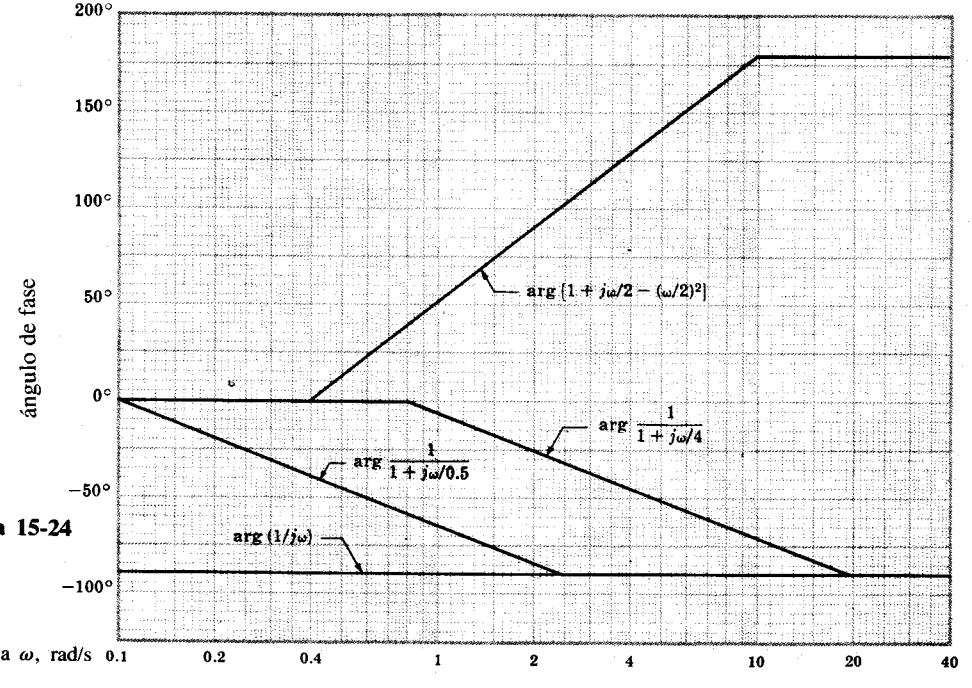


Figura 15-24

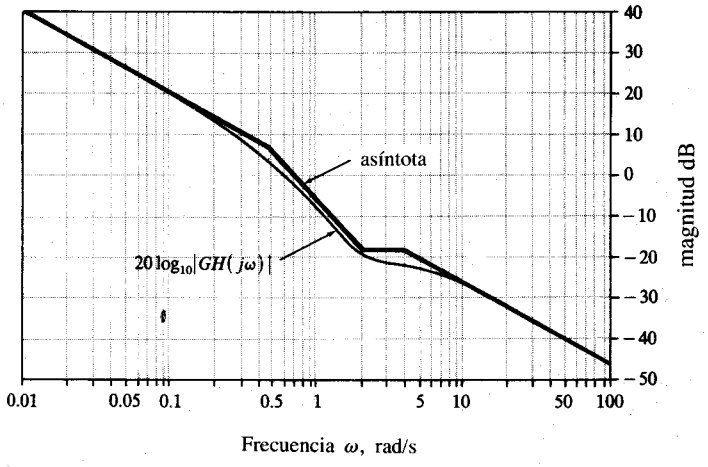


Figura 15-25

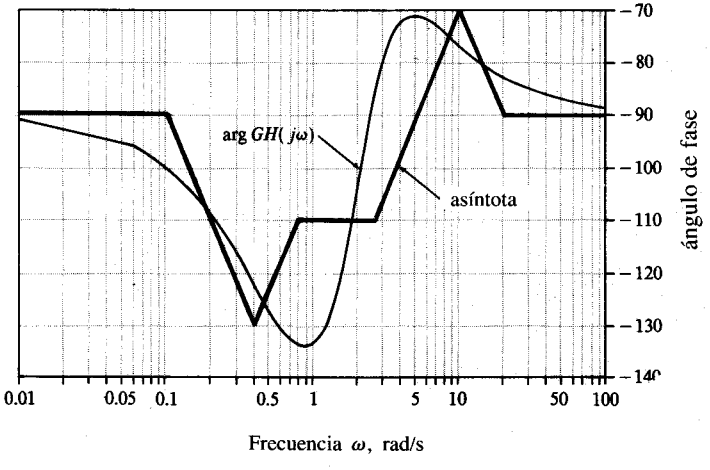


Figura 15-26

15.7. Construya los diagramas de Bode para la función de respuesta de frecuencia

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1 + j\omega/2)(1 + j\omega/5)}$$

Los diagramas de Bode asintóticos se construyen al sumar las gráficas asintóticas de cada término de $GH(j\omega)$, como se hizo en las ecuaciones (*15.10*) y (*15.11*), y se presentan en las figuras 15-27 y 15-28. Por computador se determinaron numéricamente curvas más exactas, que también se muestran para comparación.

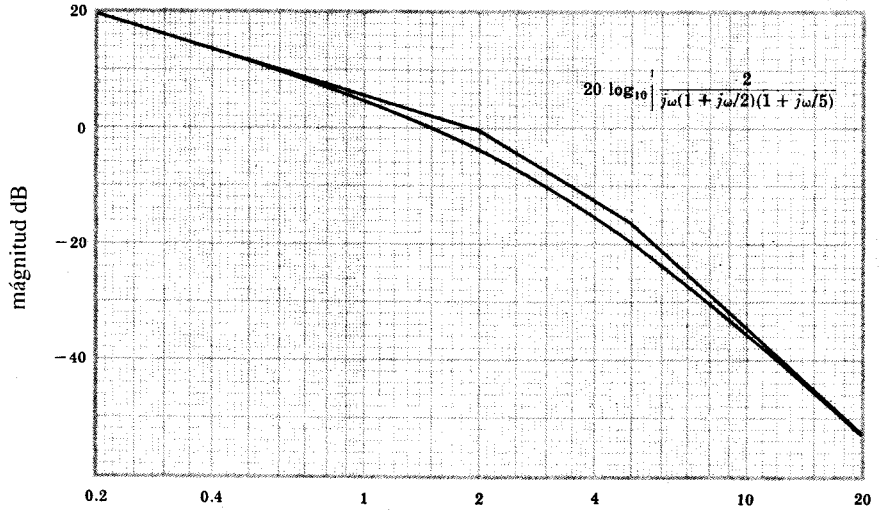


Figura 15-27

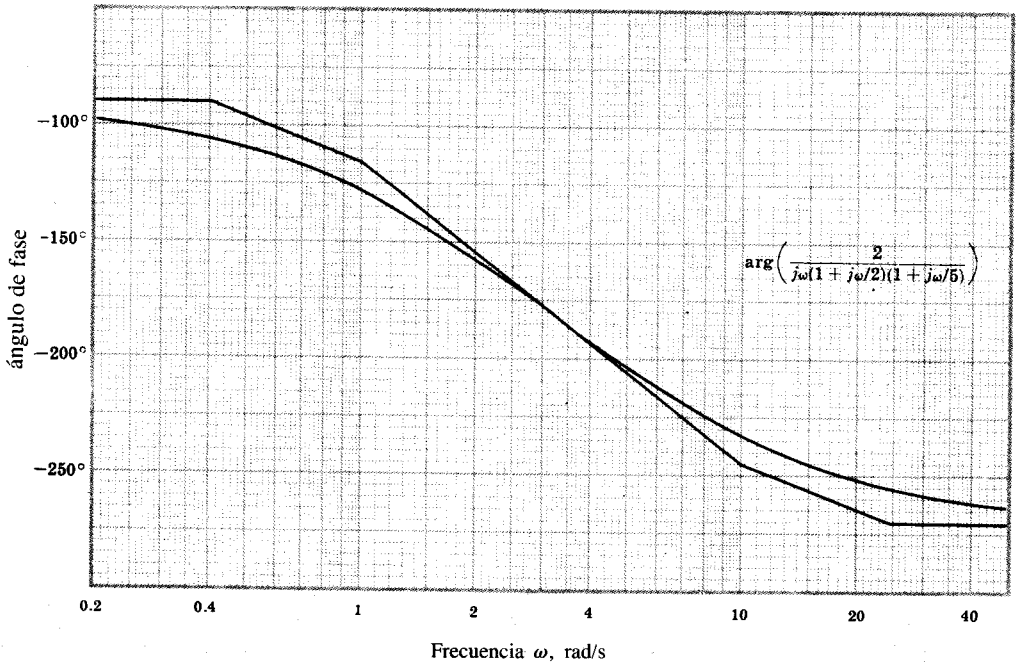


Figura 15-28

15.8. Construya los diagramas de Bode para la función de transferencia en malla abierta $GH = 2(s+2)/(s^2-1)$.

Con $s = j\omega$, la forma de Bode para esta función de transferencia es

$$GH(j\omega) = \frac{-4(1+j\omega/2)}{(1+j\omega)(1-j\omega)}$$

Esta función tiene un polo en la mitad derecha del plano [debido el término $1/(1-j\omega)$] la cual no es una de las funciones normales presentadas en la sección 15.4. Sin embargo, esta función tiene la misma magnitud que $1/(1+j\omega)$, y el mismo ángulo de fase que $1+j\omega$. De esta manera, para una función de la forma $1/(1-j\omega/p)$, la magnitud puede determinarse a partir de la figura 15-7, y el ángulo de fase, a partir de la figura 15-10. Para este problema las contribuciones al ángulo de fase de los términos $1/(1+j\omega)$ y $1/(1-j\omega)$ se cancelan entre sí. En la figura 15-29 se presentan las asíntotas para el diagrama de magnitud de Bode, junto con un diagrama de Bode más exácto. El ángulo de fase de Bode se determina solamente a partir del arg K_B = arg $(-4) = -180°$ y del cero en $\omega = 2$, como se muestra en la figura 15-30.

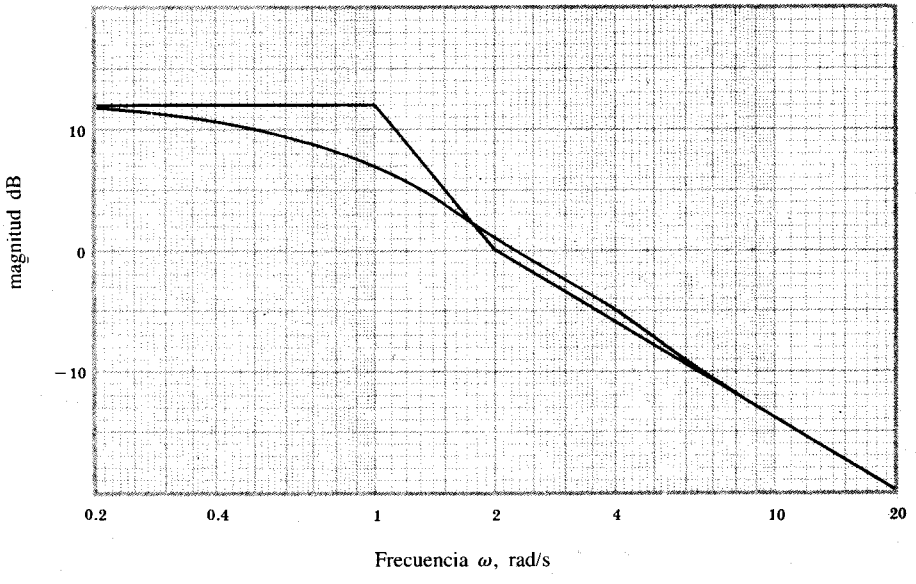


Figura 15-29

Estabilidad relativa

15.9. Para el sistema con función de transferencia en malla abierta, del problema 15.6, encuentre ω_1, ω_π, el margen de ganancia y el margen de fase.

Utilizando la curva de magnitud exacta que se presenta en la figura 15-25, la frecuencia de cruce de ganancia es $\omega_1 = 0.62$. La frecuencia de cruce de fase ω_π es indeterminada porque el arg $GH(j\omega)$ nunca cruza $-180°$ (*véase* la figura 15-26). El arg $GH(j\omega_1)$ = arg $GH(j\,0.62)$ es $-129°$. Por tanto el margen de fase es $-129° + 180° = 51°$. Puesto que ω_π es indeterminado, también lo es el margen de ganancia.

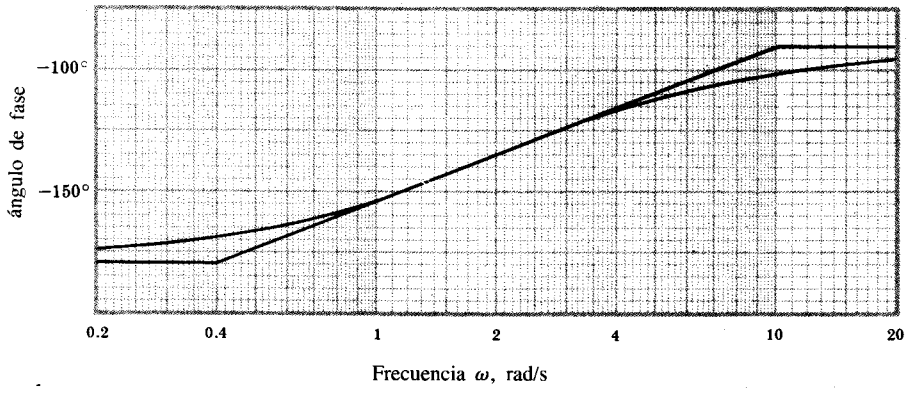


Figura 15-30

15.10. Determine los márgenes de ganancia y de fase para los sistemas con la función de respuesta de frecuencia en malla abierta del problema 15.7.

A partir de la figura 15-27, $\omega_1 = 1.5$; y a partir de la figura 15-28, el arg $GH(j\omega_1) = -144°$. Por tanto el margen de fase es $180° - 144° = 36°$. A partir de la figura 15-28, $\omega_\pi = 3.2$, y el margen de ganancia leído de la figura 15-27 es $-20 \log_{10} |GH(j\omega_\pi)| = 11$ dB.

15.11. Determine los márgenes de ganancia y de fase para el sistema con la función de transferencia en malla abierta del problema 15.8.

A partir de la figura 15-29, $\omega_1 = 2.3$ rad/s. A partir de la figura 15-30, el arg $GH(j\omega_1) = -127°$. Por tanto el margen de fase es $180° - 127° = 53°$. Como se muestra en la figura 15-30, el arg $GH(j\omega)$ tiende a $-180°$ a medida que ω disminuye. Puesto que el arg $GH(j\omega) = -180°$ únicamente en $\omega = 0$, entonces $\omega_\pi = 0$. Por tanto el margen de ganancia es $-20 \log_{10}|GH(j\omega_\pi)| = -12$ dB utilizando el procedimiento normal. Aunque un margen de ganancia negativo indica inestabilidad para la mayor parte de los sistemas, este sistema es estable, como puede verificarse mediante el diagrama de estabilidad de Nyquist que se muestra en la mitad figura 15-31. Recuerde que el sistema tiene un polo de malla abierta en la mitad derecha del plano; pero el cero de GH en -2 actúa para estabilizar el sistema para $K = 2$.

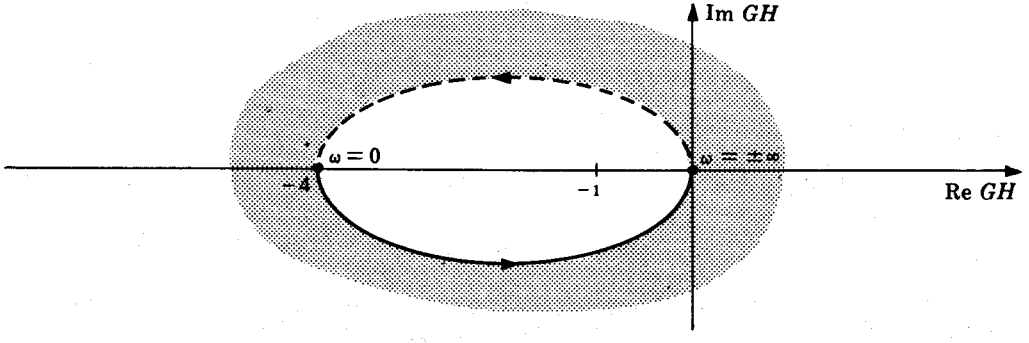


Figura 15-31

Respuesta de frecuencia en malla cerrada

15.12. Para el sistema del ejemplo 15.7, con $H = 1$, determine la función de respuesta de frecuencia en malla cerrada y compare el diagrama de magnitud real de Bode en malla cerrada con el diagrama aproximado del ejemplo 15.7.

Para este sistema, $GH = 10/s(s + 1)$. Entonces

$$\frac{C}{R} = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

y

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/10 - \omega^2/10}$$

Por tanto, el diagrama de magnitud de Bode en malla cerrada corresponde a la figura 15-11, con $\zeta = 0.18$ y $\omega_n = 3.16$. A partir de esta gráfica, el ancho de banda real de 3 dB es $\omega/\omega_n = 1.5$ en forma normalizada; de donde, puesto que $\omega n = 3.16$, AB = 1.5(3.16) = 4.74 rad/s. El ancho de banda aproximado de 3 dB determinado a partir de la figura 15-20 del ejemplo 15.7 es 3.7 rad/s. Nótese que $\omega_n = 3.16$ rad/s para el sistema en malla cerrada se corresponde muy bien con $\omega_1 = 3.1$ rad/s a partir de la figura 15-20. De esta manera la frecuencia de cruce de ganancia del sistema en malla abierta se corresponde muy bien con ω_n del sistema en malla cerrada, aunque el ancho de banda aproximado de 3 dB, determinado antes, no es muy exacto. La razón de esto es que el diagrama de magnitud de Bode aproximado de la figura 15-20 no muestra los picos que se presentan en la curva exacta.

15.13. Para el sistema discreto en el tiempo con función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(z) = \frac{3(z+1)(z+\frac{1}{3})}{8z(z-1)(z+\frac{1}{2})} \qquad H = 1$$

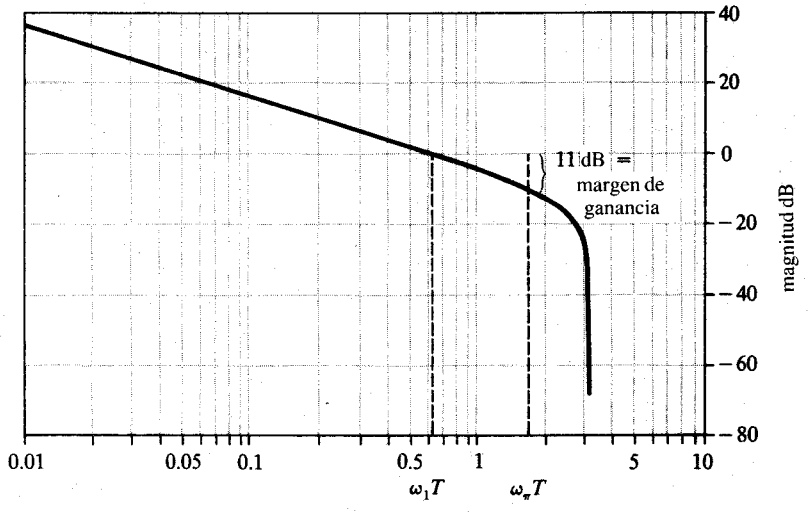
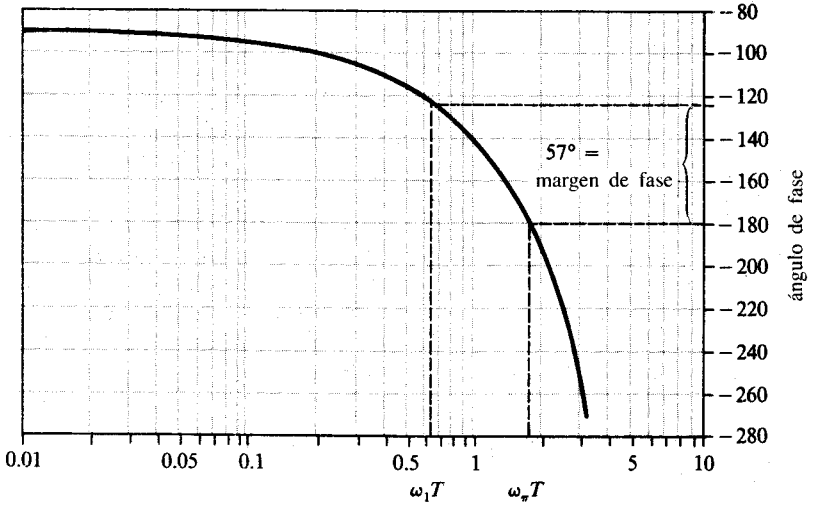


Figura 15-32

encuentre el margen de ganancia, el margen de fase, el ángulo de cruce de fase y el ángulo de cruce de ganancia.

En las figuras 15-32 (*véase* página 497) y 15-33 se muestran los diagramas de Bode para este sistema. El ángulo de cruce de fase $\omega_\pi T$ es 1.74 rad, determinado a partir de la figura 15-33. En la figura 15-32 se encuentra que el correspondiente margen de ganancia es 11 dB. El ángulo de cruce de ganancia $\omega_1 T$ es 0.63 rad, determinado a partir de la figura 15-32. El correspondiente margen de fase que se encuentra sobre la figura 15-33 es 57°.



Angulo ωT, radianes

Figura 15-33

Problemas suplementarios

15.14. Construya los diagramas de Bode para la función de respuesta de frecuencia en malla abierta.

$$GH(j\omega) = \frac{4(1+j\omega/2)}{(j\omega)^2(1+j\omega/8)(1+j\omega/10)}$$

15.15. Construya los diagramas de Bode y determine los márgenes de ganancia y de fase para el sistema con la función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(j\omega) = \frac{4}{(1+j\omega)(1+j\omega/3)^2}$$

15.16. Resuelva los problemas 13.35 y 13.37 construyendo los diagramas de Bode.

15.17. Desarrolle el problema 13.52 utilizando los diagramas de Bode.

15.18. Desarrolle el problema 11.59 utilizando los diagramas de Bode.

Capítulo 16

Diseño utilizando el análisis de Bode

16.1 Filosofía del diseño

El diseño de un sistema de control con retroalimentación utilizando las técnicas de Bode trae consigo determinar y redeterminar los diagramas de magnitud y de ángulo de fase de Bode hasta satisfacer las especificaciones del sistema. Estas se expresan más convenientemente en términos de indicadores de desempeño en el dominio de la frecuencia, como son los márgenes de ganancia y de fase para el desempeño transitorio y las constantes de error (Capítulo 9) para la respuesta en estado estacionario en el dominio del tiempo.

La conformación de diagramas de Bode asintóticos de sistemas continuos en el tiempo sumando compensación en cascada o por retroalimentación, es un procedimiento relativamente simple. En las secciones 16.3, 16.4 y 16.5 se presentan los diagramas de Bode para varias redes de compensación comunes continuas en el tiempo. Con estas gráficas las contribuciones de magnitud y de ángulo de fase de un compensador particular pueden sumarse directamente a los diagramas de Bode del sistema no compensado. A menudo es necesario corregir los diagramas de Bode asintóticos en las fases finales del diseño para verificar de manera exacta la satisfacción de las especificaciones de desempeño.

Puesto que no existen diagramas de Bode asintóticos simples para sistemas discretos en el tiempo, la determinación y la redeterminación de diagramas de Bode para sistemas discretos en el tiempo no es tan simple e intuitiva como para los sistemas continuos en el tiempo. Sin embargo, al transformar al plano w, la función de transferencia discreta en el tiempo, el diseño de sistemas discretos en el tiempo puede efectuarse por medio de técnicas continuas en el tiempo.

16.2 Compensación del factor de ganancia

En algunos casos es posible satisfacer todas las especificaciones del sistema simplemente ajustando el factor de ganancia K en malla abierta. El ajuste del factor de ganancia K no afecta el diagrama del ángulo de fase. Esto sólo desplaza el diagrama de magnitud hacia arriba o hacia abajo, en correspondencia con el aumento o la disminución de K. El procedimiento más simple es alterar la escala de dB del diagrama de magnitud de acuerdo con el cambio en K, en lugar de volver a construir toda la curva. Por ejemplo, si K se duplica la escala de dB debe desplazarse $20 \log_{10} 2 = 6.02$ dB hacia abajo.

Cuando se trabaja con diagramas de Bode continuos en el tiempo, es más conveniente utilizar la ganancia de Bode:

$$K_B = \frac{K \prod_{i=1}^{m} z_i}{\prod_{i=1}^{n} p_i}$$

en donde $-p_i$ y $-z_i$ son los polos y ceros finitos de GH.

EJEMPLO 16.1. En la figura 16-1 se muestran los diagramas de Bode para

$$GH(j\omega) = \frac{K_B}{j\omega(1 + j\omega/2)}$$

para $K_B = 1$.

La cantidad máxima en que puede incrementarse K_B para mejorar el desempeño en estado estacionario del sistema sin disminuir el margen de fase por debajo de 45°, se determina como sigue. En la figura 16-1, el margen de fase es 45° si la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 es 2 rad/s, y el diagrama de magnitud puede subirse a lo sumo en 9 dB antes que ω_1 se haga 2 rad/s. Así K_B puede incrementarse hasta en 9 dB sin disminuir el margen de fase por debajo de 45°.

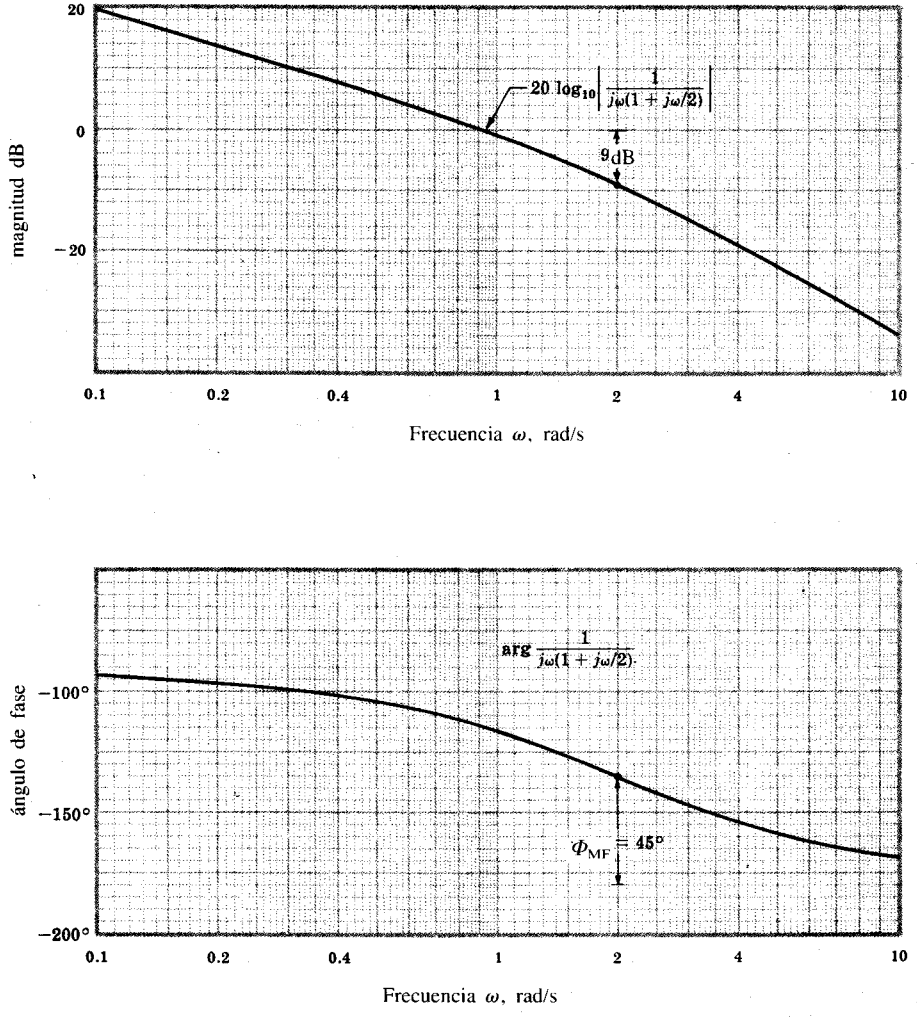


Figura 16-1

16.3 Compensación por adelanto para sistemas continuos en el tiempo

El compensador por adelanto, que se presentó en las secciones 6.3 y 12.4, tiene la siguiente forma de Bode de función de respuesta de frecuencia:

$$P_{\text{adelanto}}(j\omega) = \frac{(a/b)(1 + j\omega/a)}{1 + j\omega/b} \tag{16.1}$$

En la figura 16-2 se presentan los diagramas de Bode para este compensador con diferentes *relaciones de adelanto a/b*. Estas gráficas ilustran que la adición a un sistema de un compensador por adelanto en cascada disminuye la totalidad de la curva de magnitud en la región de baja frecuencia y eleva la totalidad de la curva de ángulo de fase en la región de baja a media frecuencia. En la sección 12.4 se discuten otras propiedades del compensador por adelanto.

La cantidad de atenuación de baja frecuencia y de adelanto de fase que produzca un compensador por adelanto depende de la relación de adelanto a/b. El máximo adelanto de fase se produce a la frecuencia $\omega_m = \sqrt{ab}$, y es igual a

$$\phi_{\max} = (90 - 2\tan^{-1}\sqrt{a/b}) \text{ grados} \tag{16.2}$$

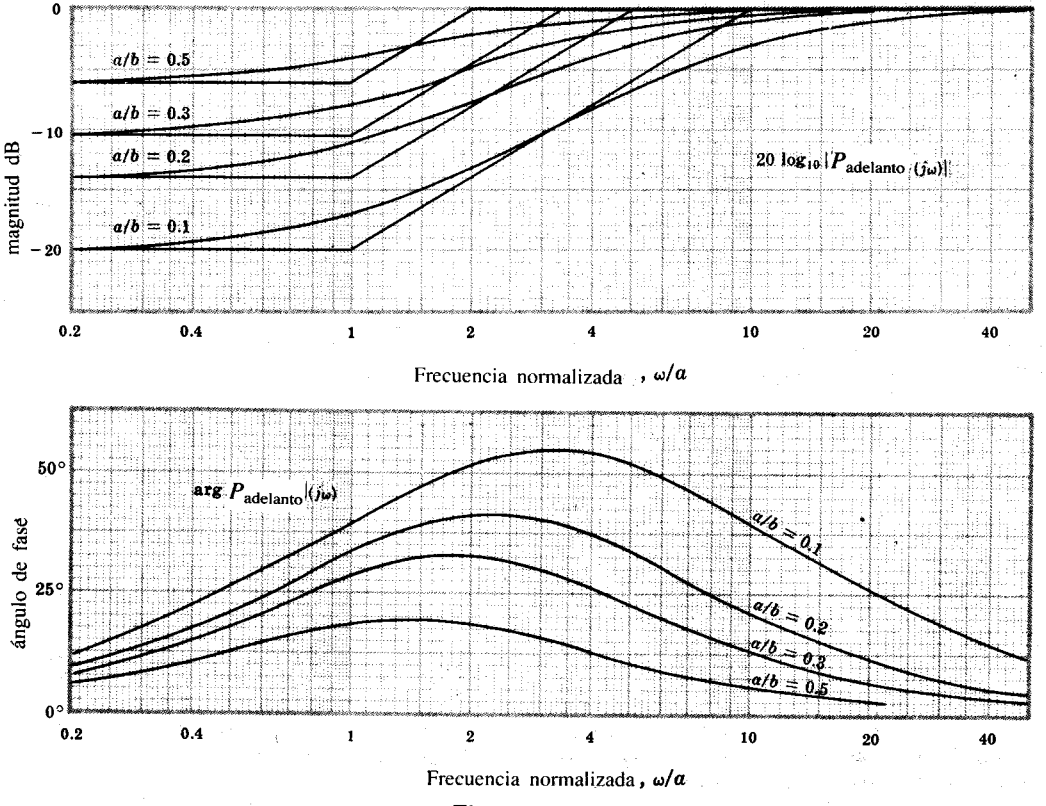


Figura 16-2

La compensación por adelanto de un sistema se utiliza normalmente para aumentar los márgenes de ganancia y/o de fase o para aumentar su ancho de banda. A menudo, como se describe en la sección 12.4, se requiere una modificación adicional de la ganancia de Bode K_B con redes de adelanto.

EJEMPLO 16.2. Va a diseñarse un sistema continuo no compensado cuya función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{24}{s(s+2)(s+6)} \qquad H = 1$$

para que cumpla las siguientes especificaciones de desempeño:

1. cuando la entrada es un rampa con pendiente (velocidad) 2π rad/s, el error de posición en estado estacionario debe ser menor que o igual a $\pi/10$ radianes.
2. $\phi_{MF} = 45° \pm 5°$.
3. la frecuencia de cruce de ganancia $\omega_1 \geq 1$ rad/s*.

Como se describió detalladamente en el ejemplo 12.4, la compensación por adelanto es apropiada. Al transformar $GH(j\omega)$ en la forma de Bode,

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1+j\omega/2)(1+j\omega/6)}$$

notamos que la ganancia de Bode K_B es igual a la constante de error de velocidad $K_{v1} = 2$. En la figura 16-3 (*véase* página 503) se presentan los diagramas de Bode para este sistema.

La ecuación (*9.13*) da para la función de entrada rampa unitaria $1/K_v$, para el error en estado estacionario $e(\infty)$. Por tanto, si $e(\infty) \leq \pi/10$ radianes y la rampa tiene una pendiente de 2π en lugar de 1, entonces la constante de error de velocidad requerida es

$$K_{v2} \geq \frac{2\pi}{\pi/10} = 20 \text{ s}^{-1}$$

* Cuando se utilizan las técnicas de Bode, las especificaciones de *ancho de banda* del sistema en malla cerrada a menudo se interpretan en términos de la frecuencia de cruce de ganancia ω_1, la cual se determina de manera fácil a partir del diagrama de magnitud de Bode. Generalmente el ancho de banda y ω_1 no son equivalentes; pero si uno de ellos aumenta o disminuye, el otro también lo hace. Como se anotó en las secciones 10.4, y 15.8, y en el problema 12.6, a menudo ω_1 es una aproximación razonable para el ancho de banda.

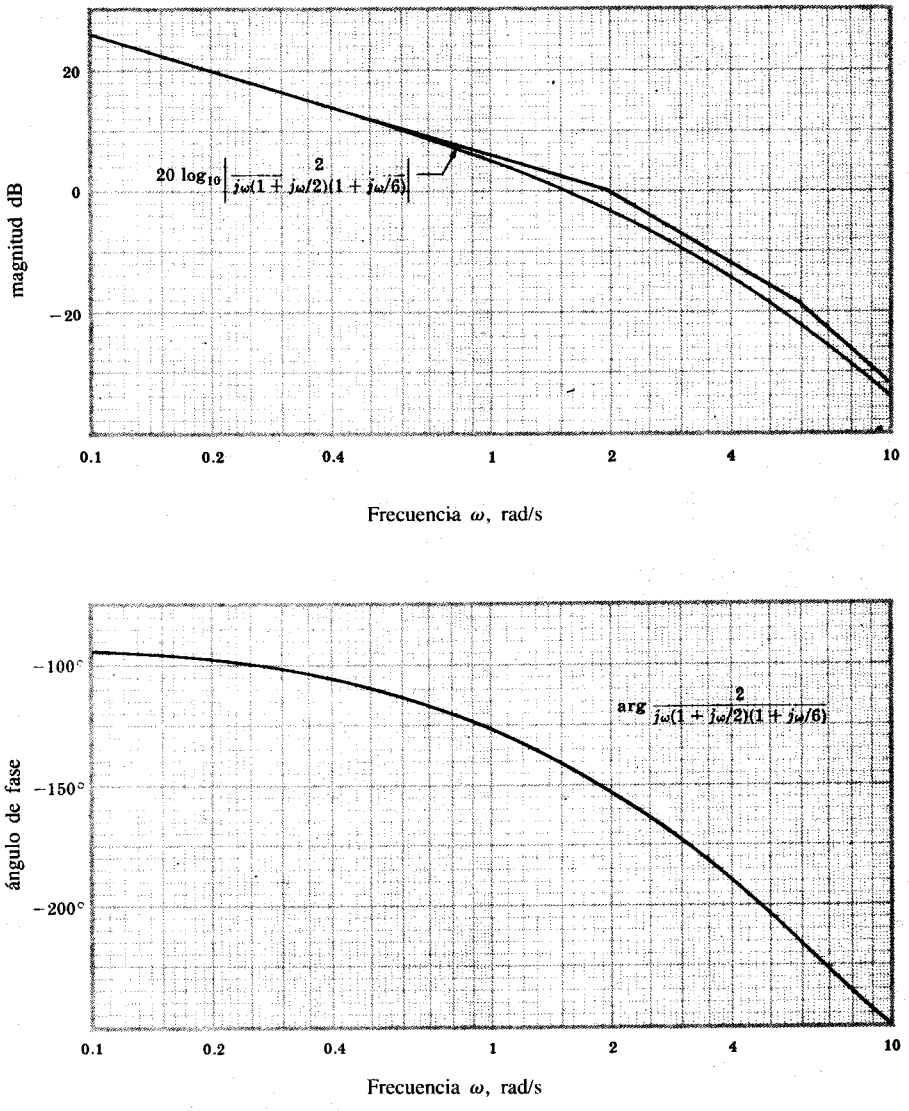


Figura 16-3

De esta manera un amplificador en cascada con una ganancia de $\lambda = 10$ ó 20 dB satisface la especificación en estado estacionario. Pero esta ganancia debe incrementarse aún más depués de escoger los parámetros de la red de adelanto, como se describió en el ejemplo 12.4. Cuando la ganancia de Bode aumenta en 20 dB, el margen de ganancia es -8 dB y el margen de fase $-28°$, como puede leerse directamente de las gráficas de la figura 16-3. En consecuencia el compensador por adelanto debe escogerse de tal modo que lleve el margen de fase a 45°. Esto requiere una gran cantidad de adelanto de fase. Además, puesto que la adición del compensador por adelanto debe estar acompañada de un incremento en la ganancia de b/a, el efecto neto es incrementar la ganancia en las frecuencias medias y altas, elevando así la frecuencia de cruce de ganan-

cia. Por tanto, se tiene que establecer un margen de fase de 45° a una frecuencia más alta, necesitándose aún mayor adelanto de fase. Por estas razones agregamos dos redes de adelanto en cascada (con el aislamiento necesario para reducir los efectos de carga, si se requiere).

Para determinar los parámetros del compensador por adelanto, suponemos que la ganancia de Bode se ha incrementado en 20 dB de tal modo que la línea de 0 dB se reduce efectivamente en 20 dB. Si escogemos $b/a = 10$, entonces el compensador por adelanto más un incremento adicional de la ganancia de Bode de $(b/a)^2$ para las dos redes tiene la siguiente forma combinada:

$$[10P_{\text{adelanto}} \quad (j\omega)]^2 = G_c(j\omega) = \frac{(1+j\omega/a)^2}{(1+j\omega/10a)^2}$$

Ahora escogemos un valor apropiado para a. Un método útil para mejorar la estabilidad del sistema es tratar de cruzar la línea de 0 dB con una pendiente de -6 dB/octava. A menudo cruzar con una pendiente de -12 dB/octava produce un valor demasiado bajo para el margen de fase. Si a 2, un bosquejo de las asíntotas revela que la línea de 0 dB se cruza en -12 dB/octava. Si $a = 4$, la línea de 0 dB se cruza con una pendiente de -6 dB/octava. En la figura 16-4 se muestran los diagramas de magnitud y de ángulo de fase de Bode para el sistema con $a = 4$ rad/s. El margen de ganancia es 14 dB y el margen de fase es 50°. De esta manera se satisface la segunda especificación. La frecuencia de cruce de ganancia $\omega_1 = 14$ rad/s es sustancialmente superior al valor especificado, indicando que el sistema responderá muchísimo más rápido de lo pedido en la tercera especificación. En la figura 16-5 se muestra el diagrama de bloques del sistema compensado. Si un amplificador diseñado apropiadamente se coloca *entre* las dos redes de adelanto puede servir de manera adicional al propósito de aislar el efecto de carga.

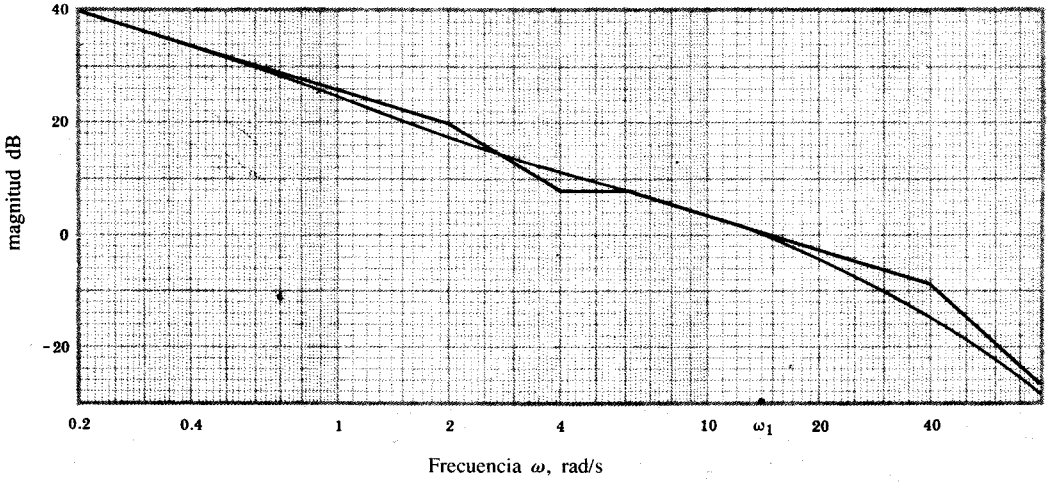


Figura 16-4

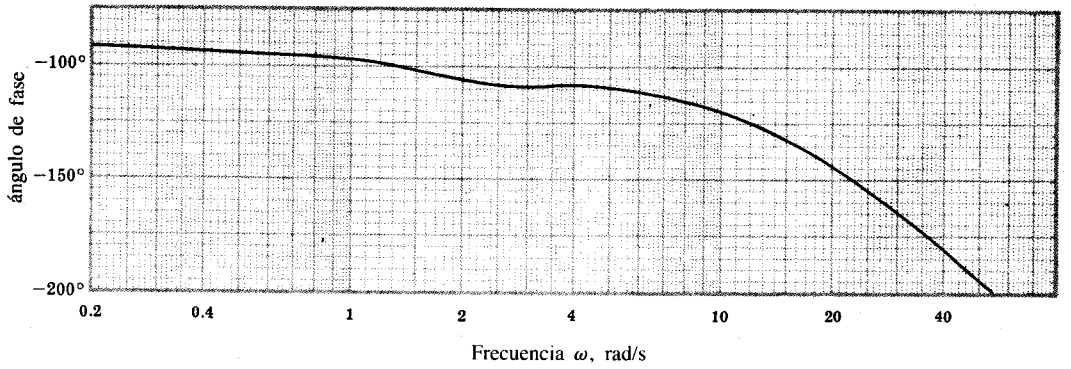


Figura 16-4 (continuación)

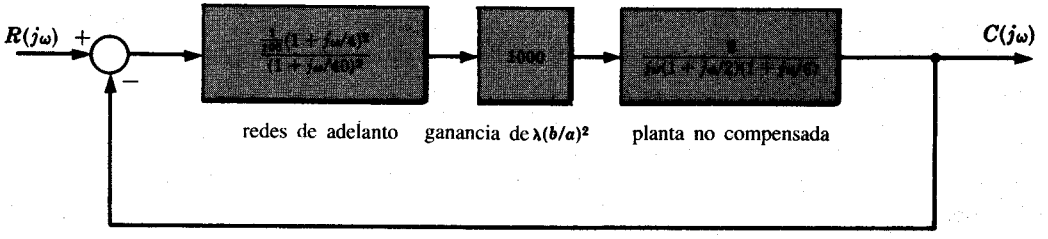


Figura 16-5

16.4 Compensación por atraso para sistemas continuos en el tiempo

El compensador por atraso, presentado en las secciones 6.3 y 12.5 tiene la siguiente forma de Bode para la función de respuesta de frecuencia

$$P_{\text{atraso}}(j\omega) = \frac{1 + j\omega/b}{1 + j\omega/a} \tag{16.3}$$

En la figura 16-6 se presentan los diagramas de Bode para el compensador por atraso, para varias *relaciones de atraso b/a*. Las propiedades de este compensador se estudiaron en la sección 12.5.

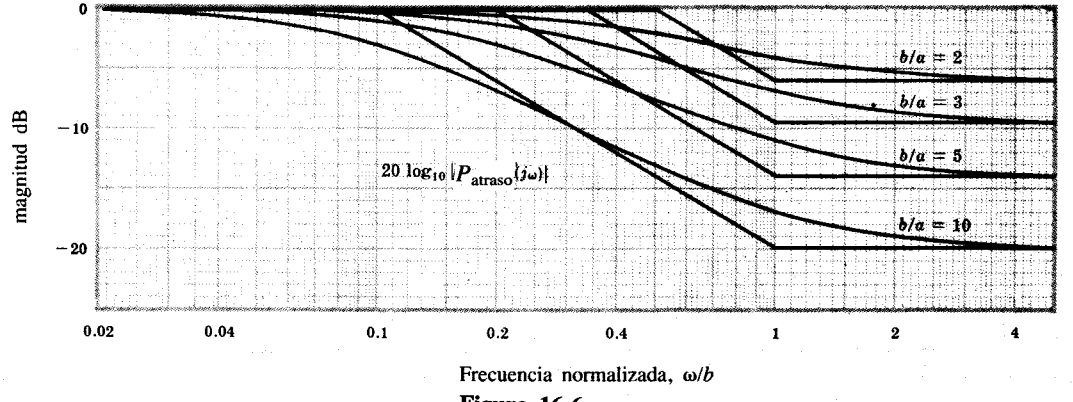


Figura 16-6

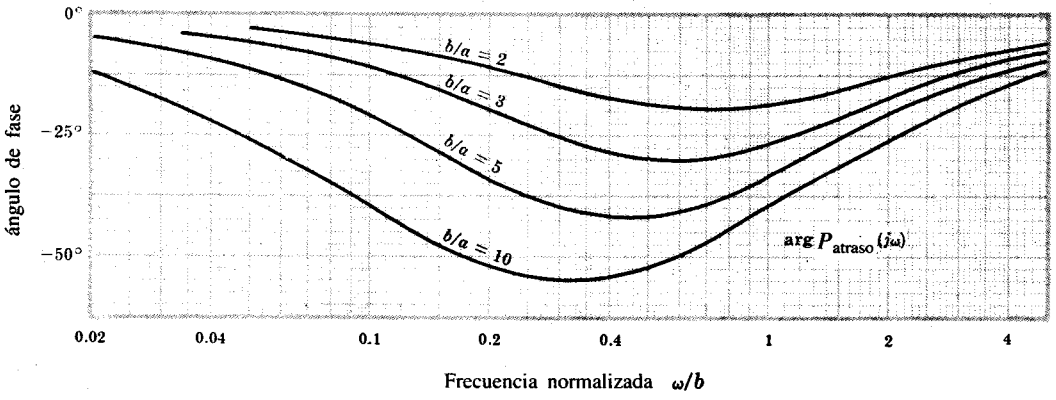


Figura 16-6 (continuación)

EJEMPLO 16.3. Rediseñamos el sistema del ejemplo 16.2 utilizando un factor de ganancia más compensación por *atraso*, como se describió de manera detallada en el ejemplo 12.5. De nuevo, el sistema no compensado se representa por

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1+j\omega/2)(1+j\omega/6)}$$

y las especificaciones son:

1. $K_v \geq 20\ s^{-1}$
2. $\phi_{MF} = 45° \pm 5°$
3. $\omega_1 \geq 1$ rad/s

Como antes, se requiere un incremento en la ganancia Bode por un factor de 10 ó 20 dB para satisfacer la primera especificación (estado estacionario). De aquí que se necesite considerar de nuevo los diagramas de Bode de la figura 16-3 bajando efectivamente en 20 dB la línea de 0 dB. La adición de un retraso de fase significativo a frecuencias menores que 0.1 rad/s bajará la curva o elevará efectivamente la línea de 0 dB en una cantidad correspondiente a b/a. De esta manera la relación b/a debe elegirse de tal modo que el margen de fase resultante sea 45°. A partir del diagrama de ángulo de fase de Bode (figura 16-3) vemos que se obtiene un margen de fase de 45° si la frecuencia de cruce de ganancia es $\omega_1 = 1.3$ rad/s. A partir del diagrama de magnitud de Bode, esto requiere que la curva de magnitud baje 2 + 20 = 22 dB. De este modo se necesita una disminución de ganancia de 22 dB o en un factor de 14. Esto puede obtenerse utilizando un compensador por atraso con $b/a = 14$. La localización real del compensador es arbitraria, ya que el desplazamiento de fase producido en ω_1 es despreciable. Los valores de $a = 0.01$ y $b = 0.14$ rad/s son los adecuados. En la figura 16-7 se muestra el diagrama de bloques del sistema compensado.

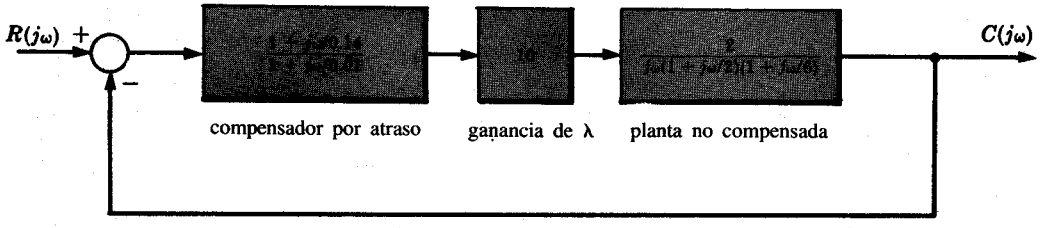


Figura 16-7

16.5 Compensación por atraso-adelanto para sistemas continuos en el tiempo

Algunas veces es conveniente, como se estudió en la sección 12.6, emplear de manera simultánea tanto la compensación por atraso como la de adelanto. Aunque cada una de estas dos redes pueda conectarse en serie para alcanzar el efecto deseado, a menudo es más conveniente mecanizar el compensador por atraso-adelanto combinado, descrito en el ejemplo 6.6. Este compensador puede construirse con una red *R-C* sencilla, como se muestra en el problema 6.14.

La forma de Bode de la función de respuesta de frecuencia para el compensador por atraso-adelanto es

$$P_{AA}(j\omega) = \frac{(1+j\omega/a_1)(1+j\omega/b_2)}{(1+j\omega/b_1)(1+j\omega/a_2)}$$

con $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$ y $a_1 b_2 = b_1 a_2$. En la figura 16-8 se muestra un diagrama de magnitud de Bode típico en el cual $a_1 > b_2$. Los diagramas de Bode para un compensador por atraso-adelanto específico pueden determinarse al combinar los diagramas de Bode para la parte de atraso de la figura 16-6 con los de la parte de adelanto de la figura 16-2. En la sección 12.6 se estudiaron las propiedades adicionales del compensador por atraso-adelanto.

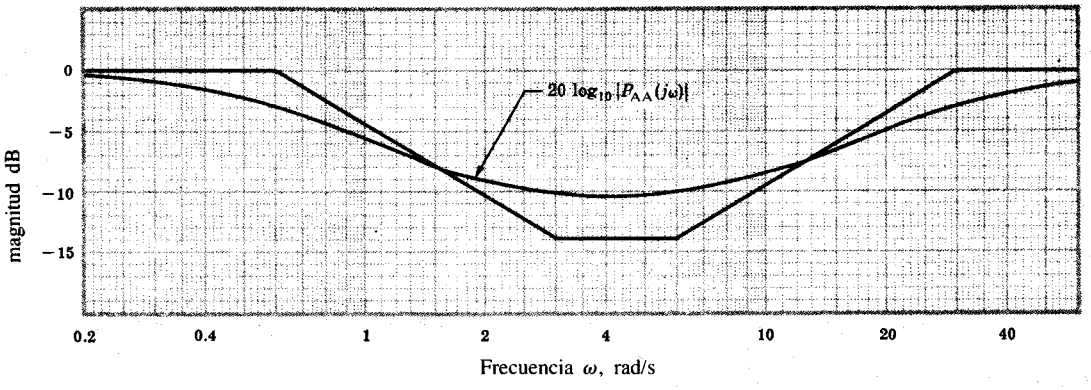


Figura 16-8

EJEMPLO 16.4. Rediseñemos el sistema del ejemplo 16.2 utilizando compensación por atraso-adelanto. Suponga, por ejemplo, que se quiere que la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 (aproximadamente el ancho de banda en malla cerrada) sea mayor que 2 rad/s pero menor que 5 rad/s, con todas las demás especificaciones iguales a las del ejemplo 16.2. Para esta aplicación, vemos que el compensador por atraso-adelanto tiene ventajas sobre la compensación por atraso o por adelanto. De nuevo, el sistema no compensado está representado por

$$GH(j\omega) = \frac{2}{j\omega(1+j\omega/2)(1+j\omega/6)}$$

En la figura 16-3 se muestran los diagramas de Bode. Como en el ejemplo 16.2, se requiere un incremento de 20 dB en la ganancia de Bode para satisfacer la especificación de desempeño en estado estacionario. Una vez más, refiriéndonos a la figura 16-3, el incremento en la ganancia de Bode corresponde a un desplazamiento de 20 dB hacia abajo de la línea de 0 dB, los parámetros del compensador por atraso-adelanto deben elegirse tales que resulten en una frecuencia de cruce de ganancia entre 2 y 5 rad/s con un margen de fase cercano a 45°. El diagrama de ángulo de fase de la figura 16-3 presenta un ángulo de fase cercano a $-188°$ aproximadamente a 4 rad/s. Así que necesitamos cerca de 53° de adelanto de fase para establecer un margen de fase de 45° en ese rango de frecuencia. Escojamos una relación de adelanto de $a_1/b_1 = 0.1$ para estar seguros de que tenemos suficiente adelanto de fase. Para colocarlo cerca del intervalo de frecuencia correcto, hagamos $a_1 = 0.8$ y $b_1 = 8$ rad/s. La parte de atraso debe tener la misma relación $a_2/b_2 = 0.1$, pero debe ser lo suficientemente más pequeña que a_1 como para no reducir de manera significativa el adelanto de fase logrado con la parte de adelanto; $b_2 = 0.2$ y $a_2 = 0.02$ son adecuados. En la figura 16-9 se presentan los diagramas de Bode para el sistema compensado, y en la figura 16-10 se muestra el diagrama de bloques.

Hacemos notar que el compensador por atraso-adelanto no produce atenuación de magnitud a frecuencias altas ni a frecuencias bajas. En consecuencia, al utilizar la compensación por atraso-adelanto se obtiene un ajuste en el factor de ganancia más pequeño (que el obtenido con la compensación por atraso en el ejemplo 16.3), un ancho de banda y una frecuencia de cruce de ganancia más pequeños (que los resultantes con la compensación por adelanto del problema 16.2).

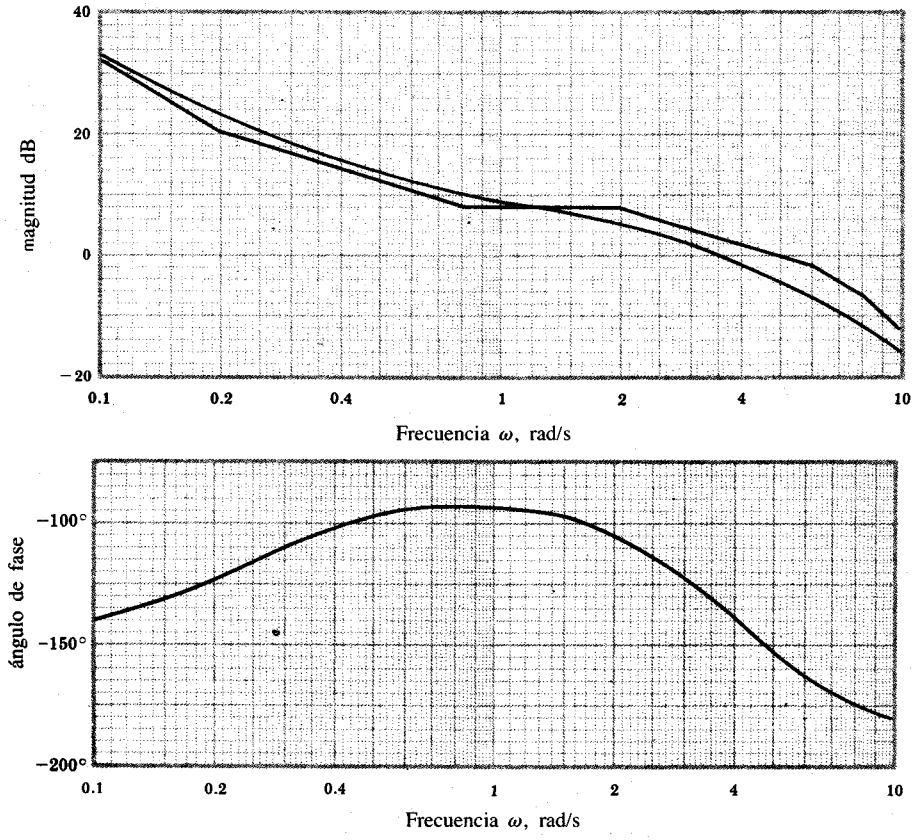


Figura 16-9

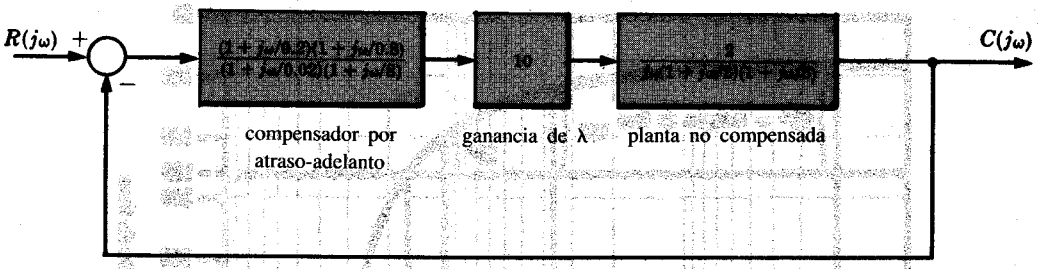


Figura 16-10

16.6 Diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando el análisis de Bode

El diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando el análisis de Bode se basa en la misma filosofía que para los sistemas continuos en el tiempo, en que trae consigo la conformación y reconformación de los diagramas de magnitud y de ángulo de fase de Bode hasta que se cumplan las especificaciones del sistema. Pero el esfuerzo necesario en este caso puede ser sustancialmente mayor.

Algunas veces es posible satisfacer las especificaciones con sólo ajustar el factor de ganancia K en malla abierta, como se describió en la sección 16.2 para sistemas continuos.

EJEMPLO 16.5. Considere el sistema discreto en el tiempo del ejemplo 15.4, con función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(e^{j\omega T}) = \frac{\frac{1}{100}(e^{j\omega T}+1)^2}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}+\frac{1}{3})(e^{j\omega T}+\frac{1}{2})}$$

y $H = 1$. Las figuras 16-11 y 16-12 son los diagramas de Bode de GH trazados por computador, los cuales ilustran los márgenes de ganancia y de fase y las frecuencias de cruce de ganancia y de fase. Ahora mostramos que la sola compensación del factor de ganancia puede utilizarse para satisfacer las siguientes especificaciones.

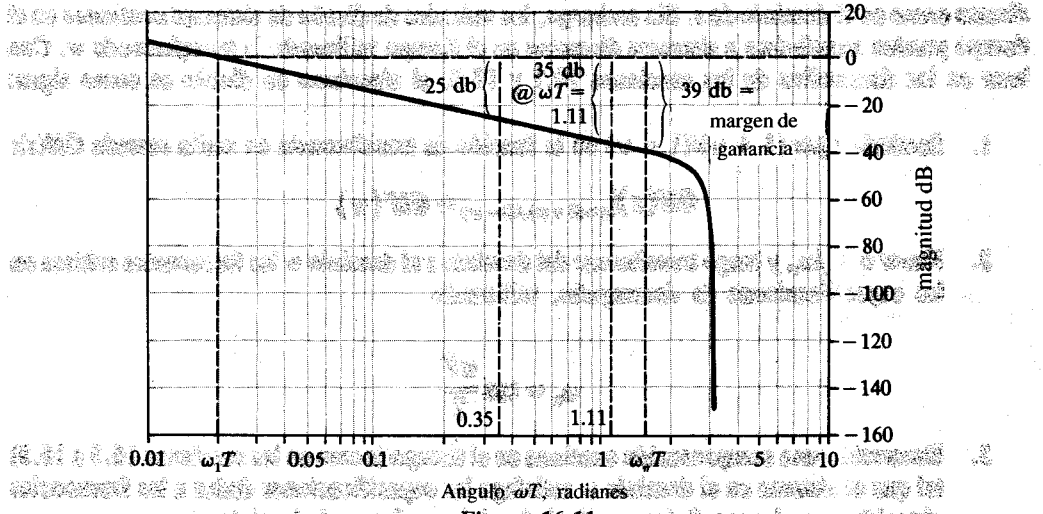


Figura 16-11

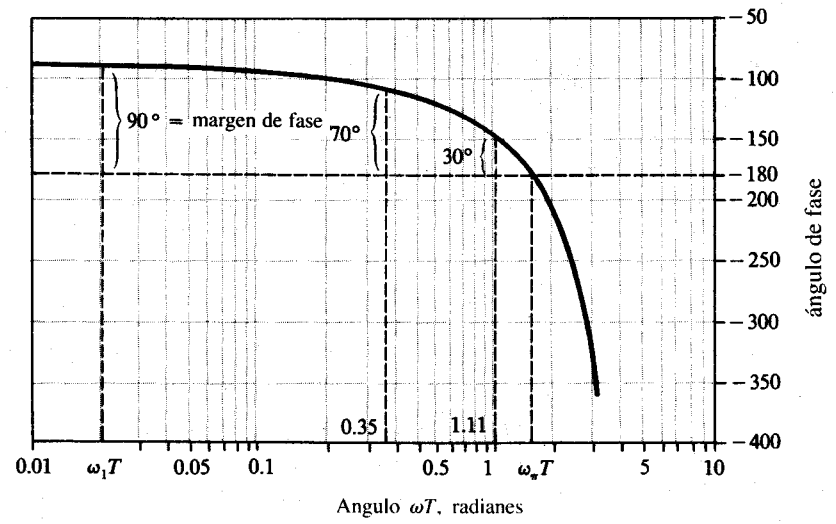


Figura 16-12

1. $\phi_{MF} \geq 30°$.
2. 10 dB $\leq$ margen de ganancia $\leq$ 15 dB.

A partir de la figura 16.12 vemos que si $\omega_1 T$ puede incrementarse a 1.11 rad, entonces $\phi_{MF} = 30°$. Para lograr esto, la ganancia debe incrementarse en 35 dB, como se muestra en la figura 16-11, con lo cual resulta un margen de ganancia de 39 − 35 = 4 dB, que es demasiado pequeño. Si aumentamos la ganancia sólo en 25 dB (el aumento de K en un factor de 18), entonces $\omega_1 T = 0.35$ rad y el margen de fase es 70°. Nótese que al cambiar K no se altera $\omega_\pi T$.

Para especificaciones de diseño de sistemas discretos en el tiempo que no puedan satisfacerse por la sola compensación del factor de ganancia, el diseño de Bode en el dominio de z no es tan directo como en el dominio de s. Sin embargo, los métodos de diseño de sistemas continuos en el tiempo pueden transferirse a sistemas discretos en el tiempo utilizando la *transformada* w. Con base en los desarrollos de las secciones 10.7 y 15.9, el algoritmo de diseño es como sigue:

1. Sustituir z por $(1 + w)/(1 - w)$ en la función de transferencia en malla cerrada $GH(z)$:

$$GH(z)|_{z=(1+w)/(1-w)} \equiv GH'(w)$$

2. Hacer $w = j\omega_w$ y luego transformar del dominio z al dominio w las frecuencias críticas en las especificaciones de desempeño, utilizando

$$\omega_w = \tan\frac{\omega T}{2}$$

3. Desarrollar una compensación continua en el tiempo (como en las secciones 16.3 a 16.5) tal que el sistema en el dominio w satisfaga las especificaciones dadas a las frecuencias obtenidas en el paso 2 (como si el dominio w fuera el dominio s).

4. Transformar de nuevo al dominio z los elementos de compensación obtenidos en el paso 3 para completar el diseño, utilizando $w = (z - 1)(z + 1)$.

EJEMPLO 16.6. El sistema discreto con retroalimentación unitaria y función de transferencia en malla abierta

$$G(z) = GH(z) = \frac{3}{8}\frac{(z+1)(z+\frac{1}{3})}{z(z+\frac{1}{2})}$$

y periodo de muestreo $T = 0.1$ s va a compensar de tal manera que cumpla con las siguientes especificaciones:

1. El error en estado estacionario debe ser menor que o igual a 0.2 para una entrada rampa unitaria.
2. $\phi_{MF} \geq 30°$.
3. La frecuencia de cruce de ganancia ω_1 debe satisfacer $\omega_1 T \geq 1$ rad.

Este es un sistema del tipo 0 y el error en estado estacionario para la entrada rampa unitaria es infinito (sección 9.9). Por tanto la compensación debe tener un polo en $z = 1$, y la nueva función de transferencia que incluye este polo se convierte en

$$GH'(z) = \frac{3}{8}\frac{(z+1)(z+\frac{1}{3})}{z(z-1)(z+\frac{1}{2})}$$

A partir de la tabla de la sección 9.9 el error en estado estacionario para la rampa unitaria es $e(\infty) = 1/K_v$, en donde $K_v = GH(1) = \lim_{z \to 1}(z - 1)GH'(z) = \frac{2}{3}$. De esta manera, con $e(\infty) = \frac{3}{2}$, el factor de ganancia debe incrementarse en un factor de 15/2 (17.5 dB).

En las figuras 16-13 y 16-14 se muestran los diagramas de Bode para GH'. De la figura 16-13, el ángulo en la frecuencia de cruce de ganancia es $\omega_1 T = 0.68$ rad y el margen de fase es 56°. Aumentando la ganancia en 17.5 dB se movería el ángulo en la frecuencia de cruce de ganancia a $\omega_1 T = 2.56$ rad, pero el margen de fase se haría entonces −41°, desestabilizando el sistema. Aparentemente la sola compensación del factor de ganancia no es adecuada para este problema de diseño.

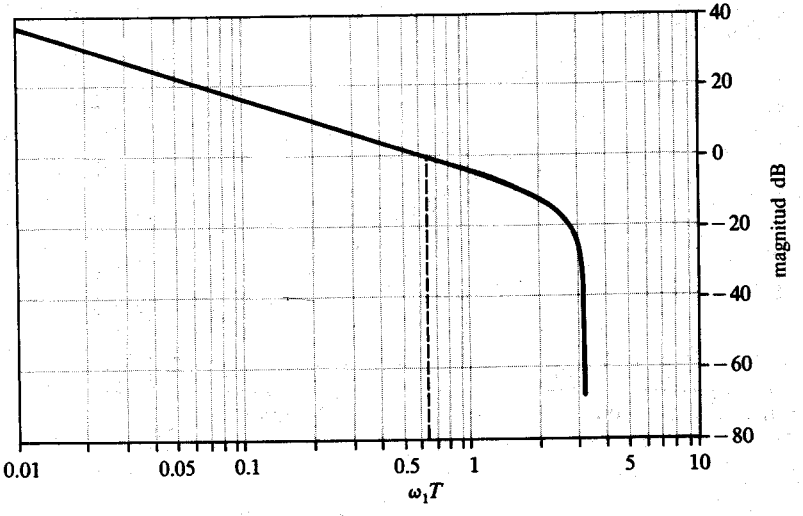


Figura 16-13

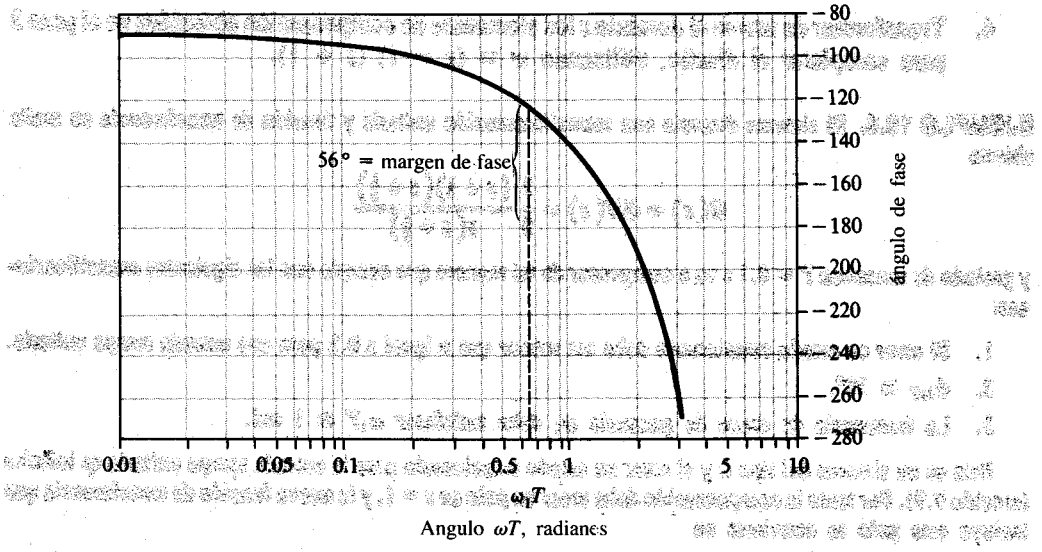


Figura 16-14

Para completar el diseño, transformamos $GH(z)$ al dominio w haciendo $z = (1 + w)/(1 - w)$ y formando

$$GH''(w) = \frac{1}{3}\frac{(1-w)(1+w/2)}{w(1+w)(1+w/3)}$$

En las figuras 16-15 y 16-16 se presentan los diagramas de Bode para GH''.

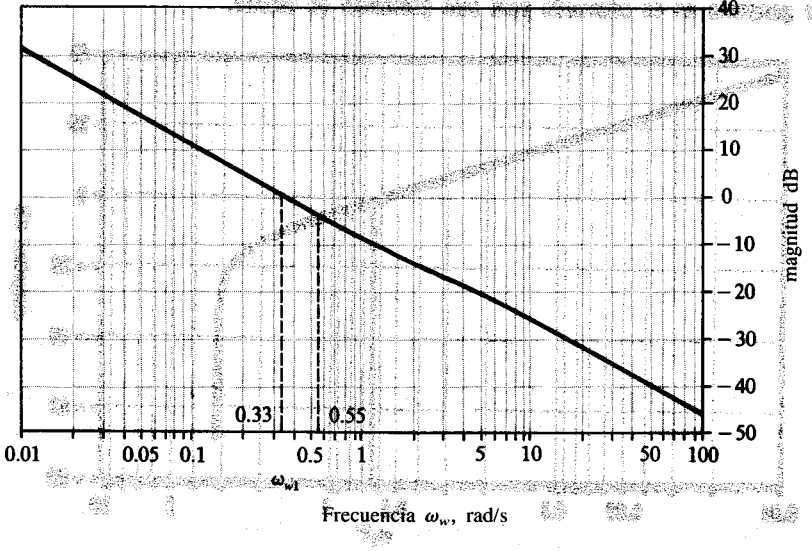


Figura 16-15

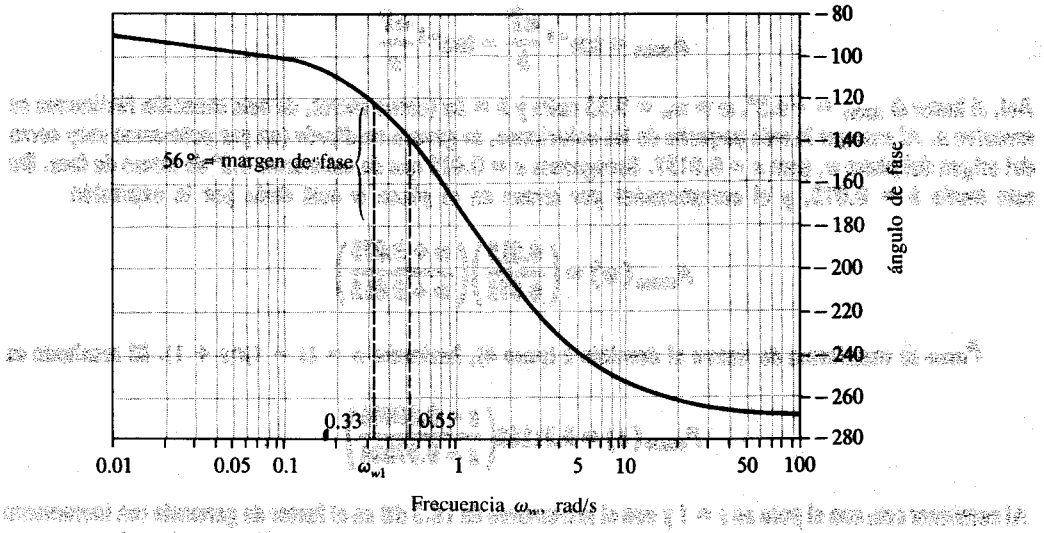


Figura 16-16

Siguiendo el paso 2, la especificación de frecuencia de cruce da ganancia $\omega_1 T \geq 1$ rad se transforma a' plano w utilizando

A partir de la figura 16-15 [o de $\omega_{w1} = \tan(0.68/2)$] la frecuencia de cruce de ganancia es 0.35 rad/s y el margen de fase es 56° (como era en el dominio z).

$$\omega_{w1} = \tan\frac{\omega_1 T}{2} \geq \tan\frac{1}{2} = 0.55 \text{ rad/s}$$

Para satisfacer la especificación del error en estado estacionario, el factor de ganancia debe aumentar por lo menos a 17.5 dB (como se anotó antes), y para satisfacer las demás especificaciones, la frecuencia de cruce de ganancia debe incrementarse a por lo menos 0.55 rad/s (figura 16-16), y el ángulo de fase en $\omega_w = 0.55$ debe mantenerse hasta por lo menos − 150°. Este último requerimiento implica que no puede presentarse un atraso de más de 6.5° en $\omega_w = 0.55$ rad/s. Nótese que requiere cerca de 4.3 dB de aumento de ganancia en $\omega_w = 0.55$ rad/s de tal manera que esta frecuencia puede llegar a ser la frecuencia de cruce de ganancia.

La compensación por atraso puede satisfacer estas especificaciones (paso 3). A partir de la figura 16-6, una relación de atraso de $b/a = 5$ proporciona 14 dB de atenuación a frecuencias más altas. Para incrementar la frecuencia de cruce de ganancia, el factor de ganancia se incrementa en 18.3 dB, de tal modo que en $\omega_w = 0.55$ hay un incremento neto de 4.3 dB. Con claridad se ve que esto es adecuado para satisfacer también la especificación de error en estado estacionario (se necesitan 17.5 dB).

Ahora el parámetro a en la relación de atraso puede escogerse para satisfacer el requerimiento de margen de fase. Como se anotó antes, debemos mantener el atraso de fase del compensador por debajo de 6.5° en $\omega_w = 0.55$ rad/s. Notemos que el atraso de fase del compensador por atraso es

$$\phi_{\text{atraso}} = \tan^{-1}\frac{\omega T}{b} - \tan^{-1}\frac{\omega T}{a}$$

Así, al hacer $\phi_{\text{atraso}} = -6.5°$, $\omega = \omega_w = 0.55$ rad/s y $b = 5a$ (como antes), de esta ecuación fácilmente se resuelve a. Al escoger la más pequeña de las soluciones, se genera un *dipolo* (un par polo-cero) muy cerca del origen del plano w, para $a = 0.0157$. Escogemos $a = 0.015$ que da solamente 6.2° de atraso de fase. De este modo $b = 0.075$, y el compensador por atraso en el plano w está dado por la expresión

$$P_{\text{atraso}}(w) = \left(\frac{0.015}{0.075}\right)\left(\frac{w + 0.075}{w + 0.015}\right)$$

P_{atraso} se transforma de nuevo al dominio z (paso 4), haciendo $w = (z - 1)/(z + 1)$. El resultado es

$$P_{\text{atraso}}(z) = 0.21182\left(\frac{z - 0.86046}{z - 0.97044}\right)$$

Al combinar ésta con el polo en $z = 1$ y con el incremento de 18.3 dB en el factor de ganancia (un incremento de 8.22 en la relación del factor de ganancia), el elemento de compensación completo $G_1(z)$ es

$$G_1(z) = 1.7417\left[\frac{z - 0.86046}{(z-1)(z - 0.97044)}\right]$$

En la figura 16-17 se muestra el sistema de control compensado. Nótese que este diseño es bastante similar a los desarrollados para este mismo sistema con las especificaciones de los ejemplos 12.7 y 14.5.

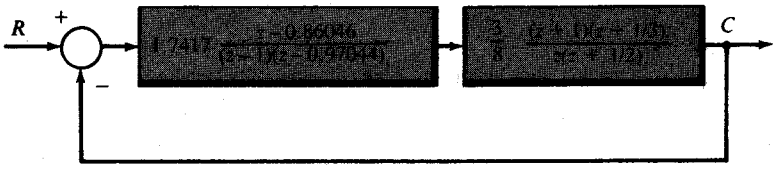


Figura 16-17

Problemas resueltos

Compensación del factor de ganancia

16.1. Determine el valor máximo para la ganancia de Bode K_B que resultará en un margen de ganancia de 6 dB o más, y un margen de fase de 45° o más, para el sistema con función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(j\omega) = \frac{K_B}{j\omega(1 + j\omega/5)^2}$$

En la figura 16-18 se presentan los diagramas de Bode para este sistema con $K_B = 1$.

El margen de ganancia, medido en $\omega_\pi = 5$ rad/s, es 20 dB. De este modo la ganancia de Bode puede elevarse hasta $20 - 6 = 14$ dB y aún satisface el requerimiento de margen de ganancia. Sin embargo, el diagrama de ángulo de fase de Bode indica que para $\phi_{MF} \geq 45°$, la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 debe ser menor que 2 rad/s. La curva de magnitud puede elevarse hasta en 7.5 dB antes que ω_1 exceda los 2 rad/s. Así que el valor máximo de K_B que satisface *ambas* especificaciones es 7.5 dB ó 2.37.

16.2. Diseñe el sistema del problema 15.7 para que tenga un margen de fase de 55°.

El diagrama de ángulo de fase de Bode de la figura 15-28 indica que la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 debe ser 0.9 rad/s para un margen de fase de 55°. A partir del diagrama de magnitud de Bode de la figura 15-27, K_B debe reducirse en 6 dB o en un factor de 2 para alcanzar $\omega_1 = 0.9$ rad/s y en consecuencia $\phi_{MF} = 55°$.

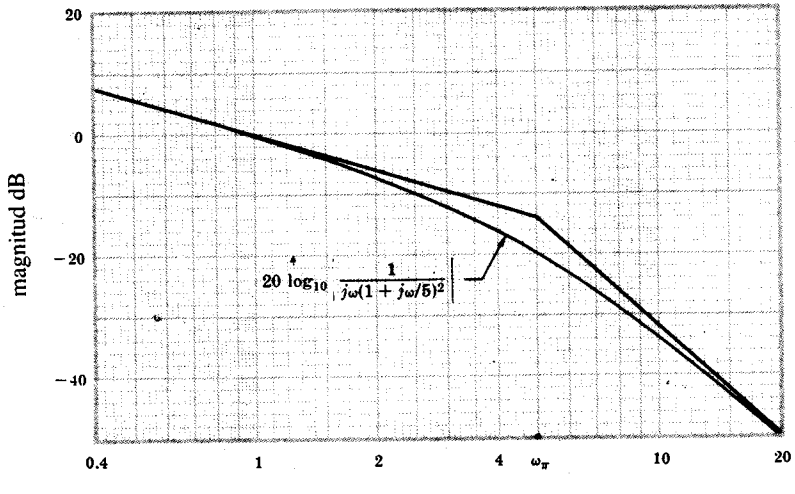
Compensación por adelanto

16.3. Demuestre que el máximo adelanto de fase de un compensador por adelanto [ecuación (*16.1*)] se presenta en $\omega_m = \sqrt{ab}$, y pruebe la ecuación (*16.2*).

El ángulo de fase del compensador por adelanto es $\phi = \arg P_{\text{adelanto}}(j\omega) = \tan^{-1} \omega/a - \tan^{-1} \omega/b$. Entonces

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{1}{a\left[1 + (\omega/a)^2\right]} - \frac{1}{b\left[1 + (\omega/b)^2\right]}$$

Al hacer $d\phi/d\omega = 0$, se produce $\omega^2 = ab$. De este modo el adelanto de fase máximo ocurre en $\omega_m = \sqrt{ab}$. De donde $\phi_{max} = \tan^{-1} \sqrt{b/a} - \tan^{-1} \sqrt{a/b}$. Pero, puesto que $\tan^{-1} \sqrt{b/a} = \pi/2 - \tan^{-1} \sqrt{a/b}$, tenemos $\phi_{max} = (90 - 2 \tan^{-1} \sqrt{a/b})$.



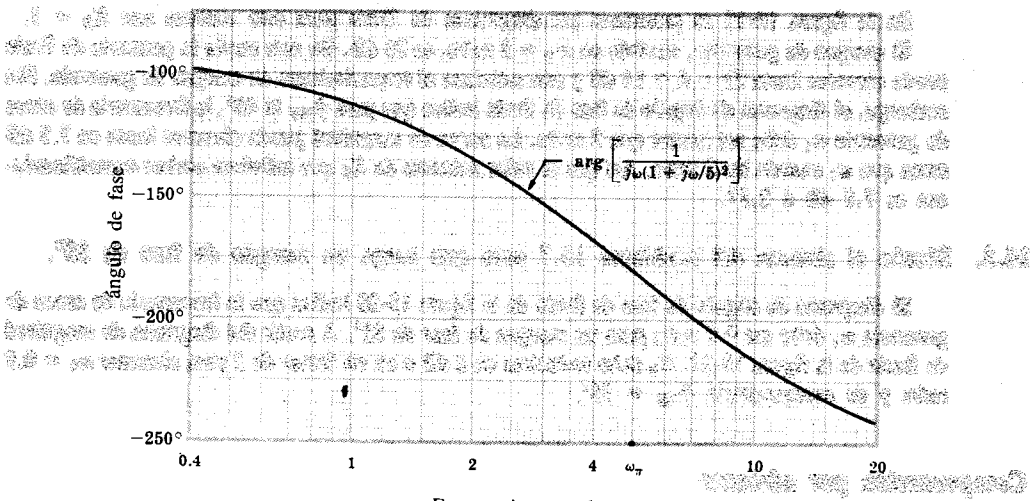


Figura 16-18

16.4. ¿Qué atenuación (magnitud) se produce con un compensador por adelanto a la frecuencia de adelanto de fase máxima $\omega_m = \sqrt{ab}$?

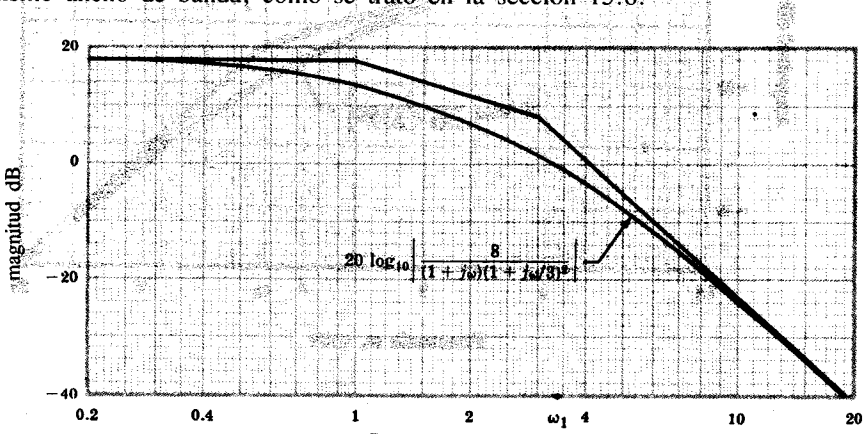
El factor de atenuación está dado por la expresión

$$\left| P_{\text{adelanto}}\left(j\sqrt{ab}\right) \right| = \left| \frac{(a/b)\left(1+j\sqrt{b/a}\right)}{\left(1+j\sqrt{a/b}\right)} \right| = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{1+b/a}{1+a/b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

16.5. Diseñe la compensación para el sistema

$$GH(j\omega) = \frac{8}{(1+j\omega)(1+j\omega/3)^2}$$

que produzca un margen de fase total de 45° y la misma frecuencia de cruce de ganancia ω_1 que el sistema no compensado. En esencia esto último es igual a diseñarlo para el mismo ancho de banda, como se trató en la sección 15.8.



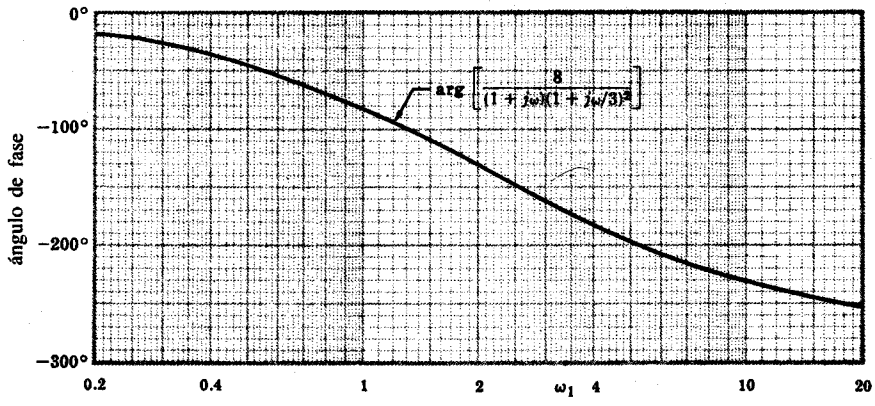


Figura 16-19

La frecuencia de cruce de ganancia ω_1 es 3.4 rad/s y el margen de fase es 10°. Las especificaciones pueden cumplirse con un compensador por adelanto en cascada y un amplificador de factor de ganancia. La elección de a y b para el compensador por adelanto es algo arbitraria, ya que el adelanto de fase en $\omega_1 = 3.4$ es suficiente para elevar el margen de fase desde 10° hasta 45°. Sin embargo, a menudo es conveniente, por razones económicas, reducir al mínimo la atenuación de baja frecuencia obtenida de la red de adelanto, escogiendo la relación de adelanto $a/b < 1$ más grande, la cual suministrará la cantidad de aumento de fase requerido. Suponiendo que este es el caso, la máxima relación de adelanto que produce un adelanto de fase de 45° − 10° = 35° es cerca de 0.3, a partir de la figura 16-2. La solución de la ecuación (*16.2*) produce un valor para $a/b = 0.27$. Pero utilizaremos $a/b = 0.3$ porque disponemos de las curvas para este valor en la figura 16-2. Queremos escoger un a y un b tales que el adelanto de fase máximo que ocurra en $\omega_m = \sqrt{ab}$ se obtenga en $\omega_1 = 3.4$ rad/s. De este modo $\sqrt{ab} = 3.4$. Si sustituimos $a = 0.3b$ en esta ecuación y despejamos b, encontramos que $b = 6.2$ y $a = 1.86$. Pero este compensador produce 20 $\log_{10} \sqrt{6.2/1.86} = 5.2$ dB de atenuación en $\omega_1 = 3.4$ rad/s (*véase* el problema 16.4). Por tanto se requiere un amplificador con una ganancia de 5.2 dB ó 1.82, además del compensador por adelanto, para mantener ω_1 en 3.4 rad/s. En la figura 16-20 se muestran los diagramas de Bode del sistema compensado, y el diagrama de bloques, en la figura 16-21.

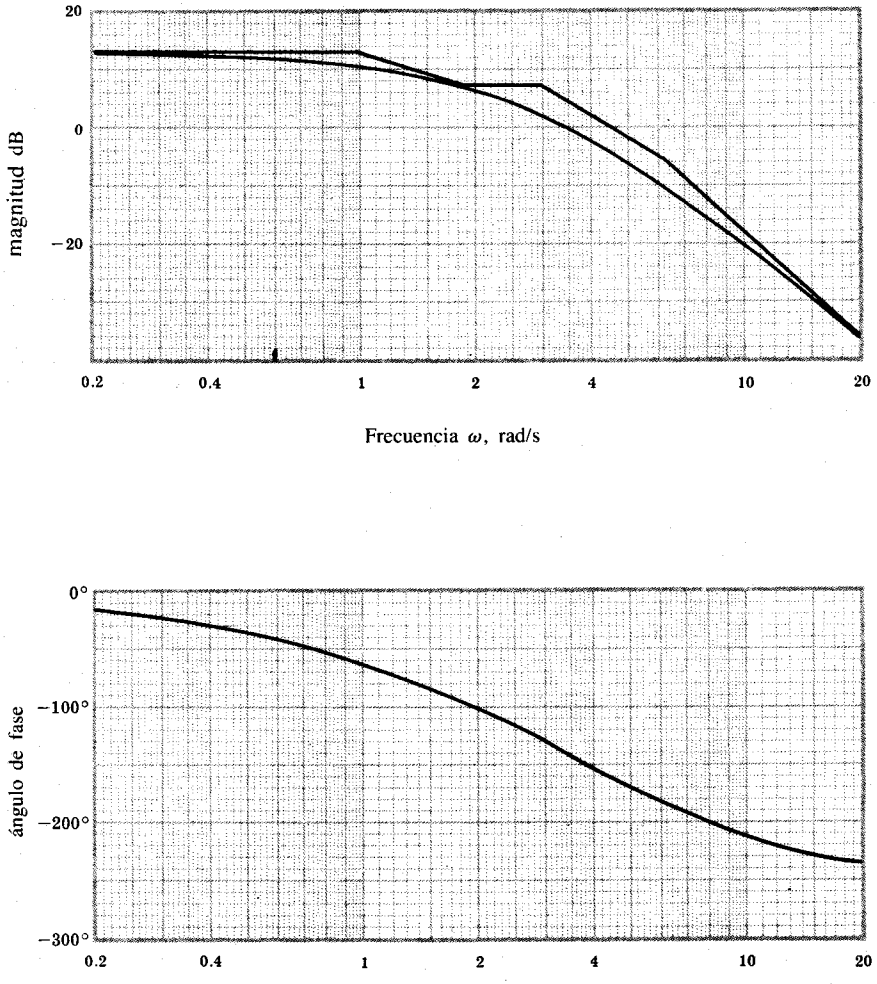


Figura 16-20

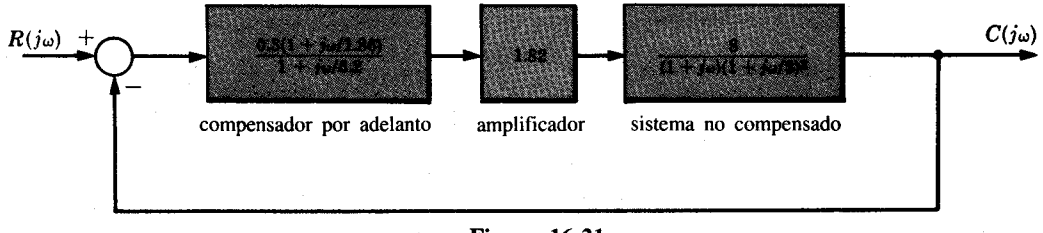


Figura 16-21

Compensación por atraso

16.6. ¿Cuál es el atraso de fase máximo producido por el compensador por atraso [ecuación (*16.3*)]?

El ángulo de fase del compensador por atraso es

$$\arg\ P_{\text{atraso}}(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\omega}{b} - \tan^{-1}\frac{\omega}{a} = -\arg\ P_{\text{adelanto}}(j\omega)$$

De esta manera el atraso de fase máximo (ángulo de fase negativo) del compensador por atraso es el mismo adelanto de fase máximo del compensador por adelanto, con los mismos valores de a y b. De aquí que el máximo se presente en $\omega_m = \sqrt{ab}$ y, a partir de la ecuación (*16.2*), se obtiene

$$\phi_{\max} = \left(90 - 2\tan^{-1}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \text{ grados}$$

Expresada en términos de la relación de atraso b/a, la ecuación se escribe

$$\phi_{\max} = \left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{b}{a}} - 90\right) \text{ grados}$$

16.7. Diseñe la compensación para el sistema del problema 16.1, para satisfacer las mismas especificaciones y, además, tener una frecuencia de cruce de ganancia ω menor que o igual a 1 rad/s y una constante de error de velocidad $K_v > 5$.

Los diagramas de Bode para este sistema, que se presentan en la figura 16-18, indican que $\omega_1 = 1$ rad/s para $K_B = 1$. En consecuencia $K_v = K_B = 1$ para $\omega_1 = 1$. Los requerimientos de margen de fase y de ganancia se cumplen de manera fácil con $K_B < 2.37$; pero la especificación en estado estacionario requiere que $K_v = K_B > 5$. Por tanto, un compensador por atraso en cascada de baja frecuencia con $b/a = 5$ puede utilizarse para aumentar K_v a 5. manteniendo la frecuencia de cruce y los márgenes de ganancia y de fase en sus valores anteriores. Como se muestra en la figura 16-22, un compensador por atraso con $b = 0.5$ y $a = 0.1$ satisface estos requerimientos.

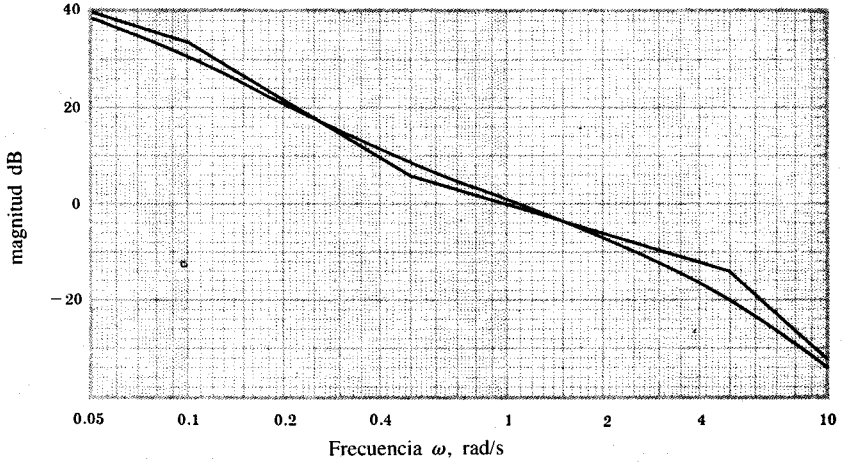


Figura 16-22

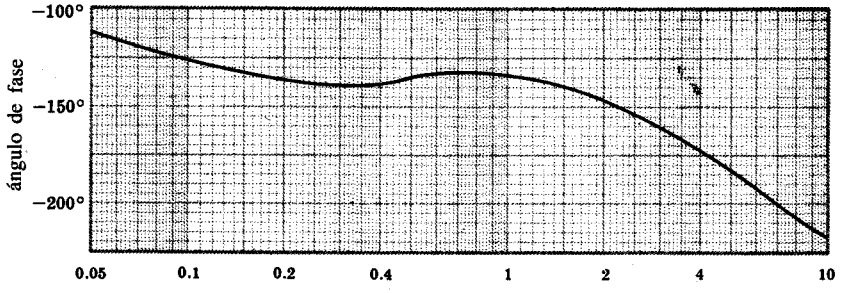


Figura 16-22 (continuación)

La función de respuesta de frecuencia en malla abierta, compensada, es

$$\frac{5(1+j\omega/0.5)}{j\omega(1+j\omega/0.1)(1+j\omega/5)^2}.$$

16.8. Diseñe un sistema discreto con retroalimentación unitaria, con la planta fija

$$G_2(z) = \frac{27}{64}\frac{(z+1)^3}{\left(z+\frac{1}{2}\right)^3}$$

que satisfaga las siguientes especificaciones: 1) $K_p \geq 4$, 2) margen de ganancia ≥ 12 dB, 3) margen de fase $\geq 45°$.

La especificación en la constante de error de posición K_p requiere un incremento de 4 en el factor de ganancia. Esta función de transferencia se transforma al plano w haciendo $z = (1 + w)/(1 - w)$, formando así

$$G_2'(w) = \frac{1}{(1+w/3)^3}$$

En la figura 16-23 se presentan los diagramas de Bode para este sistema con el factor de ganancia incrementando en $20 \log_{10} 4 = 12$ dB.

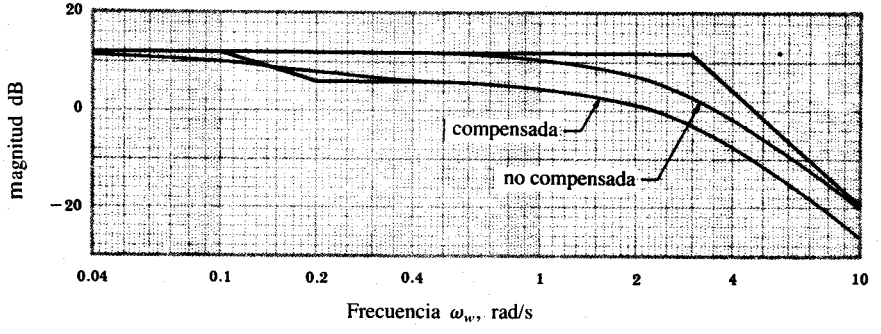


Figura 16-23

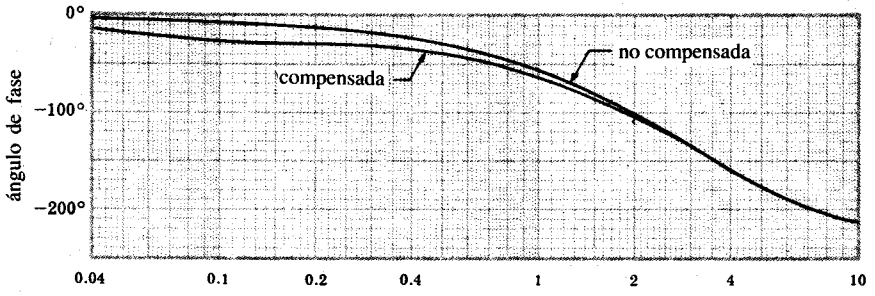


Figura 16-23 (continuación)

El margen de ganancia es 6 dB y el margen de fase es 30° Estos márgenes pueden incrementarse al agregar un compensador por atraso. Para aumentar el margen de ganancia en 12 dB, la magnitud de alta frecuencia debe reducirse en 6 dB. Para elevar el margen de fase a 45°, ω_{w1} debe bajarse a 3.0 rad/s o menos. Esto requiere una atenuación de magnitud de 3 dB a esa frecuencia. En consecuencia escogemos una relación de atraso $b/a = 2$ para producir una atenuación de alta frecuencia de 20 $\log_{10} 2 = 6$ dB. Para $a = 0.1$ y $b = 0.2$ el margen de fase es 65° y el margen de ganancia es 12 dB, como se muestra en los diagramas de Bode compensados de la figura 16-23.

La función de respuesta de frecuencia en malla abierta compensada es

$$\frac{4(1 + j\omega_w/0.2)}{(1 + j\omega_w/0.1)(1 + j\omega_w)^3}$$

El elemento de compensación

$$G_1'(w) = \frac{4(1 + w/0.2)}{1 + w/0.1}$$

se transforma de nuevo al dominio z haciendo $w = (z - 1)/(z + 1)$, en

$$G_1(z) = \frac{24}{11}\frac{\left(z - \frac{2}{3}\right)}{\left(z - \frac{9}{11}\right)}$$

Compensación por atraso-adelanto

16.9. Determine la compensación para el sistema del problema 16.5 de tal modo que produzca una constante de error de posición $K_p \geq 10$, $\phi_{MF} \geq 45°$ y la misma frecuencia de cruce de ganancia ω que el sistema no compensado.

La compensación determinada en el problema 16.5 satisface todas las especificaciones excepto que K_p es solamente 4.4. El compensador por adelanto escogido en dicho problema tiene una atenuación de baja frecuencia de 10.4 dB o un factor de 3.33. Remplacemos la red de adelanto por un compensador por atraso-adelanto, escogiendo $a_1 = 1.86$, $b_1 = 66.2$ y $a_2 / b_2 = 0.3$. La magnitud a baja frecuencia se hace $a_1 b_1 / b_1 a_2 = 1$ ó 0 dB, y se borra la atenuación producida por la red de adelanto, elevando efectivamente K_p para el sistema en un factor de 3.33 hasta 14.5. La parte de atraso del compensador debe colocarse a frecuencias suficientemente bajas como para que el mar-

gen de fase no se reduzca por debajo del valor especificado de 45°. Esto puede lograrse con $a_2 = 0.09$ y $b_2 = 0.3$. En la figura 16-24 se presenta el diagrama de bloques del sistema compensado. Nótese que se incluye un amplificador con una ganancia de 1.82, del mismo modo que en el problema 16.5, para mantener $\omega_1 = 3.4$.

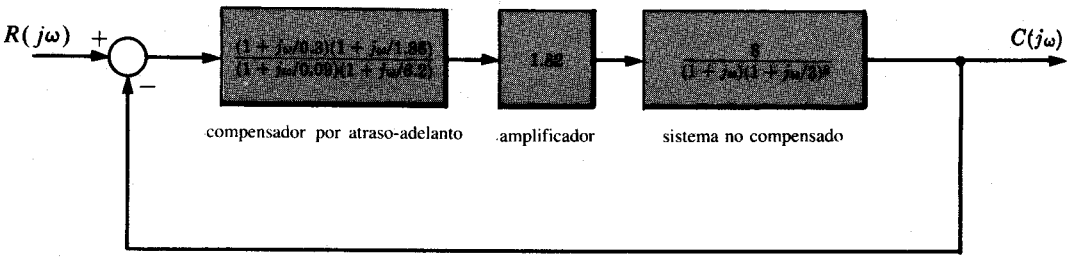


Figura 16-24

Los diagramas de Bode compensados se muestran en la figura 16-25.

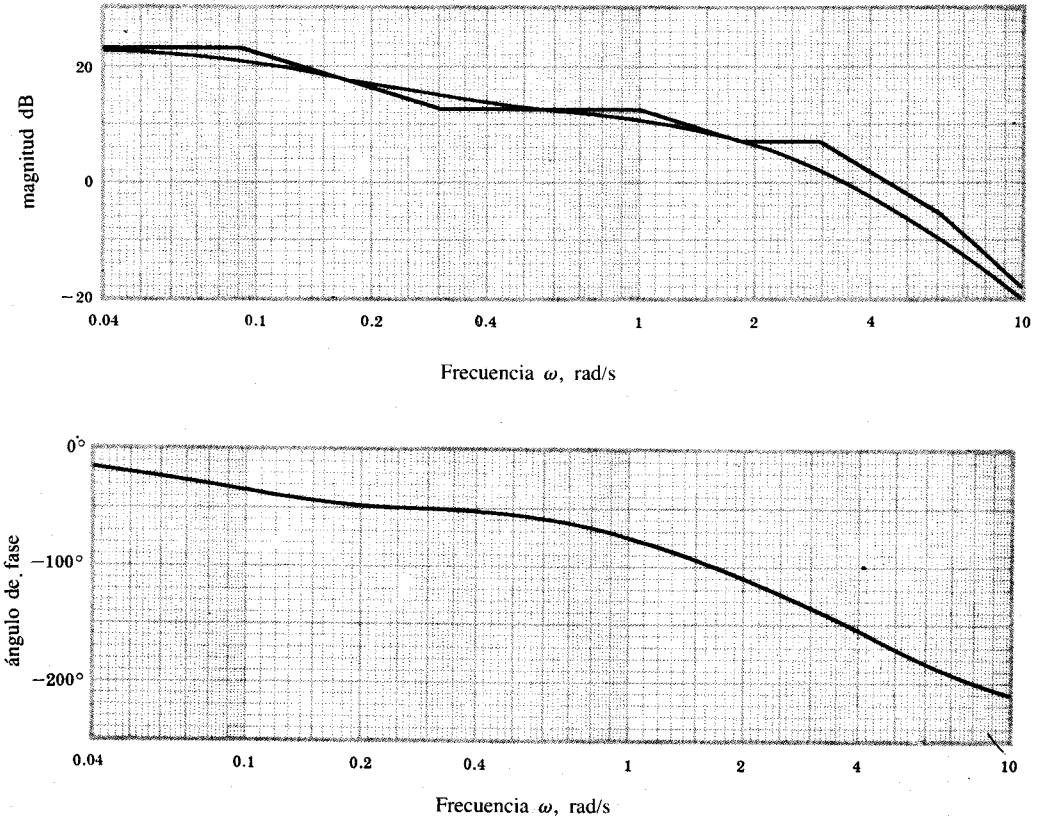


Figura 16-25

16.10. Diseñe una compensación en cascada para un sistema de control con retroalimentación unitaria, con planta

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega/8)(1 + j\omega/20)}$$

para que cumpla con las siguientes especificaciones:

1) $K_v \geq 100$
2) $\omega_1 \geq 10$ rad/s
3) margen de ganancia ≥ 10 dB
4) margen de fase $\phi_{MF} \geq 45°$

Para satisfacer la primera especificación se requiere incrementar la ganancia de Bode en un factor de 100, puesto que el K_v no compensado es igual a 1. En la figura 16-26 se muestran los diagramas de Bode para este sistema con su ganancia incrementada a 100.

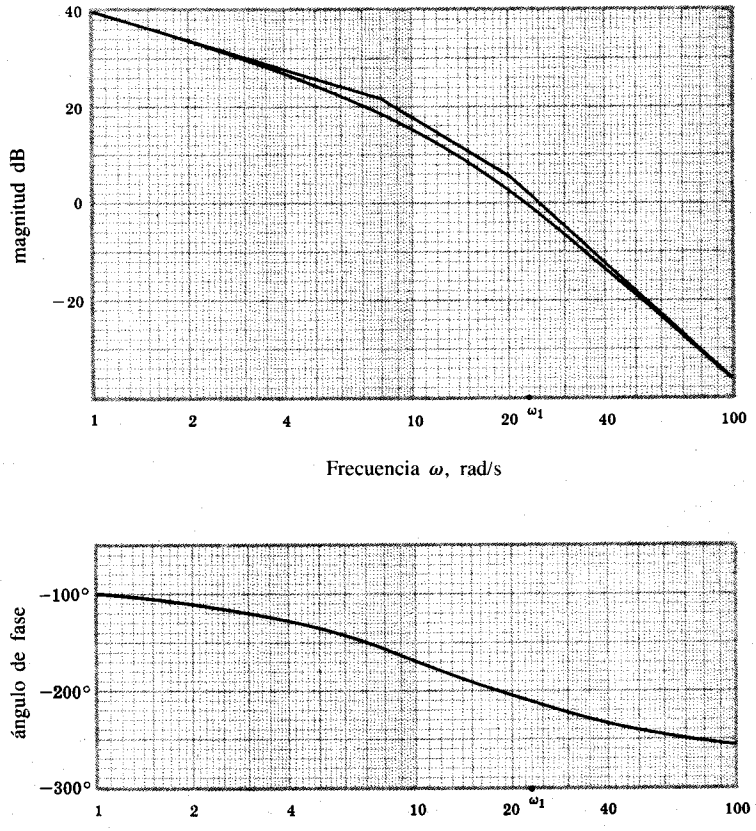


Figura 16-26

La frecuencia de cruce de ganancia ω_1 es 23 rad/s, el margen de fase es $-30°$ y el margen de ganancia es -12 dB. La compensación por atraso podría utilizarse para incrementar los márgenes de ganancia y de fase al reducir ω_1. Sin embargo, ω_1 tendría que bajarse a menos de 8 rad/s para lograr un margen de fase de 45°, y a menos de 6 rad/s, para un margen de ganancia de 10 dB. En consecuencia no se satisfaría la segunda especificación. Con la compensación por adelanto, se requeriría un incremento adicional de la ganancia de Bode en un factor de b/a y ω_1 aumentaría, necesitando así mucho más de 75° de adelanto de fase para $\omega_1 = 23$ rad/s. Estas desventajas pueden recuperarse al utilizar una compensación por atraso-adelanto. La parte adelanto produce atenuación y adelanto de fase. Las frecuencias a las que ocurren estos efectos deben localizarse cerca de ω_1 de tal modo que ω_1 se reduzca levemente y se incremente el margen de fase. Nótese que, aunque la compensación por adelanto *pura* aumenta ω_1, la parte de adelanto del compensador por atraso-adelanto disminuye ω_1 porque el incremento de b/a en el factor de ganancia es innecesario, reduciendo de este modo la característica de magnitud. La parte de adelanto puede determinarse independientemente al utilizar las curvas de la figura 16-2; pero debe tenerse presente que, cuando se incluye la parte de atraso, pueden reducirse en algo la atenuación y el adelanto de fase. Ensayemos una relación de adelanto de $a_1/b_1 = 0.1$, con $a_1 = 5$ y $b_1 = 50$. El máximo adelanto de fase ocurre entonces a 15.8 rad/s. Esto permite que la asíntota de magnitud cruce la línea de 0 dB con una pendiente de -6 dB/octava (*véase* el ejemplo 16.2). En la figura 16-27 se muestran los diagramas de Bode compensados escogiendo a_2 y b_2 como 0.1 y 1.0 rad/s, respectivamente. Los parámetros resultantes son $\omega_1 = 12$ rad/s, el margen de ganancia = 14 dB y $\phi_{MF} = 52°$, como se muestra en las gráficas. La función de respuesta de frecuencia en malla abierta del sistema compensado es

$$\frac{100(1+j\omega)(1+j\omega/5)}{j\omega(1+j\omega/0.1)(1+j\omega/8)(1+j\omega/20)(1+j\omega/50)}$$

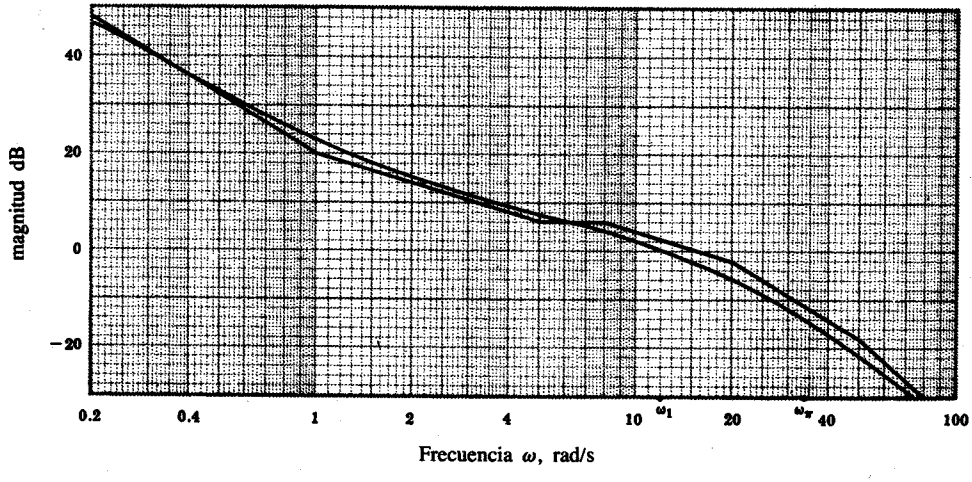


Figura 16-27

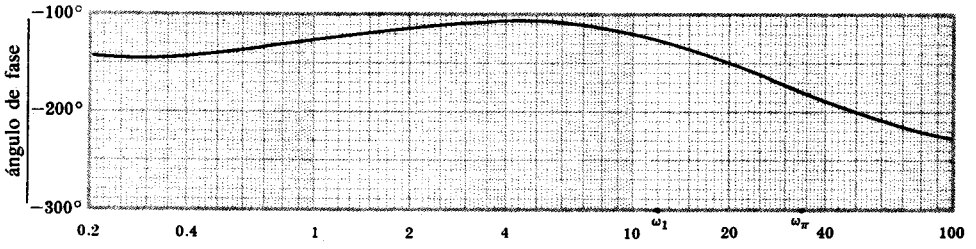


Figura 16-27 (continuación)

Problemas misceláneos

16.11. La función de frecuencia de respuesta nominal de una planta es

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega/8)(1 + j\omega/20)}$$

Un sistema de control con retroalimentación debe diseñarse para comandar la salida de esta planta en cierta aplicación y debe satisfacer las siguientes especificaciones en el dominio de la frecuencia:

1) margen de ganancia $\geq$ 6 dB
2) margen de fase (ϕ_{MF}) $\geq 30°$

Además, se sabe que los parámetros "fijos" de la planta pueden variar levemente durante la operación del sistema. Los efectos de esta variación sobre la respuesta del sistema deben hacerse mínimos sobre el intervalo de frecuencias de interés, el cual es $0 \leq \omega \leq 8$ rad/s, y el requisito real puede interpretarse como una especificación en la sensitividad de $(C/R)(j\omega)$ con respecto a $|G_2(j\omega)|$, es decir,

3) $$20\left|\log_{10} S^{(C/R)(j\omega)}_{|G_2(j\omega)|}\right| \leq -10 \text{ dB} \quad \text{para} \quad 0 \leq \omega \leq 8 \text{ rad/s}$$

También se sabe que la planta estará sujeta a una perturbación de entrada adicional incontrolable, representada en el dominio de la frecuencia por $U(j\omega)$. En la aplicación, la respuesta del sistema a esta perturbación de entrada debe suprimirse en el intervalo de frecuencia $0 \leq \omega \leq 8$ rad/s. Por tanto el problema de diseño incluye la restricción adicional sobre la relación de magnitud de la salida a la perturbación de la entrada, expresada como

4) $$20 \log_{10}\left|\frac{C}{U}(j\omega)\right| \leq -20 \text{ dB} \quad \text{para} \quad 0 \leq \omega \leq 8 \text{ rad/s}$$

Diseñe un sistema que satisfaga estas cuatro especificaciones.

En la figura 16-28 se presenta la configuración general del sistema, el cual incluye la posibilidad de compensadores tanto en cascada como con retroalimentación.

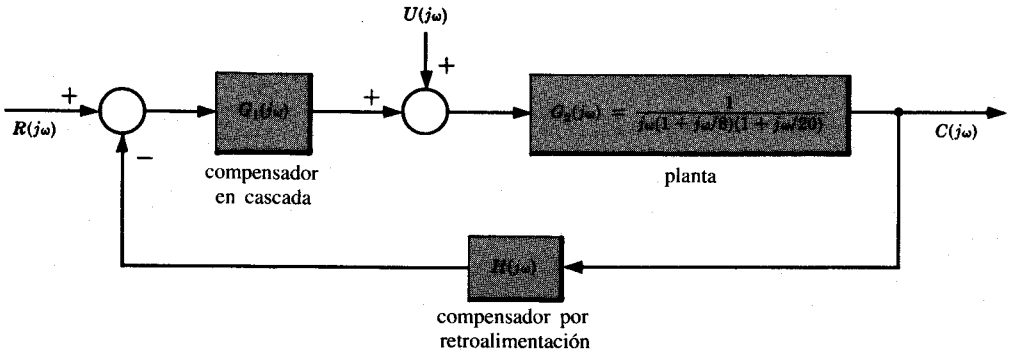


Figura 16-28

A partir de la figura 16-28, se obtiene

$$\frac{C}{U}(j\omega) = \frac{G_2(j\omega)}{1 + G_1G_2H(j\omega)} \qquad \text{y} \qquad \frac{C}{R}(j\omega) = \frac{G_1G_2(j\omega)}{1 + G_1G_2H(j\omega)}$$

De manera similar a la del ejemplo 9.7, fácilmente puede demostrarse que

$$S_{|G_2(j\omega)|}^{(C/R)(j\omega)} = \frac{1}{1 + G_1G_2H(j\omega)}$$

Si suponemos que $|G_1G_2H(j\omega)| \gg 1$ en el intervalo de frecuencia $0 \leq \omega \leq 8$ rad/s (esta desigualdad debe verificarse al completar el diseño y, si no se satisface, la compensación deberá calcularse de nuevo) entonces la especificación 3) puede aproximarse por medio de

$$20\log_{10}\left|S_{|G_2(j\omega)|}^{(C/R)(j\omega)}\right| \cong 20\log_{10}\left|\frac{1}{G_1G_2H(j\omega)}\right|$$

$$= -20\log_{10}|G_1G_2H(j\omega)| \leq -10 \text{ dB}$$

o

$$20\log_{10}|G_1G_2H(j\omega)| \geq 10 \text{ dB}$$

De modo similar, la especificación 4) puede aproximarse por medio de

$$20\log_{10}\left|\frac{C}{U}(j\omega)\right| \cong 20\log_{10}\frac{|G_2(j\omega)|}{|G_1G_2H(j\omega)|}$$

$$= 20\log_{10}|G_2(j\omega)| - 20\log_{10}|G_1G_2H(j\omega)| \leq -20 \text{ dB}$$

o

$$20\log_{10}|G_1G_2H(j\omega)| \geq [20 + 20\log_{10}|G_2(j\omega)|] \text{ dB}$$

Las especificaciones 3) y 4) pueden transformarse entonces en la siguiente forma combinada. Necesitamos que la respuesta de frecuencia en malla abierta $G_1G_2H(j\omega)$ se localice en una región del diagrama de magnitud de Bode que satisfaga simultáneamente las dos desigualdades:

$$20\log_{10}|G_1G_2H(j\omega)| \geq 10 \text{ dB}$$

$$20\log_{10}|G_1G_2H(j\omega)| \geq [20 + 20\log_{10}|G_2(j\omega)|] \text{ dB}$$

Esta región se encuentra por encima de la línea interrumpida mostrada en el diagrama de magnitud de Bode de la figura 16-29, en la cual también se incluyen los diagramas de Bode de $G_2(j\omega)$. El diseño puede completarse al determinar la compensación que satisfaga los requerimientos de margen de ganancia y de fase, 1) y 2), sujetos a esta restricción de magnitud.

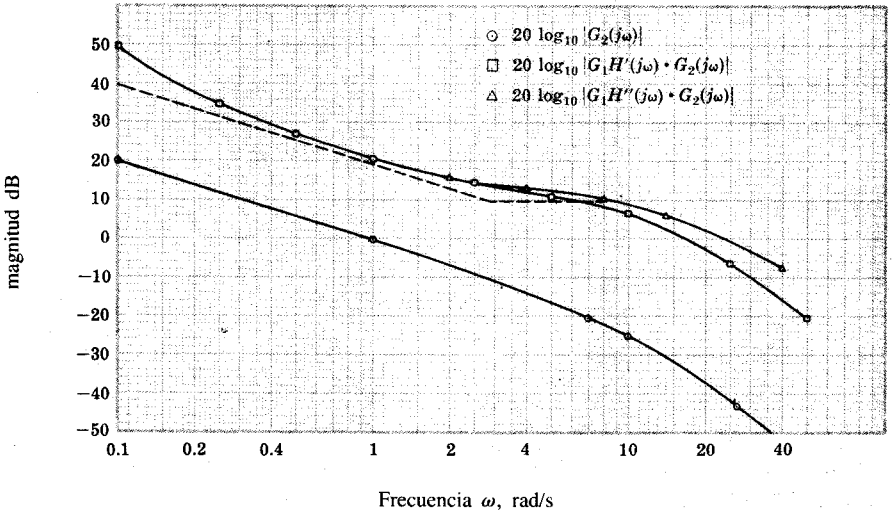
Un aumento de 32 dB en la ganancia de Bode, la cual es necesaria en $\omega = 8$ rad/s, satisfaría las especificaciones 3) y 4), pero no las especificaciones 1) y 2). En consecuencia se necesita una compensación más complicada. Para un segundo intento, encontramos que la compensación por atraso-adelanto:

$$G_1H'(j\omega) = \frac{100(1 + j\omega/2.5)(1 + j\omega/0.25)}{(1 + j\omega/25)(1 + j\omega/0.025)}$$

produce un sistema con un margen de ganancia de 6 dB y $\phi_{MF} \cong 26°$, como se muestra en la figura 16-29. En la figura se observa que es necesario un adelanto de fase de más de 10° a 15° cerca de $\omega = 25$ rad/s y $|G_1H'(j\omega)|$ debe incrementarse por lo menos en 2 dB en las proximidades de $\omega = 8$ rad/s para satisfacer la restricción de magnitud. Si se introduce una red de adelanto adicional y se aumenta la ganancia de Bode para compensar la atenuación de baja frecuencia de la red de adelanto, la compensación se hace

$$G_1H''(j\omega) = 300\left(\frac{1 + j\omega/10}{1 + j\omega/30}\right)\left[\frac{(1 + j\omega/2.5)(1 + j\omega/0.25)}{(1 + j\omega/25)(1 + j\omega/0.025)}\right]$$

Esto produce un margen de ganancia de 7 dB, $\phi_{MF} \cong 30°$ y la satisfacción de las especificaciones 3) y 4), como se muestra en la figura 16-29. La suposición de que $|G_1G_2H(j\omega)| \gg 1$ para $0 \leq \omega \leq 8$ rad/s fácilmente se justifica al calcular los valores reales de las magnitudes dB de



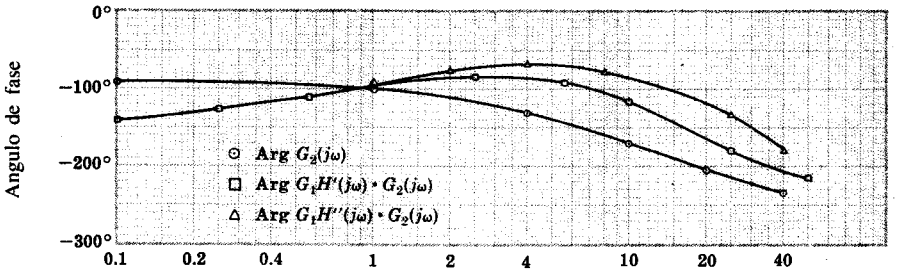


Figura 16-29

$$\left|S^{(C/R)(j\omega)}_{|G_2(j\omega)|}\right| \qquad \text{y} \qquad \left|\frac{C}{U}(j\omega)\right|$$

El compensador $G_1H''(j\omega)$ puede dividirse entre las trayectorias directa y de retroalimentación, o ponerlas todas en una trayectoria, dependiendo de la forma deseada para $(C/R)\,(j\omega)$ si así se especifica en la aplicación.

Problemas suplementarios

16.12. Diseñe un compensador para el sistema con la función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(j\omega) = \frac{20}{j\omega(1+j\omega/10)(1+j\omega/25)(1+j\omega/40)}$$

con el fin de que se produzca un sistema en malla cerrada con un margen de ganancia de por lo menos 10 dB y un margen de fase de por lo menos 45°.

16.13. Determine un compensador para el sistema del problema 16.1 que produzca los mismos márgenes de ganancia y de fase pero con una frecuencia de cruce ω_1 de por lo menos 4 rad/s.

16.14. Diseñe un compensador para el sistema con función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(j\omega) = \frac{2}{(1+j\omega)\left[1+j\omega/10-(\omega/4)^2\right]}$$

que produzca un sistema en malla cerrada con un margen de ganancia de por lo menos 6 dB y un margen de fase de por lo menos 40°.

16.15. Resuelva el problema 12.9 utilizando los diagramas de Bode. Suponga que debe garantizarse una sobretensión máxima del 25%, si el sistema tiene un margen de fase de por lo menos 45°.

16.16. Resuelva el problema 12.10 usando diagramas de Bode.

16.17. Resuelva el problema 12.20 usando diagramas de Bode.

16.18. Resuelva el problema 12.21 usando diagramas de Bode.

Capítulo 17

Análisis de los diagramas de Nichols

17.1 Introducción

El análisis de los diagramas de Nichols, un método de respuesta de frecuencia, es una modificación de los métodos de Nyquist y de Bode. La *carta de Nichols* en esencia es una transformación de los círculos M y N en el diagrama polar (sección 11.12) en contornos no circulares M y N en una gráfica de la magnitud en dB en términos del ángulo de fase en coordenadas rectangulares. Si $GH(\omega)$ representa la función de respuesta de frecuencia en malla abierta de un sistema continuo en el tiempo o discreto en el tiempo, entonces $GH(\omega)$ representado en una carta de Nichols se llama *diagrama de carta de Nichols* de $GH(\omega)$. La estabilidad relativa de un sistema en malla cerrada se obtiene fácilmente a partir de esta gráfica. Sin embargo, la determinación de la estabilidad absoluta con este método en general no es práctica, y es preferible emplear las técnicas del Capítulo 5 o el criterio de estabilidad de Nyquist (sección 11.10).

Las razones para utilizar el análisis de los diagramas de Nichols son las mismas que para los otros métodos de respuesta de frecuencia, las técnicas de Nyquist y de Bode, las cuales se discutieron en los Capítulos 11 y 15. El diagrama de carta de Nichols tiene por lo menos dos ventajas sobre el diagrama polar: 1) puede graficarse un intervalo de magnitudes mucho más amplio porque $|GH(\omega)|$ se representa en una escala logarítmica; y 2) la gráfica de $GH(\omega)$ se obtiene de la suma algebraica de las contribuciones de las magnitudes y los ángulos de fase individuales de sus polos y ceros. Si bien estas dos propiedades son compartidas por los diagramas de Bode, $|GH(\omega)|$ y el arg $GH(\omega)$ se incluyen en un solo diagrama de carta de Nichols, en lugar de dos diagramas de Bode.

Las técnicas de la carta de Nichols son útiles para representar de manera directa $(C/R)(\omega)$ y se aplican especialmente en el diseño de sistemas, como se muestra en el capítulo siguiente.

17.2 Diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase

La forma polar de las funciones de respuesta de frecuencia en malla abierta, tanto de sistemas continuos como discretos, es

$$GH(\omega) = |GH(\omega)| \angle \arg GH(\omega) \qquad (17.1)$$

Definición 17.1: El **diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase** de $GH(\omega)$ es una gráfica de $|GH(\omega)|$, en decibeles, en términos de arg $GH(\omega)$, en grados, en coordenadas rectangulares con ω como parámetro.

EJEMPLO 17.1. En la figura 17-1 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta continua en el tiempo.

$$GH(j\omega) = 1 + j\omega = \sqrt{1+\omega^2} \angle \tan^{-1}\omega$$

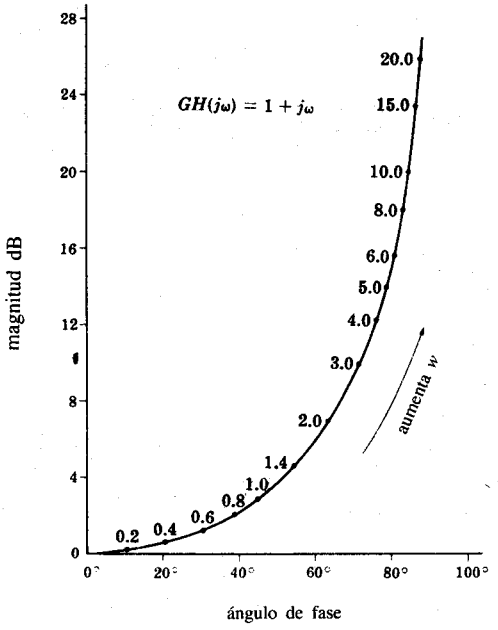


Figura 17-1

17.3 Construcción de diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase

Los diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase para sistemas continuos en el tiempo o discretos en el tiempo pueden construirse directamente al evaluar $20 \log_{10} |GH(\omega)|$ y arg $GH(\omega)$ en grados, para un número suficiente de valores de ω (o de ωT), y representar los resultados en coordenadas rectangulares con el log de la magnitud como ordenada, y el ángulo de fase como abscisa. Algunos programas de aplicación disponibles hacen de éste un proceso relativamente simple.

EJEMPLO 17.2. En la figura 17-2 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de respuesta

$$GH(e^{j\omega T}) = \frac{\frac{1}{100}(e^{j\omega T}+1)^2}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}+\frac{1}{3})(e^{j\omega T}+\frac{1}{2})}$$

de frecuencia en malla abierta. Nótese que ωT es el parámetro a lo largo de la curva.

Al examinar la técnica aplicada a los sistemas continuos, se ilustrará un método gráfico para la construcción de los diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase.

Primero se escribe $GH(j\omega)$ en la *forma de Bode* (sección 15.3):

$$GH(j\omega) = \frac{K_B(1+j\omega/z_1)\cdots(1+j\omega/z_m)}{(j\omega)^l(1+j\omega/p_1)\cdots(1+j\omega/p_n)}$$

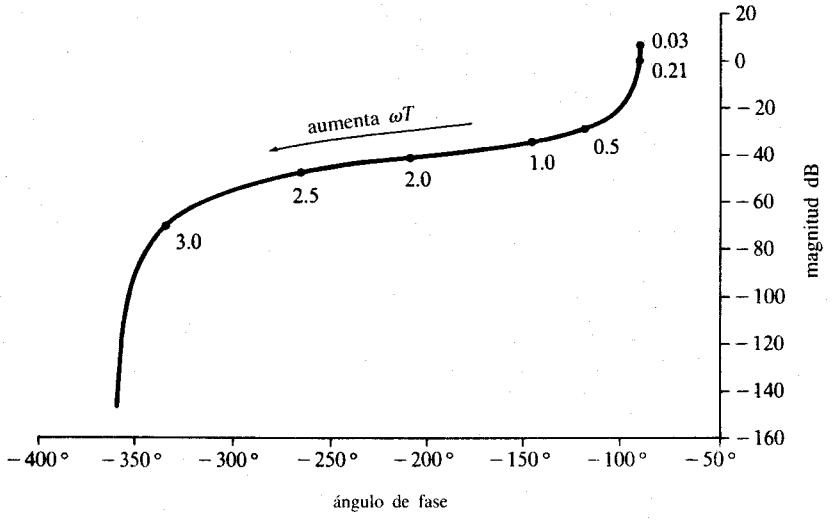


Figura 17-2

en la cual l es un entero no negativo. Para $K_B > 0$ [si $K_B < 0$, sume $-180°$ al arg $GH(j\omega)$],

$$20\log_{10}|GH(j\omega)| = 20\log_{10}K_B + 20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{z_1}\right| + \cdots + 20\log_{10}\left|1+\frac{j\omega}{z_m}\right| + 20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^l}\right| + 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+\dfrac{j\omega}{p_1}}\right| + \cdots + 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+\dfrac{j\omega}{p_n}}\right| \quad (17.2)$$

$$\arg GH(j\omega) = \arg\left(1+\frac{j\omega}{z_1}\right) + \cdots + \arg\left(1+\frac{j\omega}{z_m}\right) + \arg\left[\frac{1}{(j\omega)^l}\right] + \arg\frac{1}{1+\dfrac{j\omega}{p_1}} + \cdots + \arg\frac{1}{1+\dfrac{j\omega}{p_n}} \quad (17.3)$$

Al utilizar las ecuaciones (*17.2*) y (*17.3*), el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $GH(j\omega)$ se genera al sumar las magnitudes en dB y los ángulos de fase de los polos y ceros, o los pares de polos y ceros cuando son conjugados complejos.

El diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de K_B es una línea recta paralela al eje del ángulo de fase. La ordenada de la recta es $20\log_{10}K_B$.

El diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para un *polo de orden l en el origen,*

$$\frac{1}{(j\omega)^l} \quad (17.4)$$

es una línea recta paralela al eje de la magnitud en dB con una abscisa $-90l°$, como se muestra en la figura 17-3. Nótese que el parámetro sobre esta curva es ω^l.

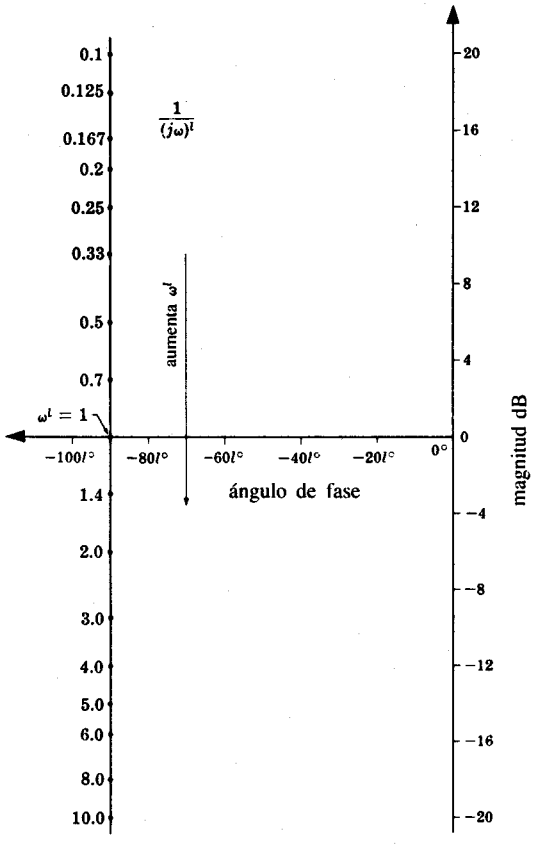


Figura 17-3

El diagrama para un *cero de orden l en el origen,*

$$(j\omega)^l \tag{17.5}$$

es una línea recta paralela al eje de magnitud en dB con una abscisa de $90l°$. El diagrama para $(j\omega)^l$ es la imagen diagonal especular con respecto al origen de la gráfica de $1/(j\omega)^l$ Es decir, para un valor fijo de ω, la magnitud en dB y el ángulo de fase de $1/(j\omega)^l$ son los valores negativos de los de $(j\omega)^l$.

En la figura 17-4 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para un *polo real,*

$$\frac{1}{1+j\omega/p} \qquad p>0 \tag{17.6}$$

la forma de la gráfica es independiente de p porque el parámetro de frecuencia en la curva se encuentra normalizado a ω/p.

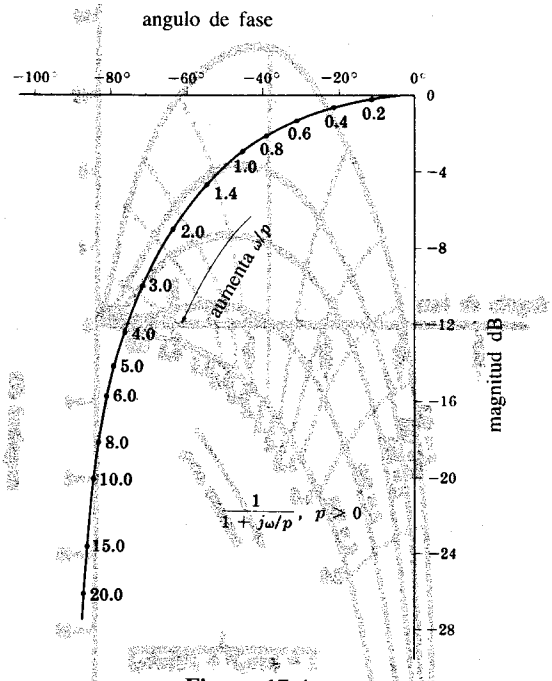


Figura 17-4

El diagrama para un *cero real*

$$1 + \frac{j\omega}{z} \qquad z > 0 \tag{17.7}$$

es la imagen diagonal especular con respecto al origen de la figura 17-4.

En la figura 17-5 se presenta un conjunto de diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase para varios pares de *polos conjugados complejos*,

$$\frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2 + j2\zeta(\omega/\omega_n)} \qquad 0 < \zeta < 1 \tag{17.8}$$

Para un valor fijo de ζ, las gráficas son independientes de ω_n porque el parámetro de frecuencia se encuentra normalizado a ω/ω_n.

Los diagramas para *ceros conjugados complejos*,

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \qquad 0 < \zeta < 1 \tag{17.9}$$

son las imágenes diagonales especulares con respecto al origen de la figura 17-5.

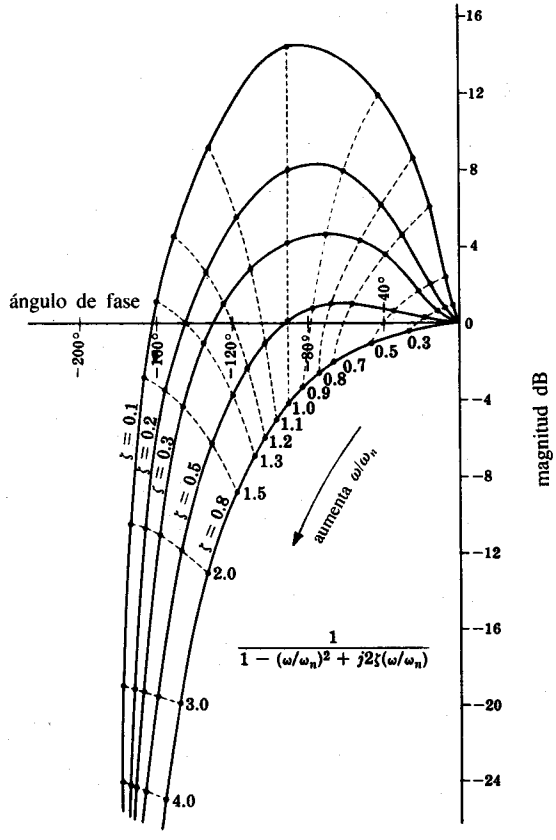


Figura 17-5

EJEMPLO 17.3. El diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de

$$GH(j\omega) = \frac{10(1+j\omega/2)}{(1+j\omega)\left[1-(\omega/2)^2+j\omega/2\right]}$$

se construye al sumar las magnitudes en dB y los ángulos de fase de los factores individuales:

$$10 \qquad 1+\frac{j\omega}{2} \qquad \frac{1}{1+j\omega} \qquad \frac{1}{1-(\omega/2)^2+j\omega/2}$$

Como en la tabla 17.1, la tabulación de estos factores es bastante útil. La primera fila contiene la magnitud en dB y el ángulo de fase de ganancia de Bode $K_B = 10$ para varios valores de frecuencia. La magnitud es 20 dB y el ángulo de fase es 0° para cualquier ω. La segunda fila contiene la magnitud en dB y el ángulo de fase del término $(1 + j\omega/2)$ para los mismos valores de ω. Estos se obtuvieron a partir de la figura 17-4 al hacer $p = 2$ y tomar los negativos de los valores en la curva para las frecuencias en la tabla. La tercera fila corresponde al término $1/(1 + j\omega)$, y también se obtuvo de la figura 17-4. La cuarta fila se tomó de la curva $\zeta = 0.5$ de la figura 17-5 al hacer $\omega_n = 2$. La suma de las magnitudes en dB y los ángulos de fase de los

Tabla 17.1

Término \ Frecuencia ω	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.8	4	6	8
10	20 dB 0°	20 0°	20 0°	20 0°	20 0°	20 0°	20 0°	20 0°	20 0°	20 0°
$1+\frac{j\omega}{2}$	0 dB 0°	0.2 11°	0.6 21°	1.3 31°	2.2 39°	3.0 45°	4.7 54°	7 63°	10 71°	12.3 76°
$\frac{1}{1+j\omega}$	0 dB 0°	−0.6 −21°	−2.2 −39°	−3.8 −50°	−5.4 −57°	−7.0 −63°	−9.4 −70°	−12.3 −76°	−15.7 −81°	−18.1 −83°
$\frac{1}{1-(\omega/2)^2+j\omega/2}$	0 dB 0°	0.3 −12°	0.6 −26°	0.9 −46°	1.0 −68°	0 −90°	−4.8 −126°	−12 −148°	−19.5 −160°	−24.5 −166°
Suma = $GH(j\omega)$	20 dB 0°	19.9 −22°	19.0 −44°	18.4 −65°	17.8 −86°	16 −108°	10.5 −142°	2.7 −161°	−5.2 −170°	−10.3 −173°

términos individuales para las frecuencias dadas en la tabla aparecen en la última fila. Estos valores se grafican en la figura 17-6 y representan el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $GH(j\omega)$.

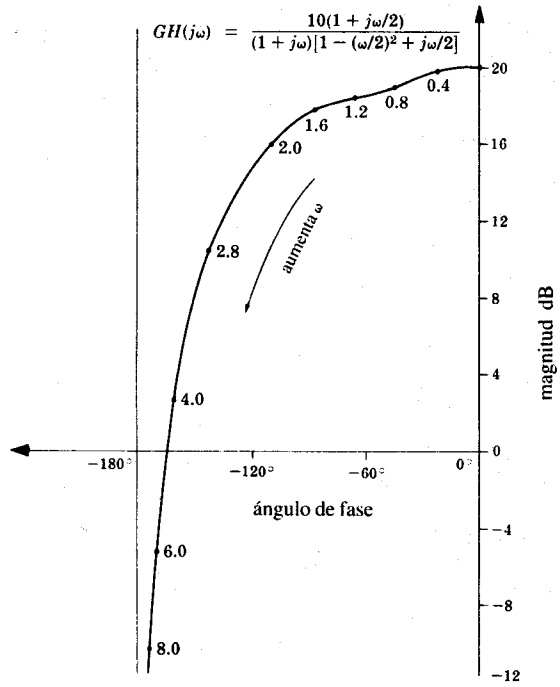


Figura 17-6

17.4 Estabilidad relativa

A partir del diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $GH(\omega)$, los márgenes de ganancia y de fase se determinan con facilidad para los sistemas continuos en el tiempo y los sistemas discretos en el tiempo.

La frecuencia de *cruce de fase* ω_π es la frecuencia a la cual la gráfica de $GH(\omega)$ corta la línea de $-180°$ en el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase. El *margen de ganancia en* dB está dado por

$$\text{margen de ganancia} = -20\log_{10}|GH(\omega_\pi)| \text{ dB} \tag{17.10}$$

y se lee directamente del diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase.

La frecuencia de *cruce de ganancia* ω_1 es la frecuencia a la cual la gráfica de $GH(\omega)$ corta la línea de 0 dB en el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase. El margen de fase está dado por

$$\text{margen de fase} = [180 + \arg GH(\omega_1)] \text{ grados}$$

y puede leerse directamente del diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase.

En la mayor parte de los casos, los márgenes de fase y de ganancia positivos asegurarán la estabilidad del sistema en malla cerrada; sin embargo, debe establecerse la estabilidad absoluta por otros medios (por ejemplo, *véanse* los Capítulos 5 y 11) para garantizar que esto sea cierto.

EJEMPLO 17.4. En la figura 17-7 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $GH(\omega)$ para un sistema estable. Como se indica, el margen de ganancia es 15 dB y el margen de fase es 35°.

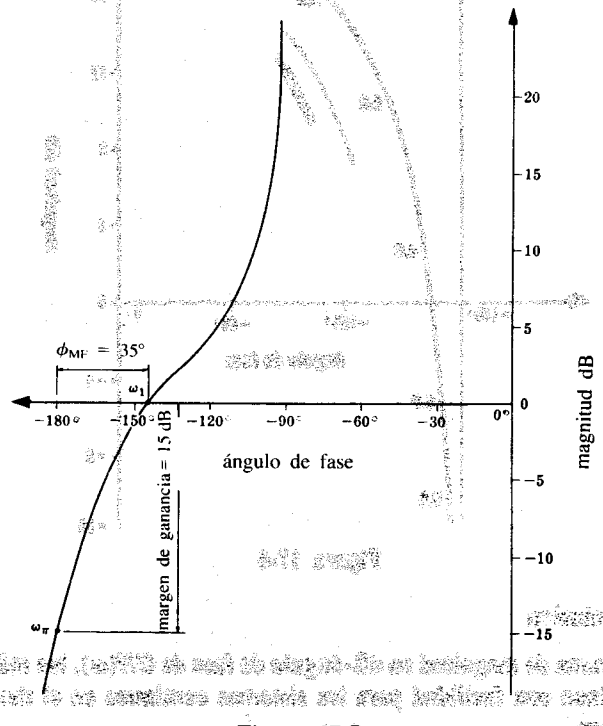


Figura 17-7

17.5 La carta de Nichols

Lo que sigue de este tema se restringe a los sistemas continuos o discretos, con retroalimentación unitaria. Como se ilustra en el ejemplo 17.9, los resultados se generalizan con facilidad a los sistemas con retroalimentación no unitaria.

La función de respuesta de frecuencia en malla cerrada de un sistema con retroalimentación unitaria puede escribirse en forma polar como

$$\frac{C}{R}(\omega) = \left|\frac{C}{R}(\omega)\right| \angle \arg \frac{C}{R}(\omega) = \frac{G(\omega)}{1+G(\omega)} = \frac{|G(\omega)| \angle \phi_G}{1+|G(\omega)| \angle \phi_G} \qquad (17.11)$$

en donde $\phi_G \equiv \arg G(\omega)$.

El lugar geométrico de los puntos en el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase, para los cuales

$$\left|\frac{C}{R}(\omega)\right| = M = \text{constante}$$

se define mediante la ecuación

$$|G(\omega)|^2 + \frac{2M^2}{M^2-1}|G(\omega)|\cos\phi_G + \frac{M^2}{M^2-1} = 0 \qquad (17.12)$$

Para un valor fijo de M, el lugar geométrico puede representarse en tres pasos: 1) escoger los valores numéricos para $|G(\omega)|$; 2) despejar ϕ_G de las ecuaciones resultantes, excluyendo los valores de $|G(\omega)|$ para los cuales el $|\cos\phi_G| > 1$; y 3) representar en el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase los puntos obtenidos. Nótese que para valores fijos de M y de $|G(\omega)|$, ϕ_G tiene valores múltiples porque aparece en la ecuación como cos ϕ_G.

EJEMPLO 17.5 En la figura 17-8 se representa el lugar geométrico de los puntos para los cuales

$$\left|\frac{C}{R}(\omega)\right| = \sqrt{2}$$

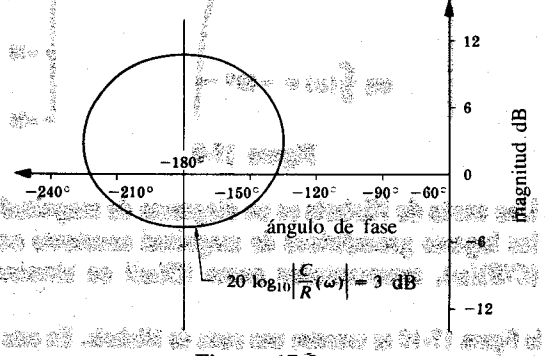


Figura 17-8

o, de modo equivalente,

$$20\log_{10}\left|\frac{C}{R}(\omega)\right| = 3 \text{ dB}$$

Una curva similar aparece en todos los múltiplos impares de 180° a lo largo del eje arg $G(\omega)$.

El lugar geométrico de los puntos del diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para los cuales arg$(C/R)(\omega)$ es constante o, de modo equivalente,

$$\tan\left[\arg\frac{C}{R}(\omega)\right] = N = \text{constante}$$

está definido por la ecuación

$$|G(\omega)| + \cos\phi_G - \frac{1}{N}\operatorname{sen}\phi_G = 0 \qquad (17.13)$$

Para un valor fijo de N este lugar geométrico de los puntos puede representarse en tres pasos: 1) elegir los valores para ϕ_G; 2) despejar $G(\omega)$ de las ecuaciones resultantes; y 3) representar en el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase los puntos obtenidos.

EJEMPLO 17.6. En la figura 17-9 se presenta la gráfica del lugar geométrico de los puntos para los cuales arg $(C/R)(\omega) = -60°$ o, de modo equivalente,

$$\tan\left[\arg\frac{C}{R}(\omega)\right] = -\sqrt{3}$$

Una curva similar aparece en todos los múltiplos de 180° a lo largo del eje $G(\omega)$.

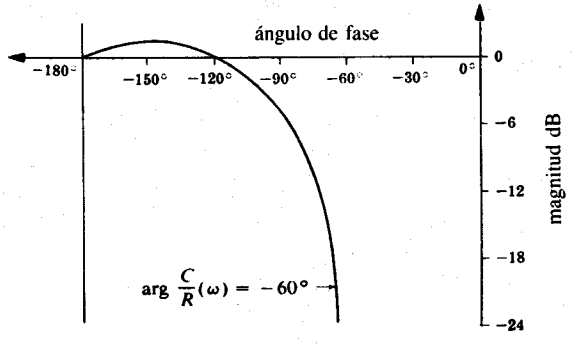


Figura 17-9

Definición 17.2: Una **carta de Nichols** es un diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de los lugares geométricos de magnitud constante en dB y ángulo de fase de $(C/R)(\omega)$, representados como $|G(\omega)|$ en términos de arg $G(\omega)$.

EJEMPLO 17.7. En la figura 17-10 se muestra una carta de Nichols. En esta carta el rango del arg $G(\omega)$ es muy apropiado en el análisis de sistemas de control.

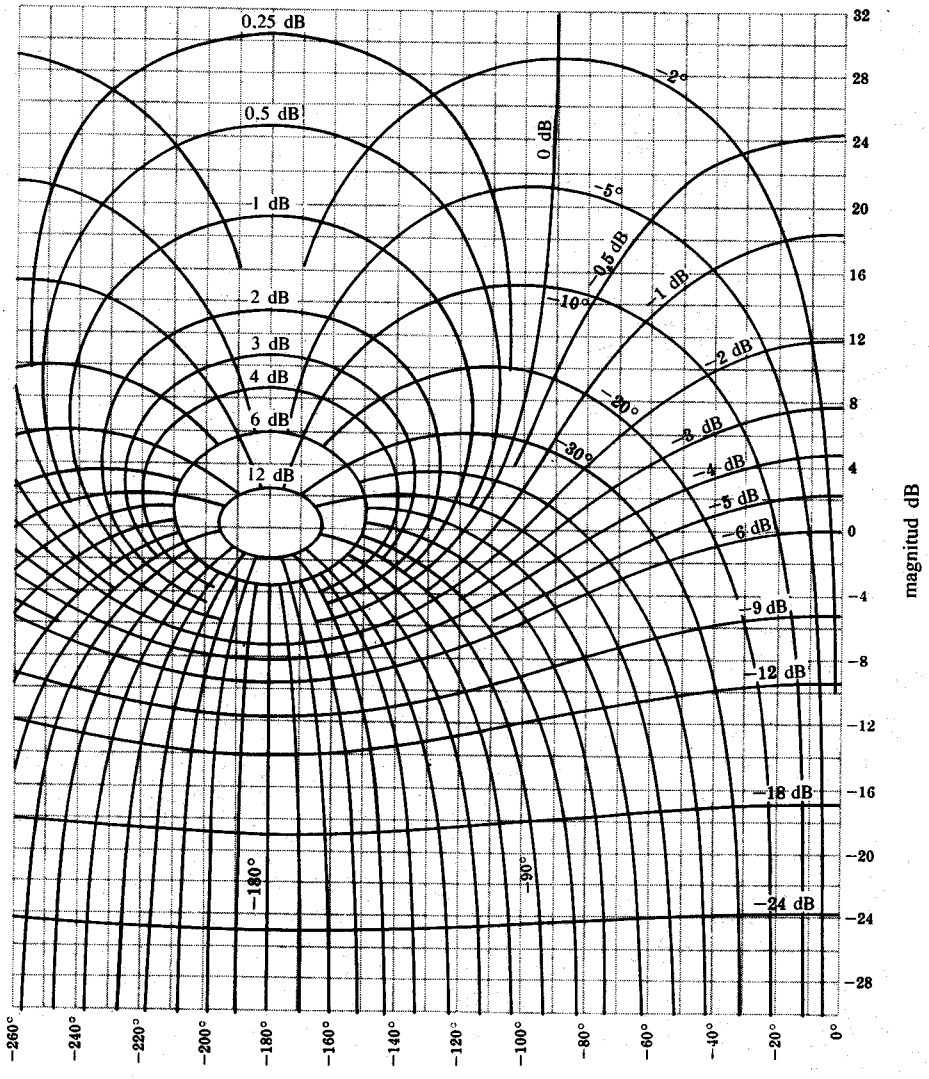


Figura 17-10

Definición 17.3: Un **diagrama de Nichols** es una gráfica de magnitud en dB-ángulo de fase de una función de respuesta de frecuencia $P(\omega)$ superpuesta a una carta de Nichols.

17.6 Funciones de respuesta de frecuencia en malla cerrada

La función de respuesta de frecuencia $(C/R)(\omega)$ de un sistema con retroalimentación unitaria puede determinarse a partir del diagrama de Nichols de $G(\omega)$. Los valores de $|(C/R)(\omega)|$ en

dB y de arg $(C/R)(\omega)$ se determinan directamente del diagrama en los puntos en donde la gráfica de $G(\omega)$ interseca las gráficas de los lugares de $|(C/R)(\omega)|$ y arg $(C/R)(\omega)$ constantes.

EJEMPLO 17.8. En la figura 17-11 se presenta el diagrama de Nichols de $GH(\omega)$ para el sistema continuo en el tiempo del ejemplo 17.3. Suponiendo que este es un sistema con retroalimentación unitaria ($H = 1$), los valores de $|C/R(\omega)|$ y arg $(C/R)(\omega)$ se obtienen a partir de esta gráfica, y se representan en la figura 17-12 como un diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $(C/R)(\omega)$.

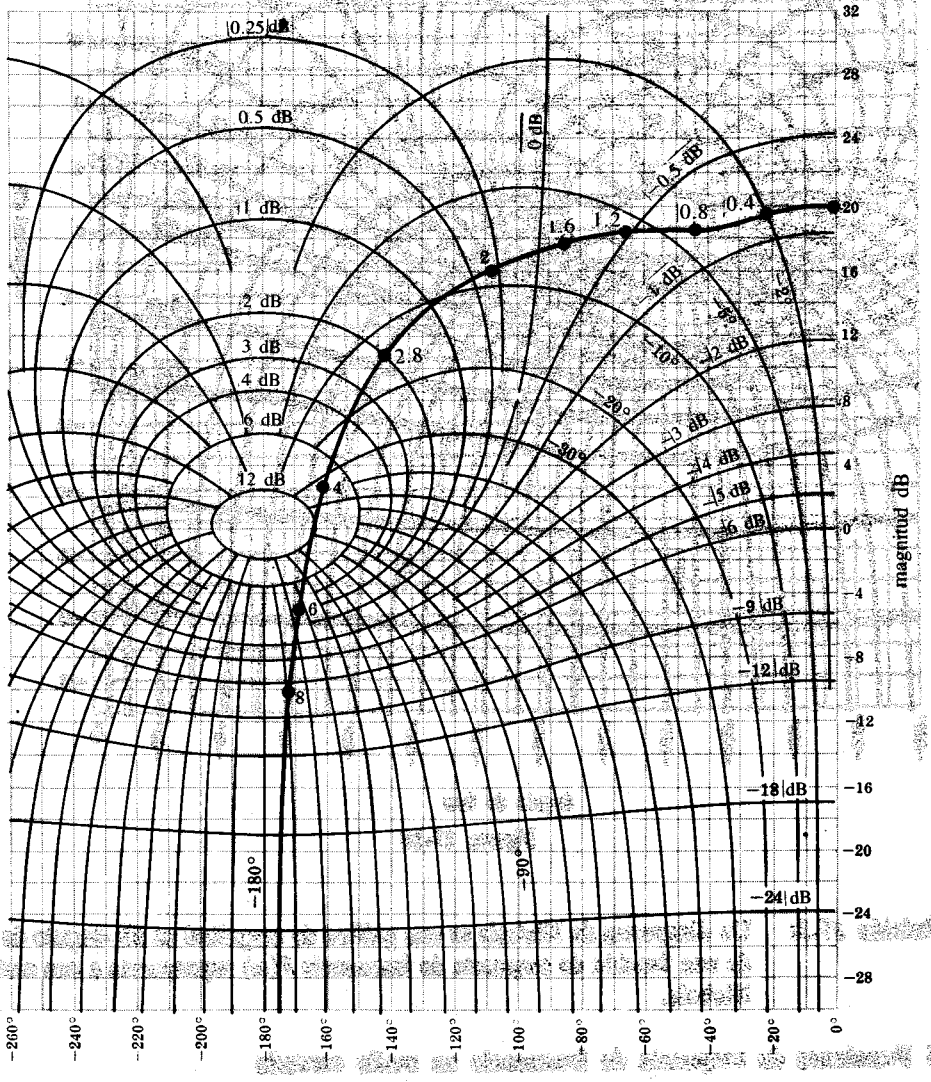


Figura 17-11

EJEMPLO 17.9. Suponga que el sistema del ejemplo 17.3 no es un sistema con retroalimentación unitaria y que

$$G(\omega) = \frac{10}{(1+j\omega)\left[1-(\omega/2)^2+j\omega/2\right]} \qquad H(\omega) = 1 + j\frac{\omega}{2}$$

Entonces

$$\frac{C}{R}(\omega) = \frac{1}{H(\omega)}\left[\frac{GH(\omega)}{1+GH(\omega)}\right] = \frac{1}{H(\omega)}\left[\frac{G'(\omega)}{1+G'(\omega)}\right]$$

en donde $G' \equiv GH$. En el ejemplo 17.8 se obtuvo el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $G'(\omega)/(1 + G'(\omega))$ y se muestra en la figura 17-12. El diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $(C/R)(\omega)$ puede obtenerse al sumar punto por punto a esta gráfica la magnitud y el ángulo de fase del polo $1/(1 + j\omega/2)$, los cuales pueden obtenerse a partir de la figura 17-4 para $p = 2$. El resultado se muestra en la figura 17-13.

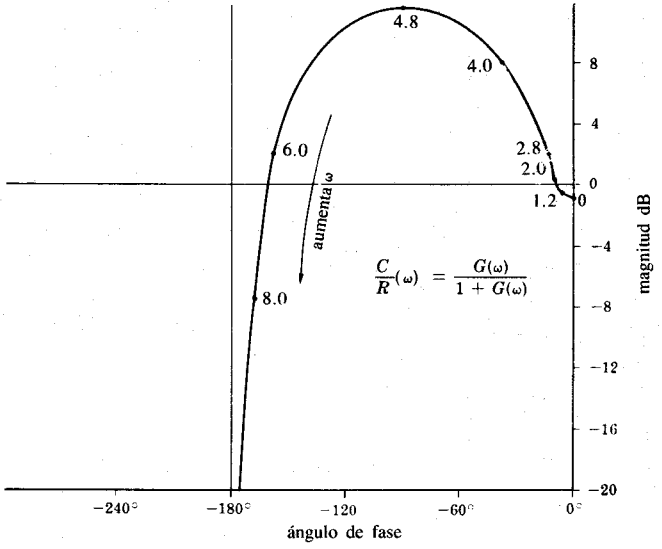


Figura 17-12

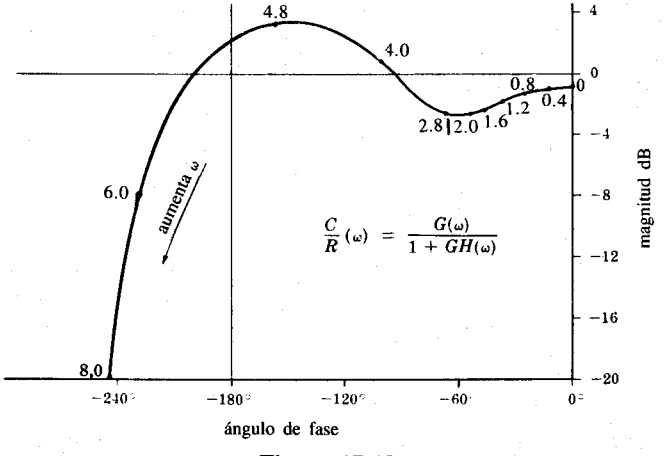


Figura 17-13

Problemas resueltos

Diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase

17.1. Demuestre que el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para un polo de orden l en el origen del plano s, $1/(j\omega)^l$, es una línea recta paralela al eje de magnitud en dB con una abscisa de $-90l°$ para $\omega \geq 0$.

En forma polar, $j\omega = \omega\angle 90°$, $\omega \geq 0$. En consecuencia

$$\frac{1}{(j\omega)^l} = \frac{1}{\omega^l}\angle -90l° \qquad \omega \geq 0$$

$$20\log_{10}\left|\frac{1}{(j\omega)^l}\right| = 20\log_{10}\frac{1}{\omega^l} = -20\log_{10}\omega^l$$

y el arg $1/(j\omega)^l = -90l°$. Vemos que el arg $1/(j\omega)^l$ es independiente de ω y por tanto la abscisa del diagrama es una constante igual a $-90l°$. Además, para la región $0 \leq \omega \leq +\infty$, la magnitud en dB varía desde $+\infty$ hasta $-\infty$. De esta manera la abscisa es fija y la ordenada toma todos los valores. El resultado es la línea recta que se muestra en la figura 17-3.

17.2. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta continua en el tiempo

$$GH = \frac{2}{s(1+s)(1+s/3)}$$

La magnitud en dB de $GH(j\omega)$ es

$$20\log_{10}|GH(j\omega)| = 20\log_{10}\frac{2}{|j\omega||1+j\omega||1+j\omega/3|}$$

$$= 20\log_{10}2 - 20\log_{10}\left[\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{9}}\right]$$

$$= 6.02 - 10\log_{10}\left[\omega^2(1+\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{9}\right)\right]$$

El ángulo de fase de $GH(j\omega)$ es

$$\arg[GH(j\omega)] = -\arg[j\omega] - \arg[1+j\omega] - \arg\left[1+\frac{j\omega}{3}\right]$$

$$= -90° - \tan^{-1}\omega - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{3}\right)$$

En la figura 17-14 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase.

17.3. Utilizando los diagramas de las figuras 17-3 y 17-4, demuestre cómo puede aproximarse el diagrama de la figura 17-14.

Escribimos $GH(j\omega)$ como

$$GH(j\omega) = (2)\left(\frac{1}{j\omega}\right)\left(\frac{1}{1+j\omega}\right)\left(\frac{1}{1+j\omega/3}\right)$$

La magnitud en dB de $GH(j\omega)$ es

$$20\log_{10}|GH(j\omega)| = 20\log_{10}2 + 20\log_{10}\left|\frac{1}{j\omega}\right| + 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega}\right| + 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega/3}\right|$$

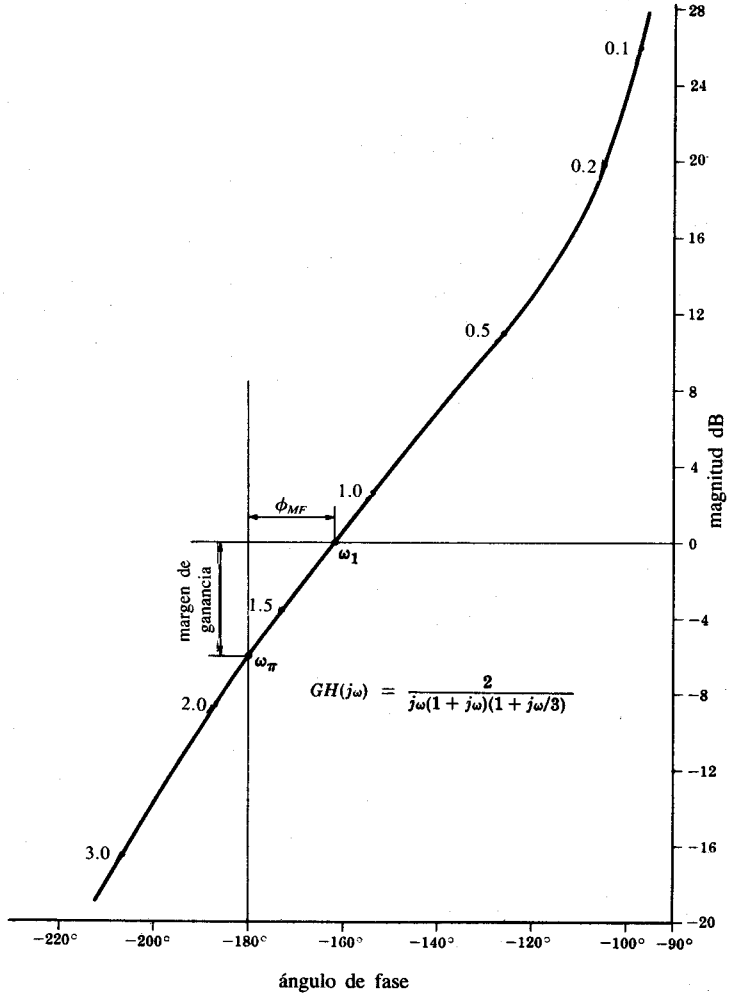


Figura 17-14

El ángulo de fase es

$$\arg GH(j\omega) = \arg(2) + \arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j\omega/3}\right)$$

Ahora construimos la tabla 17.2.

La primera fila contiene la magnitud en dB y el ángulo de fase de la ganancia de Bode $K_B = 2$. La segunda fila contiene la magnitud en dB y el ángulo de fase del término $1/j\omega$ para diferentes valores de ω. Estos se obtienen a partir de la figura 17-3 al hacer $l = 1$ y tomar los valores de la curva para las frecuencias dadas. La tercera fila corresponde al término $1/(1 + j\omega)$ y se obtiene a partir de la figura 17-4 para $p = 1$. La cuarta fila corresponde al término $1/(1 + j\omega/3)$ y se obtiene a partir de la figura 17-4 para $p = 3$. Cada par de valores de la última fila se obtiene al sumar las magnitudes en dB y los ángulos de fase de cada columna y corresponde a la magnitud en dB y el ángulo de fase de $GH(j\omega)$ para el valor dado de ω. En la figura 17-14 se representan estos valores de la última fila de esta tabla (con excepción del primero) y se unen para generar una aproximación.

Tabla 17.2

Término \ Frecuencia ω	0	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0
2	6 dB 0°	6 0°	6 0°	6 0°	6 0°	6 0°	6 0°	6 0°
$\frac{1}{j\omega}$	∞ −90°	20 −90°	14 −90°	6 −90°	0 −90°	−3.6 −90°	−6 −90°	−9.5 −90°
$\frac{1}{1+j\omega}$	0 0°	−0.1 −5.5°	−0.3 −11°	−1.0 −26°	−3.0 −45°	−5.2 −57°	−7.0 −63°	−10 −72°
$\frac{1}{1+j\omega/3}$	0 0°	0 −2°	−0.1 −4°	−0.2 −9°	−0.5 −17,5°	−1 0 −26°	−1.6 −33°	−3.0 −45°
Suma = $GH(j\omega)$	∞ −90°	25.9 −97.5°	19.6 −105°	10.8 −125°	2.5 −152.5°	−3.8 −173°	−8.6 −186°	−16.5 −207°

17.4. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{4(s + 0.5)}{s^2(s^2 + 2s + 4)}$$

La función de respuesta de frecuencia es

$$GH(j\omega) = \frac{4(j\omega + 0.5)}{(j\omega)^2\left((j\omega)^2 + 2j\omega + 4\right)}$$

En la figura 17-15 se presenta un diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $GH(j\omega)$, generado por computador.

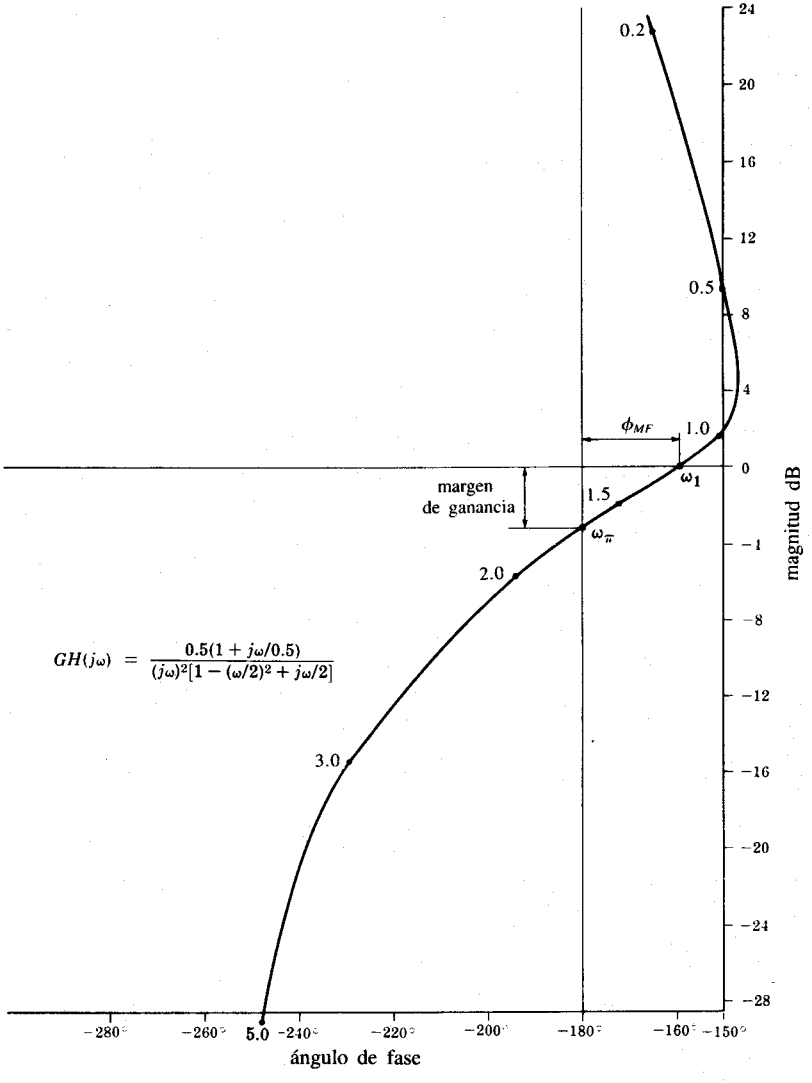


Figura 17-15

17.5. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta discreta en el tiempo.

$$GH(z) = \frac{3}{8}\frac{(z+1)\left(z+\frac{1}{3}\right)}{(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$

La función de respuesta de frecuencia en malla abierta es

$$GH(e^{j\omega T}) = \frac{3}{8}\frac{(e^{j\omega T}+1)(e^{j\omega T}+\frac{1}{3})}{(e^{j\omega T}-1)(e^{j\omega T}+\frac{1}{2})}$$

En la figura 17-16 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de GH generado por computador.

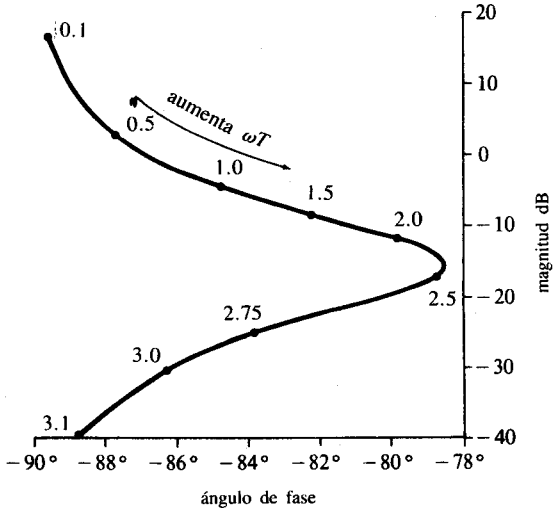


Figura 17-16

Márgenes de ganancia y de fase

17.6. Determine los márgenes de ganancia y de fase en el sistema del problema 17.2.

El diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta de este sistema se presenta en la figura 17-14 (problema 17.2). Vemos que la curva cruza la línea de 0 dB en un ángulo de fase de $-162°$. Por tanto el margen de fase es $\phi_{MF} = 180° - 162° = 18°$.

(La frecuencia de cruce de ganancia ω_1 se determina por interpolación a lo largo de la curva entre $\omega = 1.0$ y $\omega = 1.5$, que limita a ω_1 arriba y abajo, respectivamente. El valor aproximado de ω_1 es 1.2 rad/s.)

La curva cruza la línea de $-180°$ en una magnitud de -6 dB. En consecuencia el margen de fase es $= -(-6) = 6$ dB.

(La frecuencia de cruce de fase ω_π se determina por interpolación a lo largo de la curva entre $\omega = 1.5$ y $\omega = 2.0$, que limitan a ω_π arriba y abajo, respectivamente. El valor aproximado de ω_π es 1.75 rad/s.)

17.7. Determine los márgenes de ganancia y de fase en el sistema del problema 17.4.

El diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta de este sistema se presenta en la figura 17-15 (problema 17.4). Vemos que la curva cruza la línea de 0 dB en un ángulo de fase de $-159°$. Por tanto el margen de fase es $\phi_{MF} = 180° - 159° = 21°$.

(La frecuencia de cruce de ganancia ω_1 se determina por interpolación a lo largo de la curva entre $\omega = 1.0$ y $\omega = 1.5$, que limita a ω_1 arriba y abajo, respectivamente. El valor aproximado de ω_1 es 1.2 rad/s.)

La curva cruza la línea de $-180°$ en una magnitud de -3.1 dB. En consecuencia el margen de ganancia es 3.1 dB.

(La frecuencia de cruce de fase ω_π se determina por interpolación entre $\omega = 1.5$ y $\omega = 2.0$, que limitan a ω_π arriba y abajo, respectivamente. El valor aproximado de ω_π es 1.7 rad/s.)

17.8. Determine los márgenes de ganancia y de fase en el sistema definido por la función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(j\omega) = \frac{1 + j\omega/0.5}{j\omega\left[1 - (\omega/2)^2 + j\omega/2\right]}$$

En la figura 17-17 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $GH(j\omega)$. Vemos que la curva cruza la línea de 0 dB en un ángulo de fase de $-140°$. De donde el margen de fase es $\phi_{MF} = 180° - 140° = 40°$.

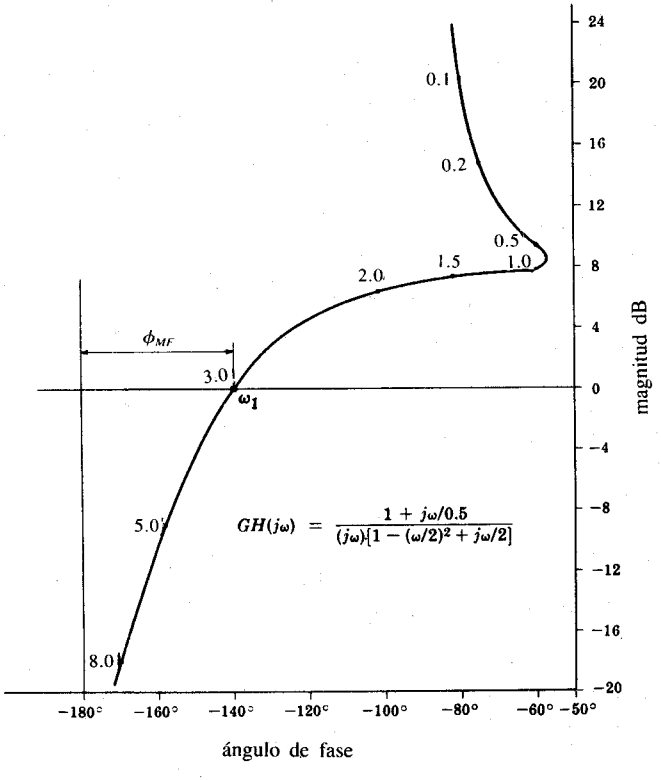


Figura 17-17

La curva no cruza la línea de $-180°$ para el intervalo de magnitudes en dB de la figura 17-17. Sin embargo, cuando $\omega \to \infty$.

$$GH(j\omega) \to \frac{j\omega/0.5}{-j\omega(\omega/2)^2} = \frac{8}{\omega^2}\angle -180°$$

La curva tiende asintóticamente a la línea de $-180°$ pero no la cruza. Por tanto el margen de ganancia es indeterminado. Esto implica que el factor de ganancia debe incrementarse en una cantidad que no produzca inestabilidad.

17.9. Determine los márgenes de fase y de ganancia en el sistema discreto en el tiempo del problema 17.5.

En la figura 17-16 (problema 17.5) se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta de este sistema. Vemos que la curva cruza la línea de 0 dB en un ángulo de fase de $-87°$. De donde el margen de fase es $\phi_{MF} = 180° - 87° = 93°$.

El ángulo de cruce de ganancia $\omega_1 T$ puede determinarse por interpolación a lo largo de la curva entre $\omega T = 0.5$ y $\omega T = 1.0$, que limitan a $\omega_1 T$ arriba y abajo, respectivamente. $\omega_1 T \simeq 0.6$ rad.

La curva nunca cruza la línea de $-180°$, así que el margen de ganancia es indeterminado al igual que el ángulo de cruce de fase.

Carta de Nichols

17.10. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos sobre un diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para los cuales la magnitud de la respuesta de frecuencia en malla cerrada $(C/R)(\omega)$ de un sistema continuo en el tiempo o discreto en el tiempo, con retroalimentación unitaria, igual a una constante M, está definido por la ecuación (*17.12*).

Utilizando la ecuación (*17.11*), $|(C/R)(\omega)|$ puede escribirse como

$$\left|\frac{C}{R}(\omega)\right| = \left|\frac{|G(\omega)|\angle\phi_G}{1+|G(\omega)|\angle\phi_G}\right|$$

Ya que $|G(\omega)|\angle\phi_G = |G(\omega)|\cos\phi_G + j|G(\omega)|\operatorname{sen}\phi_G$, puede escribirse como

$$\left|\frac{C}{R}(\omega)\right| = \left|\frac{|G(\omega)|\cos\phi_G + j|G(\omega)|\operatorname{sen}\phi_G}{1+|G(\omega)|\cos\phi_G + j|G(\omega)|\operatorname{sen}\phi_G}\right|$$

$$= \sqrt{\frac{|G(\omega)|^2\cos^2\phi_G + |G(\omega)|^2\operatorname{sen}^2\phi_G}{[1+|G(\omega)|\cos\phi_G]^2 + |G(\omega)|^2\operatorname{sen}^2\phi_G}} = \sqrt{\frac{|G(\omega)|^2}{1+2|G(\omega)|\cos\phi_G + |G(\omega)|^2}}$$

Si igualamos a M esta última expresión, elevamos al cuadrado ambos lados y eliminamos las fracciones, se obtiene

$$M^2\left[|G(\omega)|^2 + 2|G(\omega)|\cos\phi_G + 1\right] = |G(\omega)|^2$$

la cual puede escribirse como

$$(M^2-1)|G(\omega)|^2+2M^2|G(\omega)|\cos\phi_G+M^2=0$$

Al dividir por $(M^2 - 1)$ obtenemos la ecuación (*17.12*), como se pedía.

17.11. Demuestre que el lugar geométrico de los puntos en el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para los cuales la tangente del argumento de la función de respuesta de frecuencia en malla cerrada $(C/R)(\omega)$ de un sistema con retroalimentación unitaria igual a una constante N, se define mediante la ecuación (*17.13*).

Al utilizar la ecuación (*17.11*), el arg $(C/R)(\omega)$ puede escribirse como

$$\arg\left[\frac{C}{R}(\omega)\right]=\arg\left[\frac{|G(\omega)|\angle\phi_G}{1+|G(\omega)|\angle\phi_G}\right]$$

Puesto que, $|G(\omega)|\angle\phi_G=|G(\omega)|\cos\phi_G+j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G$,

$$\arg\left[\frac{C}{R}(\omega)\right]=\arg\left[\frac{|G(\omega)|\cos\phi_G+j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G}{1+|G(\omega)|\cos\phi_G+j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G}\right]$$

Al multiplicar el numerador y el denominador del término entre corchetes por el conjugado complejo del denominador se produce

$$\arg\left[\frac{C}{R}(\omega)\right]=\arg\left[\frac{(|G(\omega)|\cos\phi_G+j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G)(1+|G(\omega)|\cos\phi_G-j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G)}{(1+|G(\omega)|\cos\phi_G)^2+|G(\omega)|^2\text{sen}^2\phi_G}\right]$$

Puesto que el término del denominador en el último corchete es real, el arg$[(C/R)(\omega)]$ se determina sólo a partir del numerador. Es decir.

$$\begin{aligned}\arg\left[\frac{C}{R}(\omega)\right]&=\arg\left[(|G(\omega)|\cos\phi_G+j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G)(1+|G(\omega)|\cos\phi_G-j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G)\right]\\&=\arg\left[|G(\omega)|\cos\phi_G+|G(\omega)|^2+j|G(\omega)|\text{sen}\phi_G\right]\end{aligned}$$

utilizando $\cos^2\phi_G + \text{sen}^2\phi_G = 1$. Por consiguiente

$$\tan\left[\arg\frac{C}{R}(\omega)\right]=\frac{|G(\omega)|\text{sen}\phi_G}{|G(\omega)|\cos\phi_G+|G(\omega)|^2}$$

Si igualamos esto a N, si cancelamos los términos comunes $|G(\omega)|$ y eliminamos la fracción, se obtiene

$$N[\cos\phi_G+|G(\omega)|]=\text{sen}\phi_G$$

la cual puede volver a escribirse en la forma de la ecuación (*17.13*), como se requiere.

17.12. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase del lugar geométrico definido por la ecuación (*17.12*) para la magnitud en dB de $(C/R)(\omega)$ igual a 6 dB.

$20 \log_{10} |(C/R)(\omega)| = 6$ dB implica que $|(C/R)(\omega)| = 2$. En consecuencia hacemos $M = 2$ en la ecuación (*17.12*) y obtenemos:

$$|G(\omega)|^2 + \frac{8}{3}|G(\omega)|\cos\phi_G + \frac{4}{3} = 0$$

como ecuación que define el lugar geométrico. Puesto que $|\cos\phi_G| \leq 1$, puede tomarse $|G(\omega)|$ únicamente en aquellos valores para los cuales se satisface la restricción. Para determinar los límites de $|G(\omega)|$, hacemos que cos ϕ_G tome sólo sus dos valores extremos de más y menos la unidad. Para cos $\phi_G = 1$, la ecuación del lugar geométrico se hace

$$|G(\omega)|^2 + \frac{8}{3}|G(\omega)| + \frac{4}{3} = 0$$

cuyas soluciones son $|G(\omega)| = -2$ y $|G(\omega)| = -\frac{2}{3}$. Puesto que un valor absoluto no puede ser negativo, se descartan estas soluciones. Esto implica que el lugar geométrico no existe en la línea de 0° (en general, en cualquier línea que sea múltiplo de 360°), lo que corresponde a cos $\phi_G = 1$.

Para cos $\phi_G = -1$, la ecuación del lugar geométrico se hace

$$|G(\omega)|^2 - \frac{8}{3}|G(\omega)| + \frac{4}{3} = 0$$

cuyas soluciones son $|G(\omega)| = 2$ y $|G(\omega)| = \frac{2}{3}$. Estas soluciones son válidas para $|G(\omega)|$ y son los valores extremos que puede tomar $|G(\omega)|$.

Al despejar cos ϕ_G de la ecuación del lugar geométrico, obtenemos

$$\cos\phi_G = \frac{-\left[\frac{4}{3} + |G(\omega)|^2\right]}{\frac{8}{3}|G(\omega)|}$$

Las curvas obtenidas a partir de esta relación son periódicas, con un periodo de 360°. La gráfica se restringe a un solo ciclo en la vecindad de la línea de −180° y se obtiene al despejar ϕ_G para varios valores de $|G(\omega)|$ entre los límites 2 y $\frac{2}{3}$. En la tabla 17.3 se presentan los resultados.

Tabla 17.3

$\lvert G(\omega)\rvert$	$20\log_{10}\lvert G(\omega)\rvert$	$\cos\phi_G$	ϕ_G	
2.0	6 dB	−1	−180°	—
1.59	4	−0.910	−204.5°	−155.5°
1.26	2	−0.867	−209.9°	−150.1°
1.0	0	−0.873	−209.2°	−150.8°
0.79	−2	−0.928	−201.9°	−158.1°
0.67	−3.5	−1	−180°	—

Nótese que hay dos valores de ϕ_G para todo valor $|\cos\phi_G| < 1$. En la figura 17-18 se presenta el diagrama resultante.

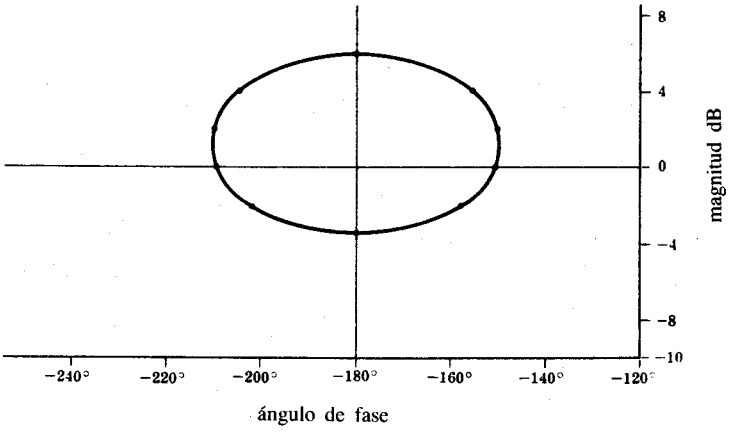


Figura 17-18

17.13. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase del lugar geométrico definido por la ecuación (*17.13*) para $\tan[\arg(C/R)(\omega)] = N = -\infty$,

$\tan[\arg(C/R)(\omega)] = -\infty$ implica que $\arg(C/R)(\omega) = -90 + k360°$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, o $\arg(C/R)(\omega) = -270° + k360°$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Graficaremos sólo el ciclo entre $-360°$ y $0°$, el cual corresponde a $k = 0$. Al hacer $N = -\infty$ en la ecuación (*17.13*), obtenemos la ecuación del lugar geométrico

$$|G(\omega)| + \cos\phi_G = 0 \qquad \text{o} \qquad \cos\phi_G = -|G(\omega)|$$

Puesto que $|\cos\phi_G| \leq 1$, el lugar geométrico existe sólo para $0 \leq |G(\omega)| \leq 1$ o, de manera equivalente,

$$-\infty \leq 20\log_{10}|G(\omega)| \leq 0$$

Para obtener el diagrama, utilizamos la ecuación del lugar geométrico con el fin de calcular los valores de magnitud en dB de $G(\omega)$ correspondientes a valores diferentes de ϕ_G. En la tabla 17.4 se presentan los resultados de estos cálculos. El diagrama deseado se presenta en la figura 17-19.

Tabla 17.4

ϕ_G		$\cos\phi_G$	$\lvert G(\omega)\rvert$	$20\log_{10}\lvert G(\omega)\rvert$
$-180°$	—	-1	1	0 dB
$-153°$	$-207°$	-0.893	0.893	-1.0
$-135°$	$-222.5°$	-0.707	0.707	-3
$-120°$	$-240°$	-0.5	0.5	-6
$-110.7°$	$-249.3°$	-0.354	0.354	-9
$-104.5°$	$-255.5°$	-0.25	0.25	-12
$-100.3°$	$-259.8°$	-0.178	0.178	-15

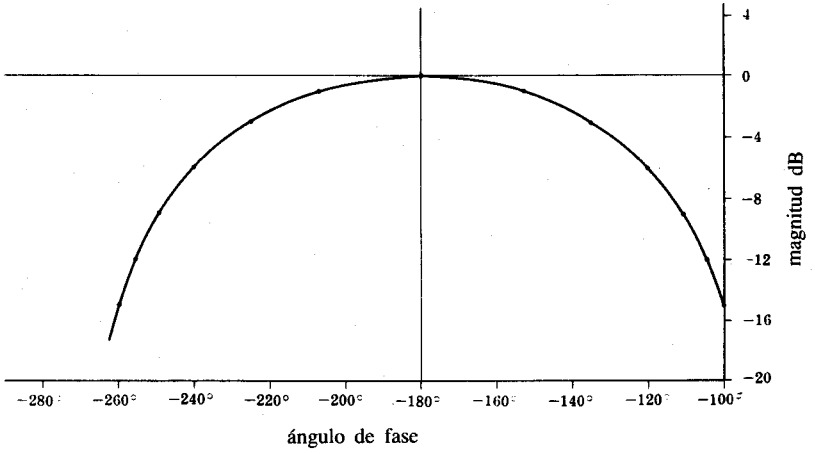


Figura 17-19

Funciones de respuesta de frecuencia en malla cerrada

17.14. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de la función de respuesta de frecuencia en malla cerrada $(C/R)(j\omega)$ del sistema con retroalimentación unitaria cuya función de transferencia en malla abierta es

$$G = \frac{2}{s(1+s)(1+s/3)}$$

$$\frac{C}{R}(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} = \frac{6}{(j\omega)^3 + 4(j\omega)^2 + 3j\omega + 6} = \frac{6}{(6-4\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)}$$

Por tanto

$$20\log_{10}\left|\frac{C}{R}(j\omega)\right| = 10\log_{10}\left|\frac{C}{R}(j\omega)\right|^2 = 10\log_{10}\frac{36}{(6-4\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2}$$

y

$$\arg\left[\frac{C}{R}(j\omega)\right] = -\tan^{-1}\frac{3\omega - \omega^3}{6-4\omega^2}$$

En la figura 17-20, la línea continua muestra un diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $(C/R)(j\omega)$, generado por computador.

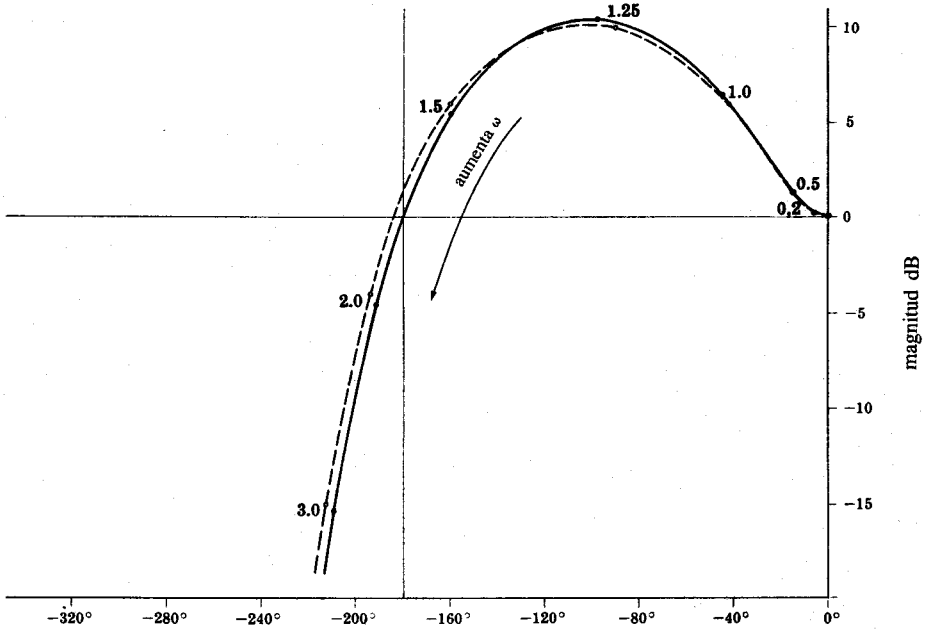


Figura 17-20

17.15. Resuelva de nuevo el problema 17.14 utilizando la técnica estudiada en la sección 17.6.

En la figura 17-21 se presenta el diagrama de Nichols de $G(j\omega)$. Determinamos los valores de la magnitud en dB de $|(C/R)(j\omega)|$ y del $\arg[(C/R)(j\omega)]$ por interpolación de los valores de magnitud en dB y ángulo de fase en el diagrama de Nichols para $\omega = 0, 0.2, 0.5, 1.0, 1.25, 1.5, 2.0$ y 3.0. En la tabla 17.5 se presentan estos valores.

Tabla 17.5

ω	$20\log_{10}\left\|\frac{C}{R}(j\omega)\right\|$	$\arg\left[\frac{C}{R}(j\omega)\right]$
0	0 dB	0°
0.2	0.2	−6°
0.5	1.2	−15°
1.0	6.0	−42°
1.25	10.0	−90°
1.5	6.0	−155°
2.0	−4.0	−194°
3.0	−15.0	−212°

En la figura 17-20, el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $(C/R)(j\omega)$, elaborado utilizando los valores de la tabla, se representa mediante una línea de guiones. Las diferencias entre

las dos curvas se deben a las interpolaciones necesarias para obtener los valores de magnitud en dB y ángulo de fase.

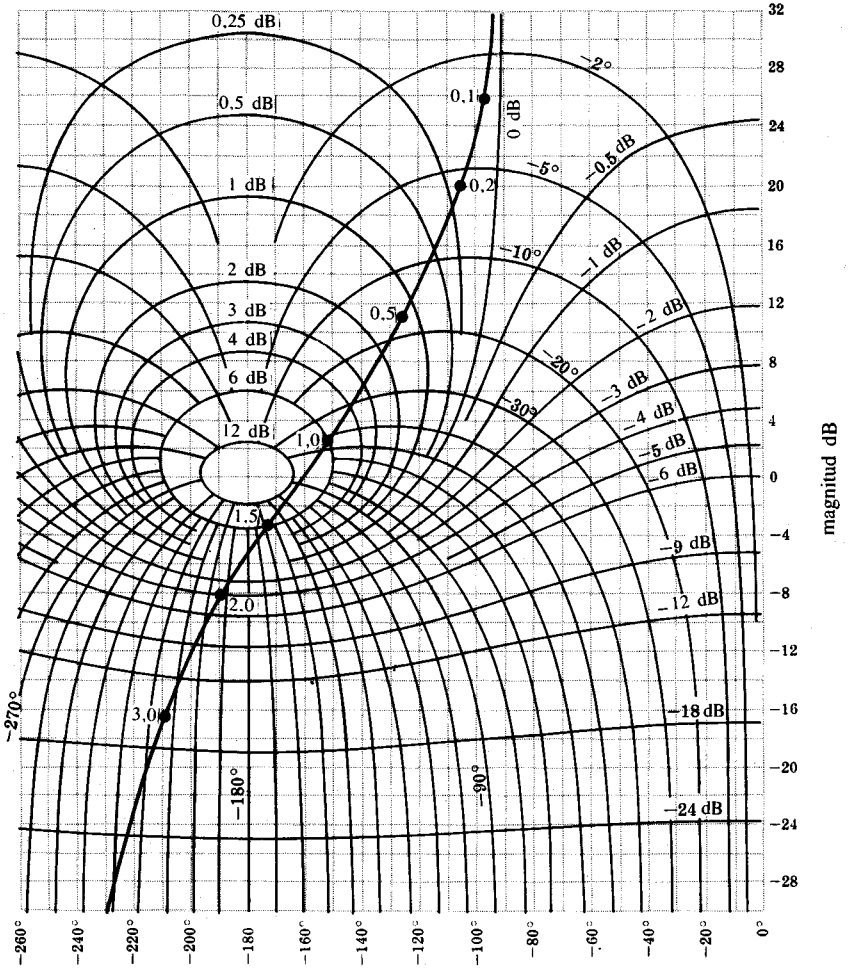


Figura 17-21

Problemas suplementarios

17.16. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{5(s+2)}{s(s+3)(s+5)}$$

17.17. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{10}{s(1 + s/5)(1 + s/50)}$$

17.18. Construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para la función de transferencia en malla abierta

$$GH = \frac{1 + s/2}{s(1 + s)(1 + s/4)(1 + s/20)}$$

17.19. Determine los márgenes de ganancia y de fase en el sistema del problema 17.17.

17.20. Determine el pico de resonancia M_p y la frecuencia resonante ω_p en el sistema cuya función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{1}{s(1 + s)(1 + s/4)}$$

17.21. Determine las frecuencias de cruce de ganancia y de cruce de fase en el sistema del problema 17.17.

17.22. Determine el pico de resonancia M_p y la frecuencia resonante ω_p del sistema del problema 17.17.

17.23. Convierta el sistema del problema 17.17 en uno con retroalimentación unitaria y construya el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $(C/R)(j\omega)$.

Respuestas a algunos problemas suplementarios

17.19. Margen de ganancia = 9.5 dB, $\phi_{MF} = 25°$

17.20. $M_p = 1.3$ dB, $\omega_p = 0.9$ rad/s

17.21. $\omega_1 = 7$ rad/s, $\omega_\pi = 14.5$ rad/s

17.22. $M_p = 8$ dB, $\omega_p = 7.2$ rad/s

Capítulo 18

Diseño utilizando el análisis de los diagramas de Nichols

18.1 Filosofía del diseño

El diseño mediante el análisis en el dominio de la frecuencia utilizando las técnicas de la carta de Nichols se efectúa del mismo modo general que los métodos de diseño descritos en los capítulos anteriores: redes de compensación apropiadas se introducen en las trayectorias directa y/o de retroalimentación, y el comportamiento del sistema resultante se analiza críticamente. De esta manera, el diagrama de Nichols se construye y se reconstruye hasta que se cumplan las especificaciones de desempeño. Estas se expresan de modo más conveniente como indicadores de desempeño en el dominio de la frecuencia, tales como margen de ganancia y margen de fase para el desempeño transitorio, y las constantes de error (Capítulo 9) para la respuesta en estado estacionario en el dominio del tiempo.

El diagrama de Nichols es una gráfica de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta $GH(\omega)$, para un sistema continuo en el tiempo o discreto en el tiempo, y la compensación puede introducirse en las trayectorias directa y/o de retroalimentación, modificando así $G(\omega)$, $H(\omega)$, o ambas. Debemos hacer énfasis en que ningún sistema de compensación simple es aplicable universalmente.

18.2 Compensación del factor de ganancia

Hemos visto en algunos de los capítulos anteriores (5, 12, 13, 16) que algunas veces un sistema inestable con retroalimentación puede estabilizarse, o un sistema estable puede desestabilizarse mediante ajuste del factor de ganancia K de GH. Los diagramas de Nichols se adecúan de manera particular para determinar los ajustes del factor de ganancia. Sin embargo, cuando se utilizan las técnicas de Nichols para sistemas continuos en el tiempo, es más conveniente utilizar la ganancia de Bode K_B (sección 15.3), expresada en decibeles (dB) en lugar del factor de ganancia K. Los cambios en K_B y en K, cuando se dan en decibeles, son iguales.

EJEMPLO 18.1. En la figura 18-1 se muestra el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para un sistema inestable continuo en el tiempo, representado por $GH(j\omega)$ con una ganancia de Bode $K_B = 5$. La inestabilidad de este sistema puede verificarse mediante un bosquejo del diagrama de Nyquist o mediante la aplicación del criterio de Routh. El diagrama de Nyquist del ejemplo 12.1 ilustra la forma general de todos los diagramas de Nyquist de sistemas con un polo en el origen y dos polos reales en la mitad izquierda del plano. Esta gráfica indica que los márgenes de ganancia y de fase positivos garantizan la estabilidad, y los márgenes de ganancia y de fase negativos garantizan la inestabilidad de tal sistema, lo cual implica que una disminución suficiente en la ganancia de Bode estabiliza el sistema. Si la ganancia de Bode disminuye de 20 $\log_{10}5$ dB a 20 $\log_{10}2$ dB, el sistema se estabiliza. En la figura 18-2 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para el sistema compensado. Una disminución adicional en la ganancia no altera la estabilidad.

Nótese que las curvas para $K_B = 5$ y $K_B = 2$ tienen formas idénticas, y la única diferencia es que las ordenadas de la curva para $K_B = 5$ exceden a las de $K_B = 2$ en 20 $\log_{10}(5/2)$ dB. Entonces, el cambio de la ganancia en un diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase se logra simplemente al desplazar hacia arriba o hacia abajo el lugar geométrico de $GH(j\omega)$ en un apropiado número de decibeles.

Aunque a menudo puede alterarse la estabilidad absoluta mediante el ajuste del factor de ganancia, este modo de compensación es inadecuado en la mayor parte de los diseños porque otros criterios tales como los relacionados con la estabilidad relativa usualmente no pueden cumplirse sin la inclusión de otros tipos de compensadores.

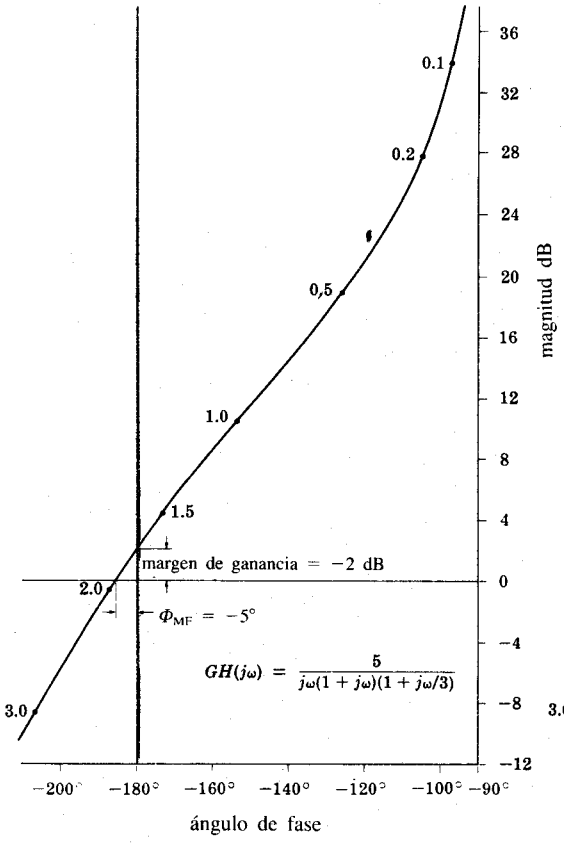


Figura 18-1

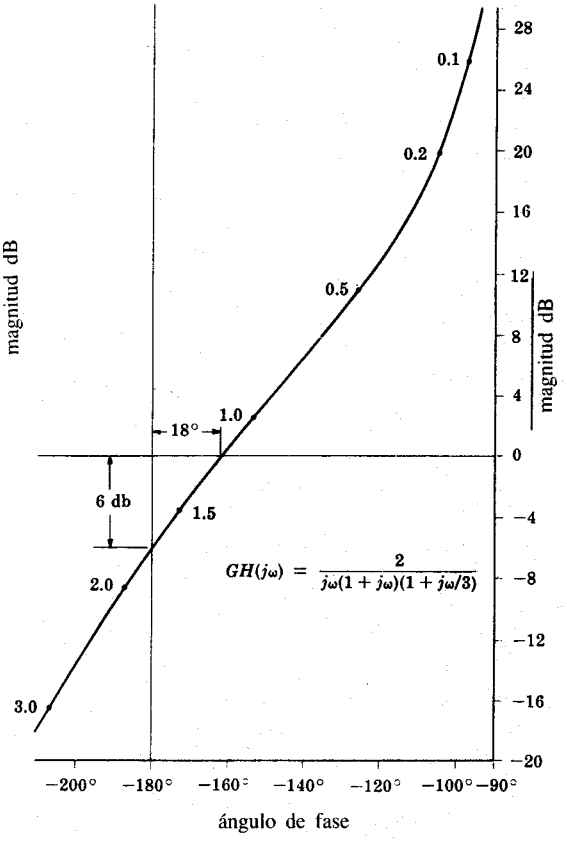


Figura 18-2

18.3 Compensación del factor de ganancia utilizando curvas de amplitud constante

La carta de Nichols puede utilizarse para determinar el factor de ganancia K (en un sistema con *retroalimentación unitaria*) para un pico resonante específico M_p (en decibeles). El siguiente procedimiento requiere dibujar el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase sólo una vez.

Paso 1: Sobre un papel transparente dibuje el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $G(\omega)$ para $K = 1$. La escala de la gráfica debe ser la misma que la de la carta de Nichols.

Paso 2: Superponga este diagrama a la carta de Nichols de tal manera que en cada hoja queden alineadas las escalas de magnitud y ángulo de fase.

Paso 3: Fije la carta de Nichols y deslice el diagrama hacia arriba o hacia abajo hasta que sea tangente a la curva de amplitud constante de M_p dB. La cantidad de desplazamiento en decibeles es el valor requerido de K.

EJEMPLO 18.2. En la figura 18-3 *a*), el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta de un sistema particular con retroalimentación unitaria con $K = 1$ se presenta superpuesta a la carta de Nichols. El M_p deseado es 4 dB. En la figura 18-3*b*) vemos que si la transparencia se desplaza 4 dB hacia arriba, el pico resonante del sistema M_p es 4 dB. Por tanto el K deseado es 4 dB.

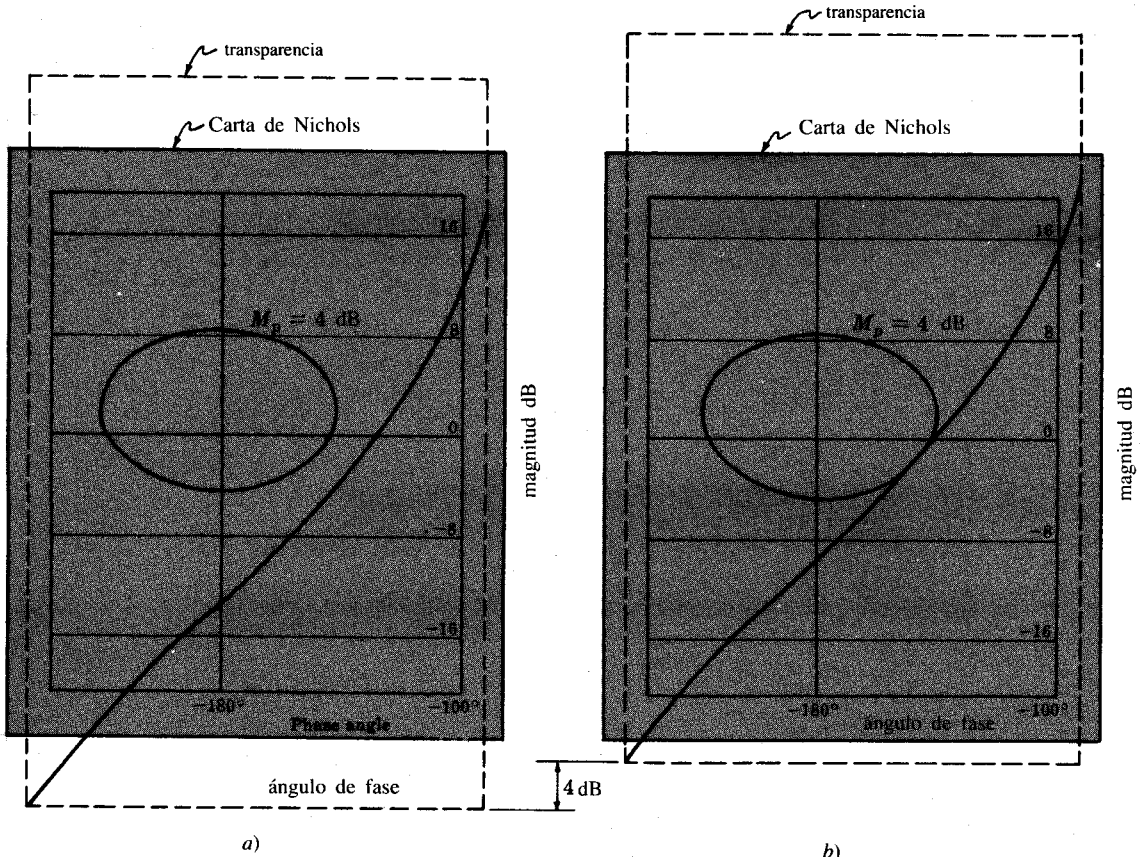


Figura 18-3

18.4 Compensación por adelanto en sistemas continuos en el tiempo

La forma de Bode de la función de transparencia para una red de adelanto es

$$P_{\text{adelanto}} = \frac{(a/b)\left(1 + \dfrac{s}{a}\right)}{1 + \dfrac{s}{b}} \qquad (18.1)$$

en donde $a/b < 1$. En la figura 18-4, los diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase de P_{adelanto} se presentan para diferentes valores de b/a y con la frecuencia normalizada ω/a como parámetro.

En algunos sistemas en los cuales es aplicable la compensación por adelanto, en malla directa, la elección adecuada de a y b permite un incremento en K_B, lo cual proporciona mayor exactitud y menor sensitividad, sin afectar de manera adversa el desempeño transitorio. A la inversa, para una K_B determinada, el desempeño transitorio puede mejorarse mediante la compensación por adelanto también es posible mejorar las respuestas transitoria y en estado estacionario.

Las propiedades importantes de una red compensadora por adelanto son su contribución al adelanto de fase en el intervalo de frecuencia bajo a medio (la vecindad de la frecuencia resonante ω_p) y su atenuación insignificante a altas frecuencias. Si se requiere un adelanto de fase muy grande, varias redes de adelanto pueden colocarse en cascada.

La compensación por adelanto generalmente aumenta el ancho de banda de un sistema.

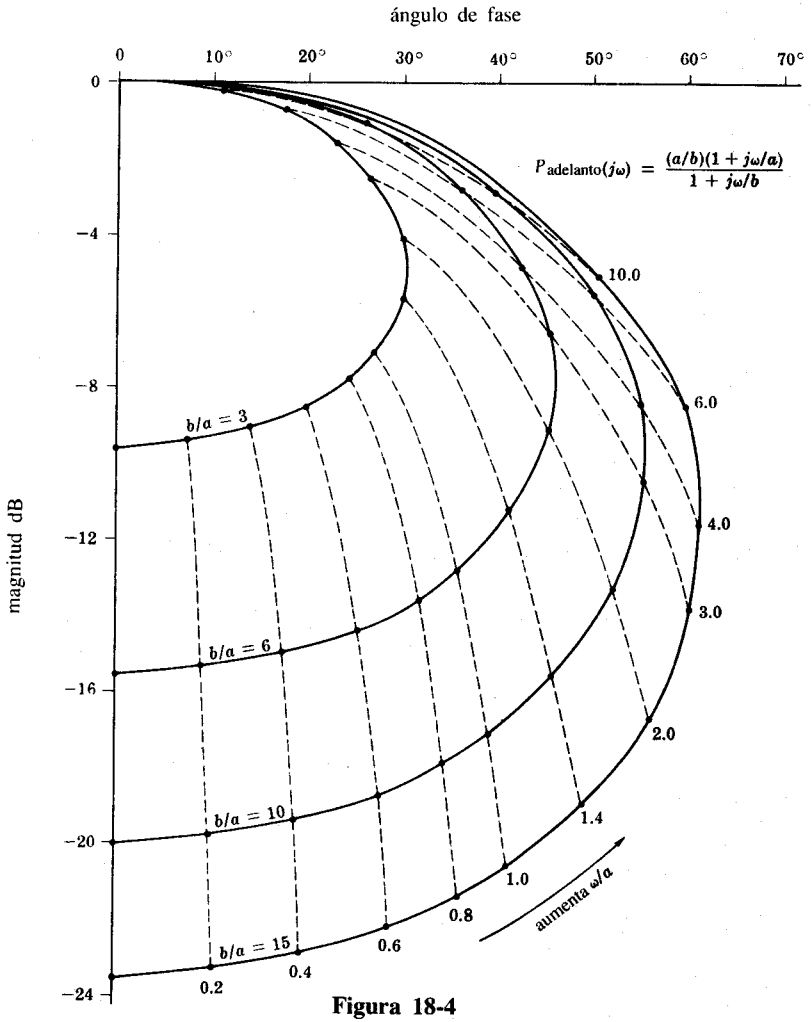


Figura 18-4

EJEMPLO 18.3. El sistema continuo no compensado con retroalimentación unitaria cuya función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{2}{s(1+s)(1+s/3)}$$

debe diseñarse de tal modo que cumpla las siguientes especificaciones de desempeño:

1. Cuando la entrada es una función rampa unitaria, el error de posición en estado estacionario debe ser menor que 0.25.

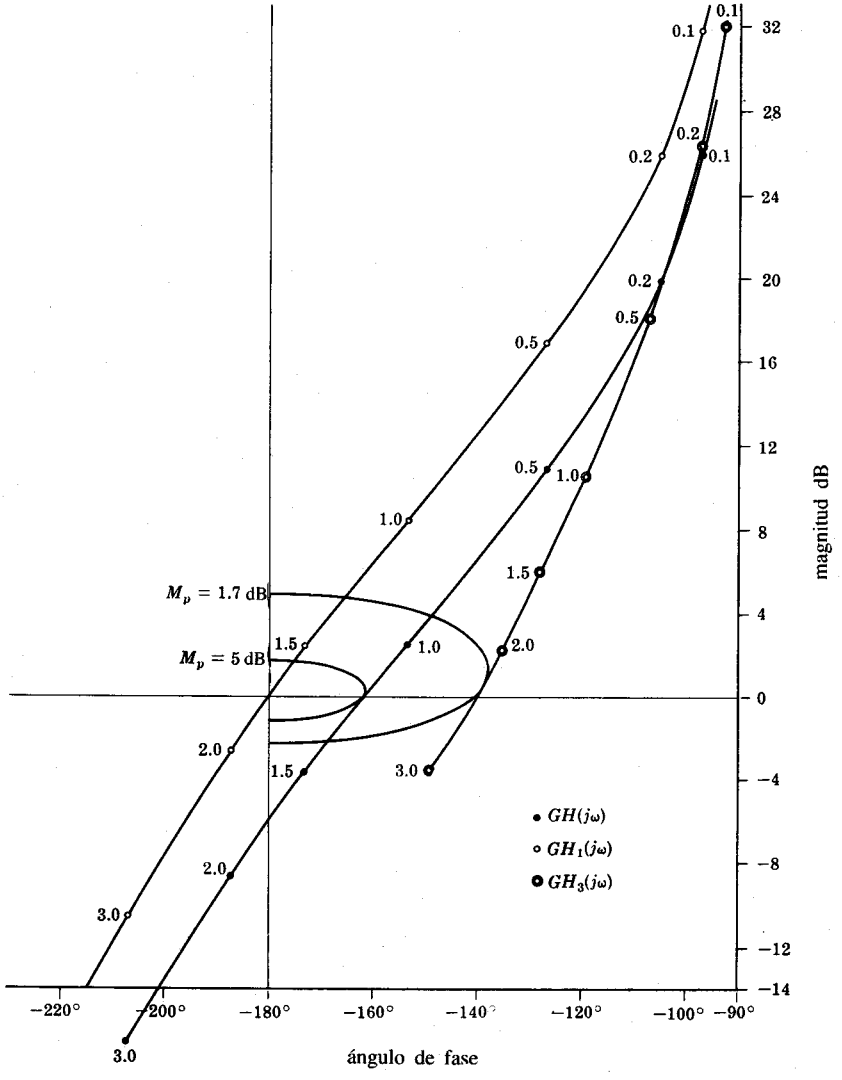


Figura 18-5

2. $\phi_{MF} \cong 40°$.
3. El pico de resonancia $\cong$ 1.7 dB.

Nótese que la ganancia de Bode es igual a la constante de error de velocidad K_v. Por tanto el error en estado estacionario del sistema no compensado es $e(\infty) = 1/K_v = \frac{1}{2}$ [ecuación (*9.13*)]. A partir del diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de GH en la figura 18-5, vemos que $\phi_{MF} = 18°$ y $M_p = 5$ dB.

El error en estado estacionario es demasiado grande para un factor de 2; por tanto la ganancia de Bode debe aumentarse en un factor de 2 (6 dB). Si incrementamos la ganancia de Bode en 6 dB, obtenemos la gráfica GH_1 de la figura 18-5. El margen de fase de GH_1 es cercano a cero, y el pico resonante es cercano a infinito. El sistema está entonces en el borde de la inestabilidad.

La compensación por adelanto de fase puede utilizarse para mejorar la estabilidad relativa del sistema. La función de transferencia en malla abierta del sistema compensado es

$$GH_2 = \frac{K_B(a/b)(1+s/a)}{s(1+s)(1+s/3)(1+s/b)} = \frac{4(1+s/a)}{s(1+s)(1+s/3)(1+s/b)}$$

en donde $K_B = 4(b/a)$ satisface el error en estado estacionario.

Un modo de satisfacer los requerimientos de ϕ_{MF} y M_p es sumar entre 40° y 50° de adelanto de fase a la curva GH_1 en la región $1 \leq \omega \leq 2.5$ sin cambios sustanciales de la magnitud en dB. Ya hemos escogido $K_B = 4(b/a)$ para compensar por a/b en la red de adelanto. Por tanto necesitamos ocuparnos únicamente del efecto que el factor $(1 + s/a)/(1 + s/b)$ tiene sobre la curva GH_1. Con referencia a la figura 18-4, vemos que para proporcionar el adelanto de fase necesario se requiere que $b/a \geq 10$. Hacemos notar que las curvas de la figura 18-4 incluyen el efecto de a/b de la red de adelanto. Puesto que ya se ha hecho la compensación por ésta, se necesita agregar $20 \log_{10} (b/a)$ a las magnitudes en dB sobre la curva. Para mantener pequeña la contribución a la magnitud en dB de la red de adelanto en la región $1 \leq \omega \leq 2.5$ hacemos $b/a = 15$ y escogemos a de tal modo que sólo la parte inferior de la curva ($\omega/a \leq 3.0$) contribuya en la región de interés $1 \leq \omega \leq 2.5$. En particular, hacemos $a = 1.333$. Entonces la función de transferencia en malla abierta compensada es

$$GH_3 = \frac{4(1+s/1.333)}{s(1+s)(1+s/3)(1+s/20)}$$

En la figura 18-5 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de GH_3. Vemos que $\phi_{MF} = 40.5°$ y $M_p = 1.7$ dB. De esta manera se cumplen todas las especificaciones. Sin embargo, hacemos notar que la frecuencia resonante ω_p del sistema compensado es cerca de 2.25 rad/s. En el sistema no compensado definido por GH ésta es cerca de 1.2 rad/s. De este modo el ancho de banda se ha incrementado.

La figura 18-6 presenta un diagrama de bloques del sistema totalmente compensado.

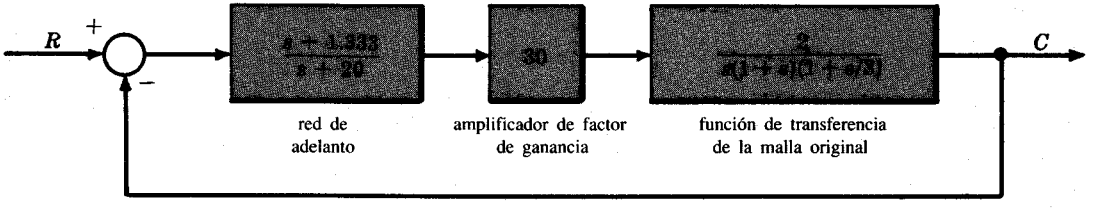


Figura 18-6

18.5 Compensación por atraso en sistemas continuos en el tiempo

La forma de Bode para la función de transferencia de una red por atraso es

$$P_{\text{atraso}} = \frac{1 + s/b}{1 + s/a} \tag{18.2}$$

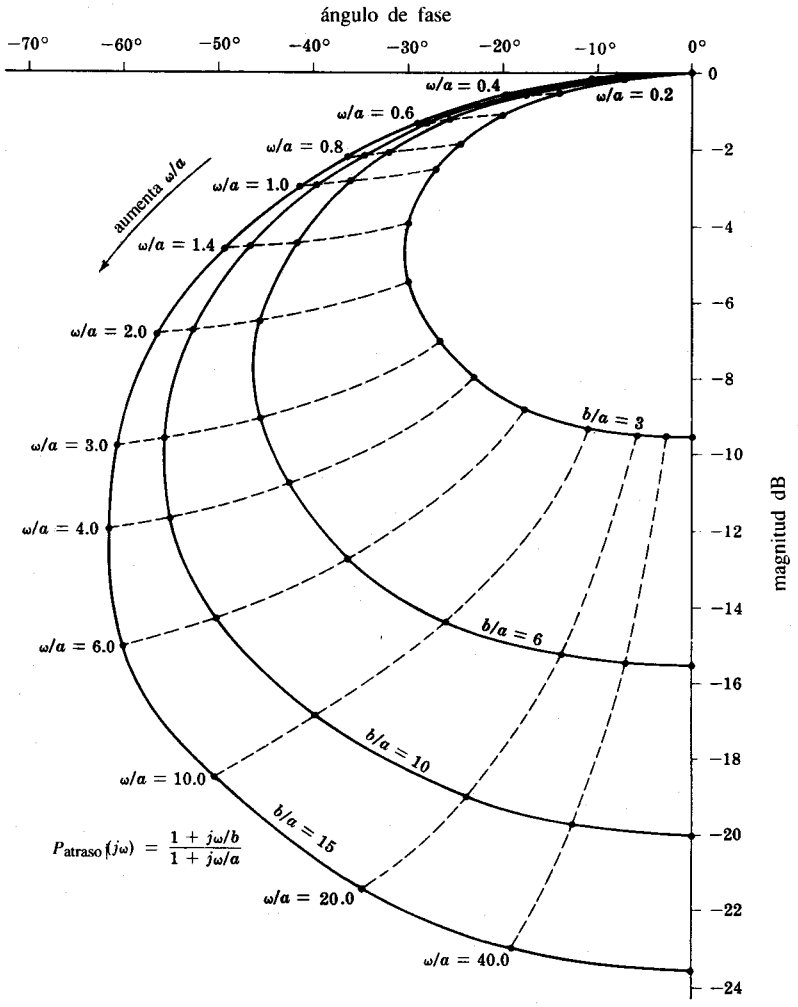


Figura 18-7

en donde $a < b$. En la figura 18-7, los diagramas de magnitud en dB-ángulo de fase de P_{atraso} se presentan para diferentes valores de b/a y con la frecuencia normalizada ω/a como parámetro.

La red por atraso produce la compensación al atenuar la parte de alta frecuencia del diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase. Una atenuación mayor se produce al colocar en cascada varias redes de atraso.

Algunos de los efectos generales de la compensación por atraso son:

1. El ancho de banda del sistema usualmente disminuye.
2. La constante de tiempo dominante τ del sistema usualmente aumenta produciendo un sistema más lento.
3. Para una estabilidad relativa dada, el valor de la constante de error se aumenta.
4. Para una constante de error dada, la estabilidad relativa se mejora.

El procedimiento para usar la compensación por atraso es esencialmente el mismo que aquel para la compensación por adelanto.

EJEMPLO 18.4. Rediseñemos el sistema del ejemplo 18.3 utilizando un factor de ganancia más una compensación por atraso. GH_1 satisface de nuevo la especificación en estado estacionario. En la figura 18-8 se repite el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de GH_1. Puesto que $P_{\text{atraso}}(j0) = 1$, la introducción

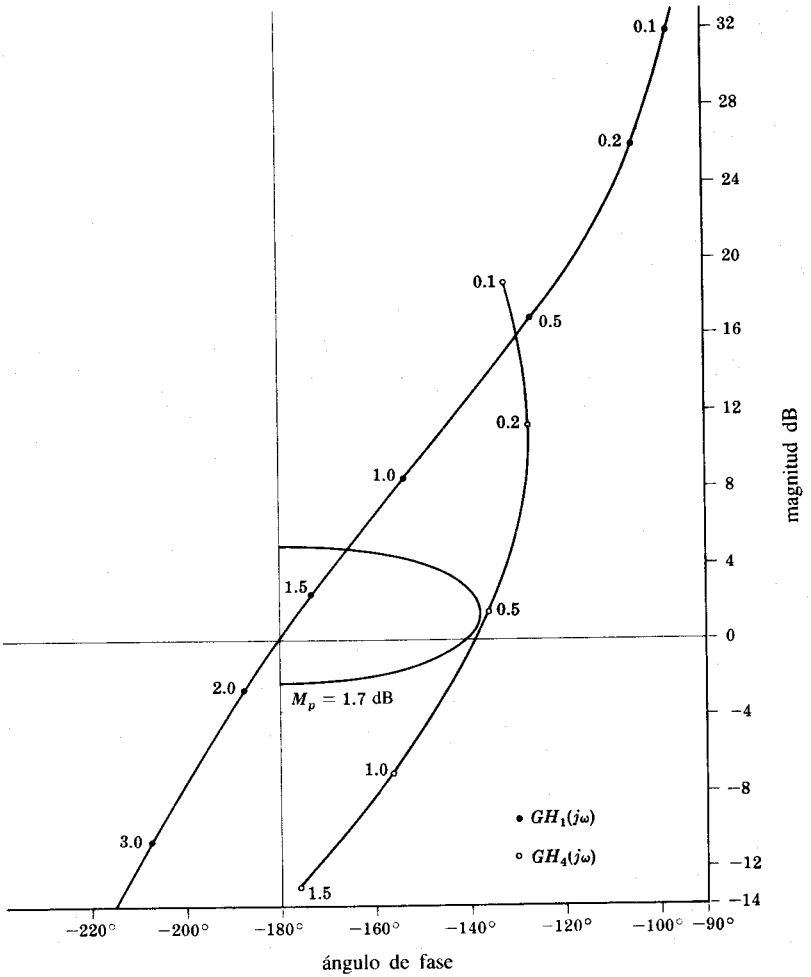


Figura 18-8

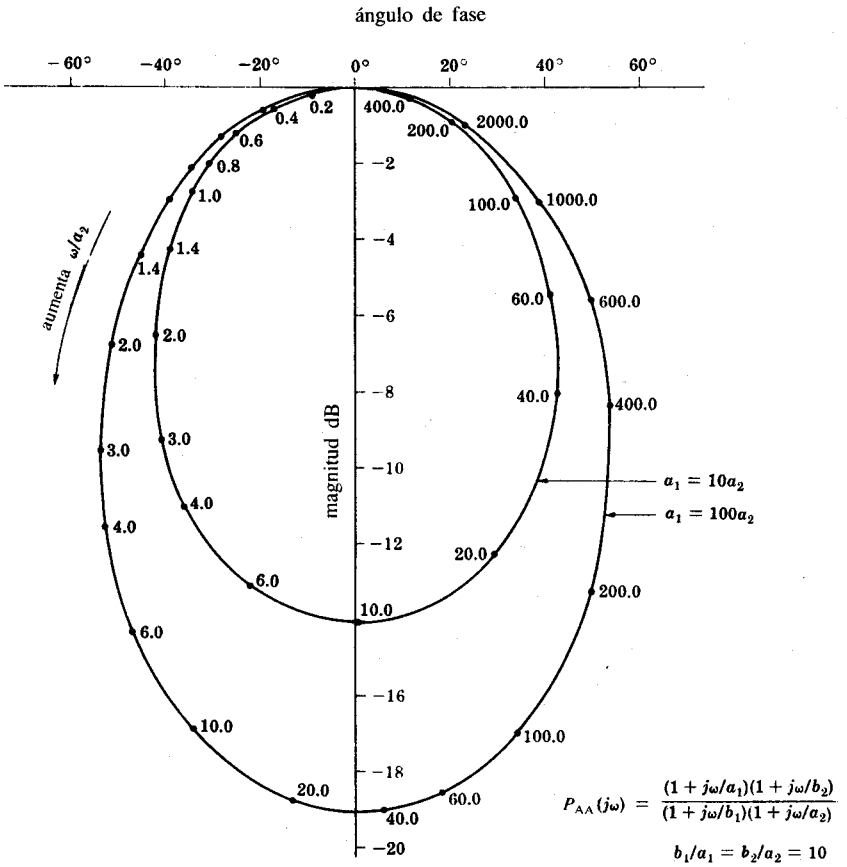


Figura 18-10 *c)*

Al combinar los diagramas de las redes de atraso (figura 18-7) y de las redes de adelanto (figura 18-4) pueden obtenerse gráficas adicionales de P_{AA} para otros valores de b_1/a_1 y a_1/a_2.

La compensación por atraso-adelanto tiene todas las ventajas de la compensación por atraso y de la compensación por adelanto y un mínimo de sus características usualmente inconvenientes. Por ejemplo, las especificaciones del sistema pueden satisfacerse sin el ancho de banda excesivo o sin la demora en el tiempo de respuesta causados por el adelanto o el atraso de fase, respectivamente.

EJEMPLO 18.5. Rediseñemos el sistema del ejemplo 18.3 utilizando un factor de ganancia más una compensación por atraso-adelanto. Agregamos la especificación adicional de la frecuencia resonante ω_p del sistema compensado que debe ser aproximadamente la misma que la del sistema no compensado. La especificación en estado estacionario nuevamente se satisface con

$$GH_1 = \frac{4}{s(1+s)(1+s/3)}$$

como se demostró en el ejemplo 18.3. Puesto que $P_{AA}(j0) = 1$, la introducción de la red de atraso-adelanto no requiere un incremento adicional del factor de ganancia.

Al insertar la red de atraso-adelanto obtenemos la función de transferencia en malla abierta

$$GH_5 = \frac{4(1 + s/a_1)(1 + s/b_2)}{s(1 + s)(1 + s/3)(1 + s/b_1)(1 + s/a_2)}$$

A partir de la figura 18-5, vemos que en el sistema no compensado GH, $\omega_p = 1.2$ rad/s. A partir del diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de GH_1 (figura 18-11) vemos que si $GH_1(j1.2)$ se atenúa en 6.5 dB y tiene una fase incrementada en 20°, la frecuencia resonante $\omega_p = 1.2$ se desplaza a $M_p = 1.7$ dB. Con referencia a la figura 18-10 *a*), vemos que la atenuación y el adelanto de fase deseados se obtienen con $b_1/a_1 = b_2/a_2 = 3$, $a_1/a_2 = 10$ y $\omega/a_2 = 12$.

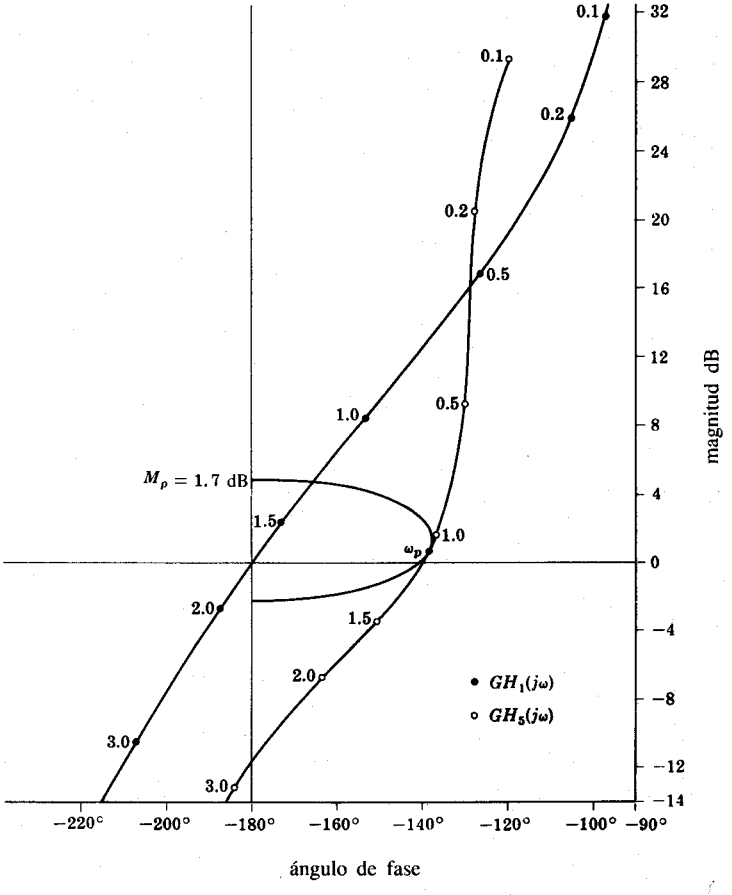


Figura 18-11

Las constantes a_1, a_2, b_1 y b_2 se determinan teniendo en cuenta que

$$a_2 = \frac{\omega_p}{12} = \frac{1.2}{12} = 0.1 \qquad a_1 = 10a_2 = 1 \qquad b_2 = 3a_2 = 0.3 \qquad \text{y} \qquad b_1 = 3a_1 = 3$$

GH_5 se hace

$$GH_5 = \frac{4(1+s)(1+s/0.3)}{s(1+s)(1+s/3)(1+s/3)(1+s/0.1)} = \frac{4(1+s/0.3)}{s(1+s/3)^2(1+s/0.1)}$$

En la figura 18-11 se presenta el diagrama completo de magnitud en dB-ángulo de fase de GH_5. Vemos que $\phi_{MF} = 40.5°$, $M_p = 1.7$ dB y la frecuencia resonante $\omega p \cong 1.15$. De este modo se han satisfecho todas las especificaciones.

18.7 Diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando las cartas de Nichols

Al igual que con los métodos de Bode (sección 16-6), el diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando las cartas de Nichols no es tan directo como el diseño de sistemas continuos en el tiempo utilizando cualquiera de estos métodos. Pero, de nuevo, la transformada w puede facilitar el proceso como lo hizo para el diseño utilizando el análisis de Bode de sistemas discretos en el tiempo. El método es el mismo desarrollado en la sección 16.6.

EJEMPLO 18.6. El sistema discreto no compensado con retroalimentación unitaria y función de transferencia de planta

$$G_2(z) = \frac{9}{4}\frac{(z+1)^3}{z\left(z+\frac{1}{2}\right)^2}$$

debe diseñarse de tal modo que produzca un margen de fase global de 40° y la misma frecuencia de cruce de ganancia ω_1 que el sistema no compensado. Puesto que ambas especificaciones se encuentran en el dominio de la frecuencia, transformamos el problema directamente al dominio de w sustituyendo $z = (1 + w)/(1 - w)$, formando así

$$G_2'(w) = \frac{72}{(w+1)(w+3)^2}$$

En la figura 18-12 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de este sistema. La frecuencia de cruce de ganancia obtenida de esta gráfica es $\omega_{w1} = 3.4$ rad/s y el margen de fase de 10°. Un compensador por adelanto con algunos a y b arbitrarios puede escogerse para que el adelanto de fase en $\omega_{w1} = 3.4$ rad/s sea suficiente para elevar el margen de fase de 10° a 40°. La relación b/a mínima que produce un adelanto de fase de 30° es cerca de 3.3, a partir de la figura 18-4. Escogemos a y b tales que el máximo adelanto de fase se presente en $\omega_{w1} = 3.4$ rad/s. De la sección 16.3 obtenemos que esto ocurre cuando $\omega_{w1} = 3.4 = \sqrt{ab}$. Puesto que $b = 3.3a$, encontramos $b = 6.27$ y $a = 1.90$. Este compensador produce cerca de $20 \log_{10} \sqrt{(6.27/1.90)} = 5$ dB de atenuación en $\omega_{w1} = 3.4$ rad/s. De este modo se requiere un amplificador con una ganancia de 5.2 dB o un factor de ganancia de 1.82, además del compensador por adelanto, para mantener ω_{w1} en 3.4 rad/s. Entonces, la función de transferencia en el dominio w para el compensador es

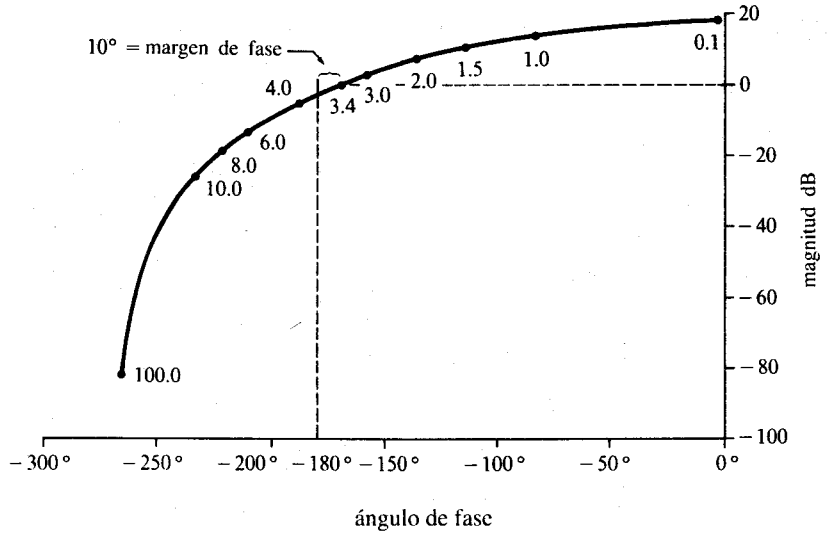


Figura 18-12

$$G_1(w) = \frac{1.82(w + 1.90)}{w + 6.27}$$

Esta se transforma de nuevo al dominio z haciendo $w = (z - 1)/(z + 1)$, formándose

$$G_1(z) = \frac{0.7229(z + 0.3007)}{z + 0.7222}$$

En la figura 18-13 se presenta el sistema de control compensado.

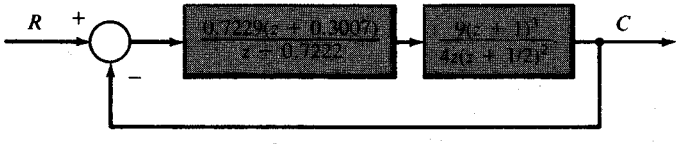


Figura 18-13

Problemas resueltos

Compensación de factor de ganancia

18.1. En la figura 18-14 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de la función de respuesta de frecuencia continua en malla abierta

$$GH(j\omega) = \frac{K_B\left[1 - (\omega/2)^2 + j\omega/2\right]}{j\omega(1 + j\omega/0.5)^2(1 + j\omega/4)}$$

para $K_B = 1$. El sistema en malla cerrada definido por $GH(j\omega)$ es estable para $K_B = 1$. Determine un valor de K_B en el cual el margen de fase sea 45°.

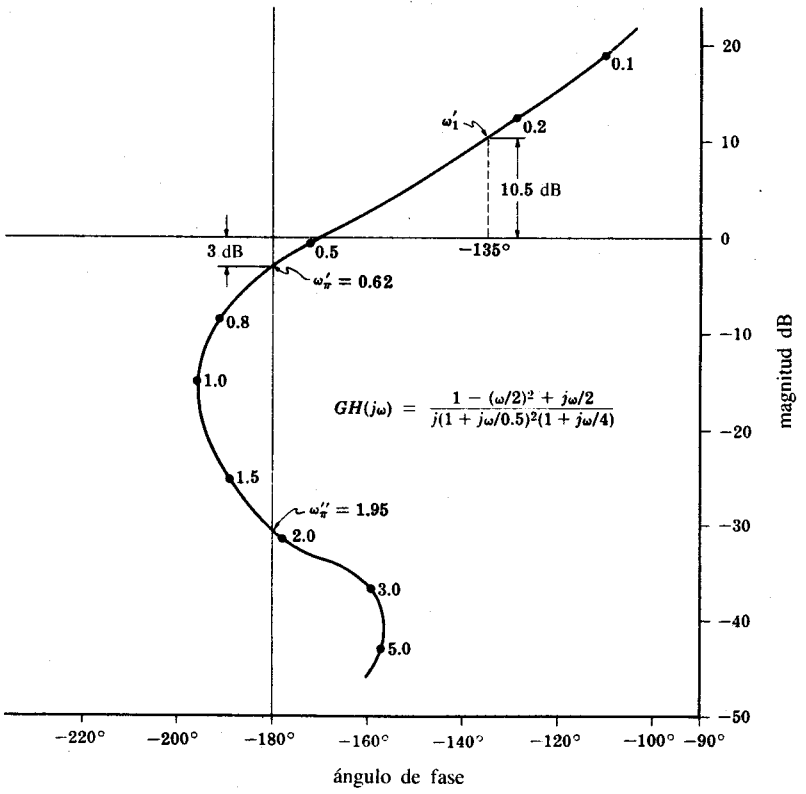


Figura 18-14

$\phi_{MF} = 180° + \arg GH(j\omega_1)$, en donde ω_1 es la frecuencia de cruce de ganancia. Para $\phi_{MF} = 45°$, debe escogerse ω_1 de tal manera que el $\arg GH(j\omega_1) = -135°$. Si dibujamos una línea vertical con abscisa de $-135°$, ésta corta la curva $GH(j\omega)$ en el punto $\omega_1' \cong 0.25$ rad/s en donde el $\arg GH(j\omega_1') = -135°$. La ordenada en este punto de intersección es 10.5 dB. Si disminuimos K_B en 10.5 dB, la frecuencia de cruce de ganancia se hace ω_1' y $\phi_{MF} = 45°$. Una disminución de 10.5 dB implica que $20 \log_{10} K_B = 10.5$ o $K_B = 10^{-10.5/20} = 0.3$. Una disminución adicional en K_B aumenta ϕ_{MF} más allá de 45°.

18.2. En el sistema del problema 18.1, determine el valor de K_B para el cual el sistema es estable y el margen de ganancia es 10 dB.

Margen de ganancia $= -20 \log_{10} |GH(j\omega_\pi)|$ dB, en donde ω_π es la frecuencia de cruce de fase. Con referencia a la figura 18-4, vemos que hay dos frecuencias de cruce de fase: $\omega_\pi' \cong 0.62$ rad/s y $\omega_\pi'' \cong 1.95$ rad/s. Para $\omega_\pi' = 0.62$, tenemos $20 \log_{10} |GH(j\omega_\pi')| = -3$ dB. Por tanto el margen de ganancia es 3 dB. Este puede aumentarse hasta 10 dB al desplazar la curva $GH(j\omega)$ 7 dB hacia abajo. La frecuencia de cruce de fase ω_π' es la misma en la nueva posición, pero $20 \log_{10}$

$|GH(j\omega_\pi')| = -10$ dB. Una disminución adicional de 7 dB implica que $K_B = 10^{-7/20} = 0.447$. Puesto que el sistema es estable para $K_B = 1$, permanece estable cuando la curva $GH(j\omega)$ se desplaza hacia abajo. La estabilidad absoluta no se afecta a no ser que la curva $GH(j\omega)$ se desplace hacia arriba y atraviese el punto definido por 0 dB y $-180°$, como sería necesario si $-20 \log_{10} GH(j\omega_\pi'') = 10$ db.

18.3. En el sistema del problema 18.1, determine un valor de K_B tal que: el margen de ganancia ≥ 10 dB, $\phi_{MF} \geq 45°$.

En el problema 18.1 se demostró que $\phi_{MF} \geq 45°$ si $K_B \leq 0.3$; en el problema 18.2, el margen de ganancia ≥ 10 dB si $K_B \leq 0.447$. Por tanto ambos requerimientos pueden satisfacerse al hacer $K_B \leq 0.3$. Nótese que si se hubiera especificado un margen de ganancia $= 10$ dB y $\phi_{MF} = 45°$, las especificaciones no se habían podido cumplir con la sola compensación del factor de ganancia.

18.4. Suponga que el sistema del problema 18.1 es con retroalimentación unitaria, y determine el valor de K_B tal que el pico resonante M_p sea dB.

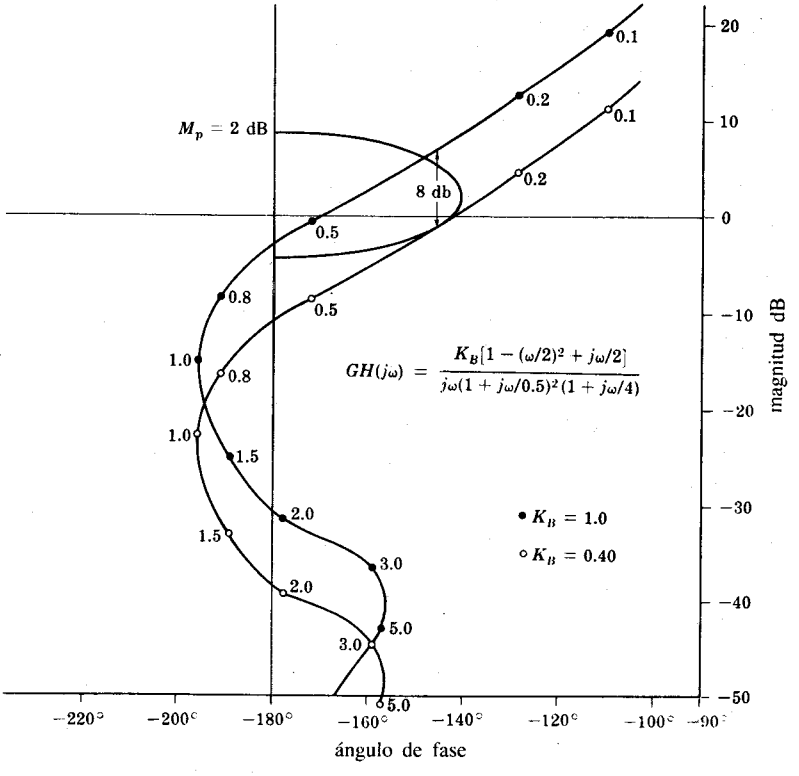


Figura 18-15

En la figura 18-15 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $GH(j\omega)$ para $K_B = 1$, junto con el lugar geométrico de los puntos para los cuales $|(C/R)(j\omega)| = 2$ dB ($M_p = 2$ dB). Vemos que si K_B dismimuye en 8 dB, la curva resultante $GH(j\omega)$ apenas es tangente a la curva $M_p = 2$ dB. Una disminución de 8 dB implica que $K_B = 10^{-8/20} = 0.40$.

18.5. En la figura 18-16 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta

$$GH(j\omega) = \frac{K_B(1 + j\omega/0.5)}{(j\omega)^2[1 - (\omega/2)^2 + j\omega/2]}$$

para $K_B = 0.5$. El sistema en malla cerrada definido por $GH(j\omega)$ es estable para $K_B = 0.5$. Determine el valor de K_B que hace máximo el margen de fase.

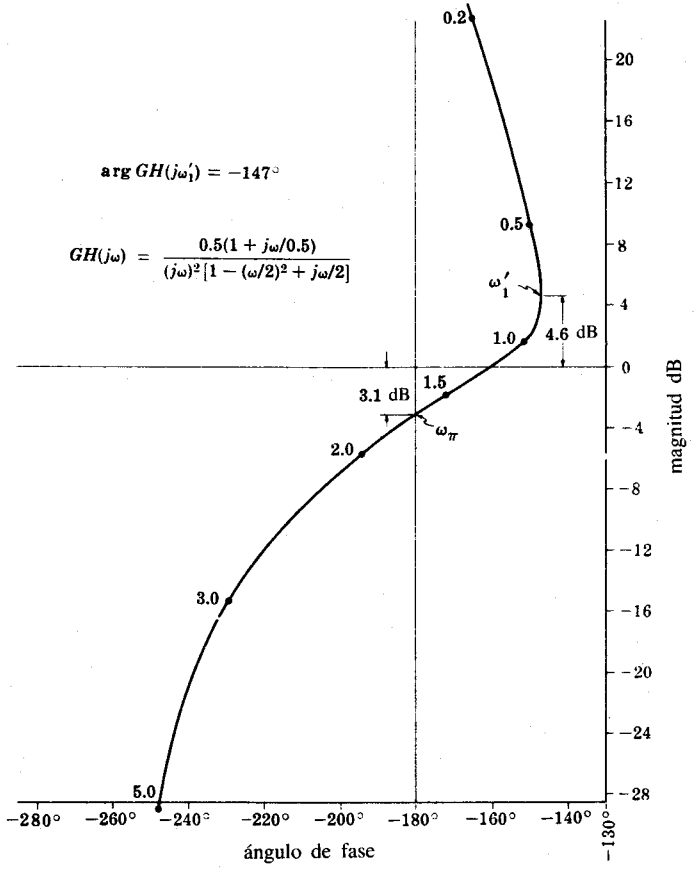


Figura 18-16

$\phi_{MF} = 180° + \arg GH(j\omega_1)$, en donde ω_1 es la frecuencia de cruce de ganancia. Con referencia a la figura 18-16, vemos que el arg $GH(j\omega)$ siempre es negativo. Por tanto, si se halla el máximo para el arg $GH(j\omega_1)$, también será el máximo de ϕ_{MF}. La figura 18-16 indica que el arg $GH(j\omega)$ se hace máximo cuando $\omega = \omega_1' \cong 0.8$ rad/s y el arg $GH(j\omega_1') = -147°$. La ordenada del punto $GH(j\omega_1')$ es 4.6 dB. Por tanto, si K_B disminuye en 4.6 dB, la frecuencia de cruce de fase es ω_1'; y ϕ_{MF} toma su máximo valor: $\phi_{MF} = 180° + \arg GH(j\omega_1') = 33°$. Una disminución de 4.6 dB en K_B implica que $20 \log_{10} (K_B/0.5) = -4.6$ dB o $K_B/0.5 = 10^{-4.6/20}$ Entonces $K_B = 0.295$.

18.6. En el sistema del problema 18.5, determine un valor de K_B para el cual el sistema sea estable y el margen de ganancia sea 8 dB.

Margen de ganancia $= -20 \log_{10} |GH(j\omega_\pi)|$ dB. Con referencia en la figura 18-16, vemos que el margen de ganancia es 3.1 dB. Este puede incrementarse a 8 dB al desplazar la curva 4.9 dB hacia abajo; ω_π permanece igual ya que es independiente de K_B. Una disminución de 4.9 dB en K_B implica que $20 \log_{10} (K_B/0.5) = -4.9$ ó $K_B = 0.254$.

Compensación de fase

18.7. En la figura 18-17 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase, determinado experimentalmente, de la función de transferencia en malla abierta $G(j\omega)$ de un sistema particular con retroalimentación unitaria. Además, se midió el error en estado estacionario $e(\infty)$ para una entrada rampa unitaria, encontrándose $e(\infty) = 0.2$. Se sabe que la función de transferencia en malla abierta tiene un polo en el origen. Determine una combinación de adelanto de fase más compensación de ganancia tal que: $M_p \cong 1.5$ dB, $\phi_{MF} \cong 40°$ y el error en estado estacionario para una entrada rampa unitaria sea $e(\infty) = 0.1$.

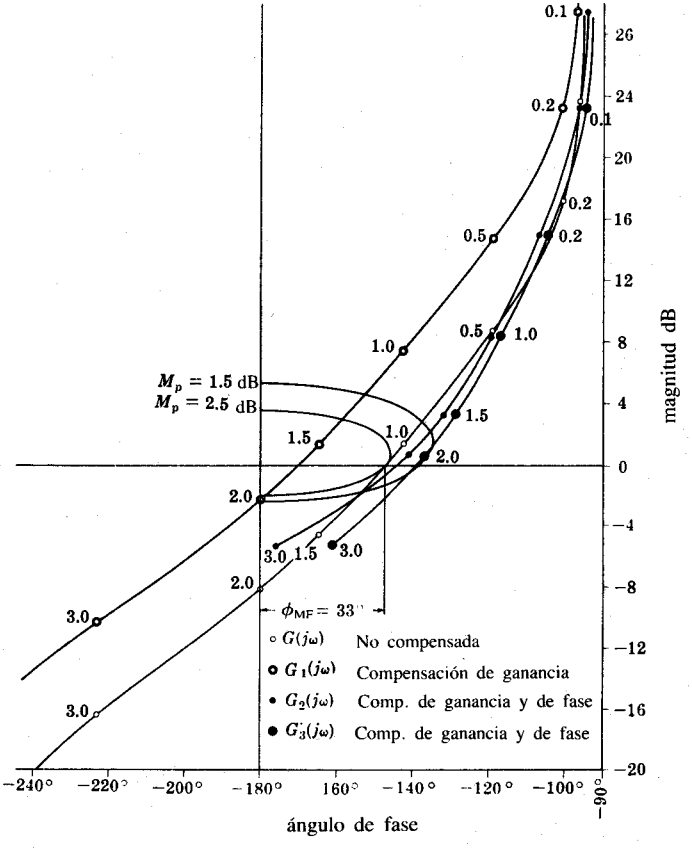


Figura 18-17

Puesto que $e(\infty) = 1/K_v = 1/K_B$, el requerimiento en estado estacionario puede satisfacerse al duplicar K_B. La compensación tiene la forma

$$K'P_{\text{adelanto}}(j\omega) = \frac{K'(a/b)(1 + s/a)}{1 + s/b}$$

En consecuencia K_B se duplica al hacer $K'(a/b) = 2$ ó $K' = 2(b/a)$.

En la figura 18-17 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta, compensada en ganancia

$$G_1(j\omega) = 2G(j\omega)$$

$G_1(j\omega)$ satisface la especificación en estado estacionario. Para satisfacer las especificaciones sobre M_p y ϕ_{MF}, la curva $G_1(j\omega)$ debe desplazarse de 30° a 40° a la derecha en la región $1.2 \leq \omega \leq 2.5$ sin cambios sustanciales de la magnitud en dB. Esto se hace mediante la elección apropiada de a y b. Con referencia a la figura 18-4, vemos que se obtiene un adelanto de fase de 30° para $\omega/a \geq 0.65$ con $b/a = 10$. Puesto que la relación de adelanto a/b de la red de adelanto se tiene en cuenta al diseñar para un factor de ganancia $K' = 2(b/a) = 20$, debemos sumar $20 \log_{10}(b/a) = 20 \log_{10}10 = 20$ dB para todas las magnitudes en dB tomadas de la figura 18-4.

Para obtener 30° o más de adelanto de fase en el intervalo de frecuencia de interés, hacemos $a = 2$. Para esta elección tenemos $\omega = (2)(0.65) = 1.3$ y se obtienen 30° de adelanto de fase. Puesto que $b/a = 10$, entonces $b = 20$. La función de respuesta de frecuencia en malla abierta compensada es

$$G_2(j\omega) = \frac{2(1 + j\omega/2)}{1 + j\omega/20} G(j\omega)$$

En la figura 18-17 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $G_2(j\omega)$. Vemos que $M_p \cong 2.0$ dB y $\phi_{\text{MF}} = 36°$; por tanto las especificaciones no se satisfacen con esta compensación. Necesitamos desplazar $G_2(j\omega)$ entre 5° y 10° más hacia la derecha; luego se necesita un adelanto de fase adicional. Una vez más con referencia a la figura 18-4, vemos que al hacer $b/a = 15$ se incrementa el adelanto de fase. De nuevo, hacemos $a = 2$; entonces $b = 30$. En la figura 18-17 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de

$$G_3(j\omega) = \frac{2(1 + j\omega/2)}{1 + j\omega/30} G(j\omega)$$

Vemos que $\phi_{\text{MF}} = 41°$ y $M_p \cong 1.5$ dB y por tanto las especificaciones se cumplen con la compensación

$$30\ P_{\text{adelanto}} = \frac{2(1 + s/2)}{1 + s/30}$$

18.8. Resuelva el problema 18.7 utilizando una compensación por *atraso* más ganancia.

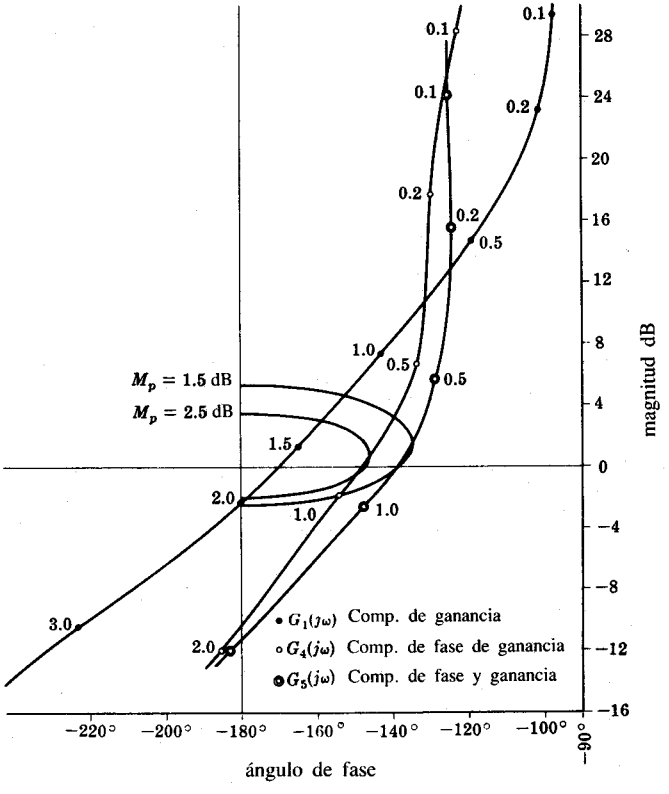


Figura 18-18

En el problema 18.7 encontramos que la ganancia de Bode K_B debió incrementarse en un factor de 2 para satisfacer la especificación en estado estacionario. Pero la ganancia de Bode de una red de atraso es

$$\lim_{s\to 0} P_{\text{adelanto}} = \lim_{s\to 0} \frac{1 + s/b}{1 + s/a} = 1$$

Por tanto, en este problema, la compensación requerida tiene la forma $2(1 + s/a)/(1 + s/b)$ en donde el incremento de dos veces el factor de ganancia lo suministra un amplificador, y a y b deben escogerse para la red de atraso de tal manera que satisfagan los requerimientos de M_p y ϕ_{MF}. En la figura 18-18 se presenta la función compensada en ganancia como $G_1(j\omega) = 2G(j\omega)$; $G_1(j\omega)$ debe desplazarse entre 7 y 10 dB hacia abajo en la región $0.7 \leq \omega \leq 2.0$, sin un incremento sustancial en el retraso de fase, para cumplir con las especificaciones transitorias.

Con referencia a la figura 18-7, vemos que para $b/a = 3$, obtenemos una atenuación máxima de 9.5 dB. Para $a = 0.1$, el atraso de fase es $-15°$ en $\omega = 0.7$ ($\omega/a = 7$) y $-6°$ en $\omega = 2.0$ ($\omega/a = 20$), es decir, el atraso de fase es relativamente pequeño en la región de frecuencia de interés. En la figura 18-18 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para

$$G_4(j\omega) = \frac{2(1 + j\omega/0.3)}{1 + j\omega/0.1} G(j\omega)$$

con $M_p \cong 2.5$ dB y $\phi_{MF} = 32°$; en consecuencia este sistema no cumple con las especificaciones. Para disminuir el atraso de fase presentado en la región de frecuencia $0.7 \leq \omega \leq 2.0$, cambiamos a a 0.05 y b a 0.15. Ahora el atraso de fase es 9° en $\omega = 0.7$ ($\omega/a = 14$). En la figura 18-18 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase para

$$G_5(j\omega) = \frac{2(1 + j\omega/0.15)}{1 + j\omega/0.05} G(j\omega)$$

Vemos que $M_p \cong 1.5$ dB y $\phi_{MF} = 41°$. De este modo se satisfacen las especificaciones. La compensación deseada es

$$2\ P_{\text{Atraso}} = \frac{2(1 + s/0.15)}{1 + s/0.05}$$

18.9. Resuelva el problema 18.7 utilizando una compensación por *atraso-adelanto* más ganancia. Además de las especificaciones anteriores, necesitamos que la frecuencia resonante ω_p del sistema compensado sea aproximadamente la misma que la del sistema no compensado.

En los problemas 18.7 y 18.8 encontramos que la ganancia de Bode K_B debe aumentarse en un factor de 2 para satisfacer la especificación en estado estacionario. La función de respuesta de frecuencia de la compensación por atraso-adelanto más ganancia resulta entonces

$$2\ P_{AA}(j\omega) = \frac{2(1 + j\omega/a_1)(1 + j\omega/b_2)}{(1 + j\omega/b_1)(1 + j\omega/a_2)}$$

Ahora debemos escoger a_1, b_1, b_2 y a_2 para satisfacer los requerimientos sobre M_p, ϕ_{MF} y ω_p. Con referencia a la figura 18-17, vemos que la frecuencia resonante en el sistema no compensado es cercana a 1.1 rad/s. El diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de $G_1(j\omega) = 2G(j\omega)$, que se presenta en la figura 18-19, indica que si la curva $G_1(j\omega)$ se atenúa en 6.5 dB y se agrega un adelanto de fase de 10° a una frecuencia de $\omega = 1.0$ rad/s, entonces la curva resultante será tangente a la curva $M_p = 2$ dB cerca de 1 rad/s. Con referencia a la figura 18-10, si hacemos $b_1/a_1 = b_2/a_2 = 3$, $a_1 = 6a_2$ y $\omega/a_2 = 6.0$ para $\omega = 1$, obtenemos la atenuación y el adelanto de fase deseados. Al resolver los parámetros restantes obtenemos $a_2 = 1/6 = 0.167$, $b_2 = 3a_2 = 0.50$, $a_1 = 6a_2 = 1.0$, $b_1 = 3a_1 = 3.0$. En la figura 18-19 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase de la función de respuesta de frecuencia en malla abierta resultante

$$G_6(j\omega) = \frac{2(1 + j\omega)(1 + j\omega/0.5)}{(1 + j\omega/3)(1 + j\omega/0.167)} G(j\omega)$$

en donde $M_p \cong 1.5$ dB, $\phi_{MF} = 44°$ y $\omega_p \cong 1.0$ rad/s. Estos valores satisfacen aproximadamente las especificaciones.

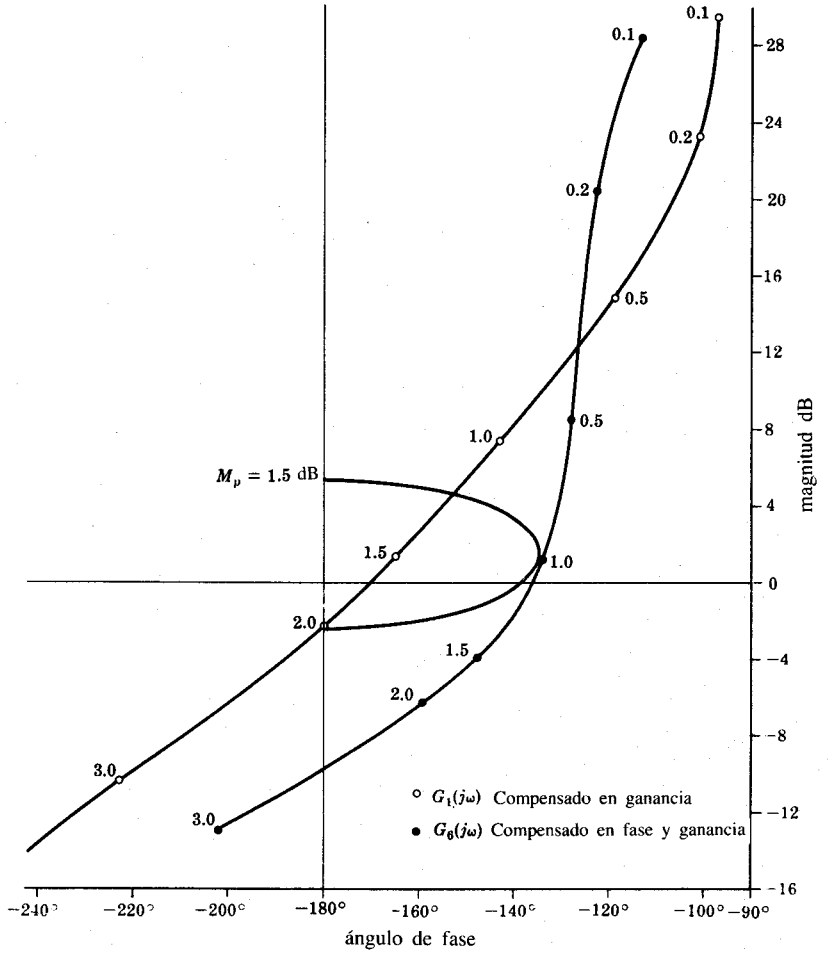


Figura 18-19

18.10. Diseñe la compensación del sistema discreto en el tiempo con función de transferencia en malla abierta

$$GH(z) = \frac{K(z+1)^3}{(z-1)\left(z+\frac{2}{3}\right)^2}$$

tal que se satisfagan las siguientes especificaciones de desempeño:

1. margen de ganancia $\geq$ 6 dB
2. margen de fase $\phi_{MF} \geq 45°$
3. frecuencia de cruce de ganancia ω_1 tal que $\omega_1 T \leq 1.6$ rad
4. constante de velocidad $K_v \geq 10$

El diagrama de Nichols de GH que se presenta en la figura 18-20 indica que $\omega_1 T = 1.6$ rad para $K = -3$ dB. Los márgenes de ganancia y de fase se cumplen si $K < 4.7$ dB; pero la especificación en estado estacionario requiere que $K > 10.8$ dB (factor de ganancia de 3.47). Al sustituir $z = (1 + w)/(1 - w)$, transformamos la función de transferencia en malla abierta del dominio z al dominio w, formando así

$$GH'(w) = \frac{36}{25} \frac{K}{w(1 + w/5)^2}$$

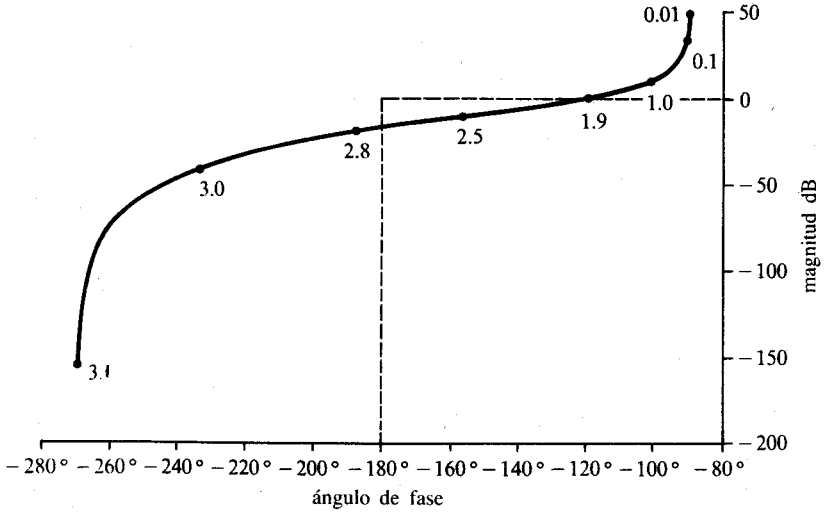


Figura 18-20

En el dominio de w la especificación de frecuencia de cruce de ganancia se hace

$$\omega_{w1} = \tan\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right) = 1.02 \text{ rad/s}$$

Un compensador por atraso de baja frecuencia en cascada con $b/a = 3.5$ puede utilizarse para aumentar K_v a 10, mientras se mantiene la frecuencia de cruce de ganancia ω_1 y los márgenes de ganancia y de fase en sus valores anteriores. Un compensador por atraso con $b = 0.35$ y $a = 0.1$ satisface los requerimientos.

El compensador por atraso en el plano w es

$$G_1(w) = \frac{3.5(1 + w/0.35)}{1 + w/0.1}$$

Este se transforma de nuevo al dominio de z al sustituir $w = (z - 1)/(z + 1)$, formándose

$$G_1(z) = 1.2273\left(\frac{z - 0.4815}{z - 0.8182}\right)$$

En la figura 18-21 se presenta el diagrama de magnitud en dB-ángulo de fase del sistema discreto compensado.

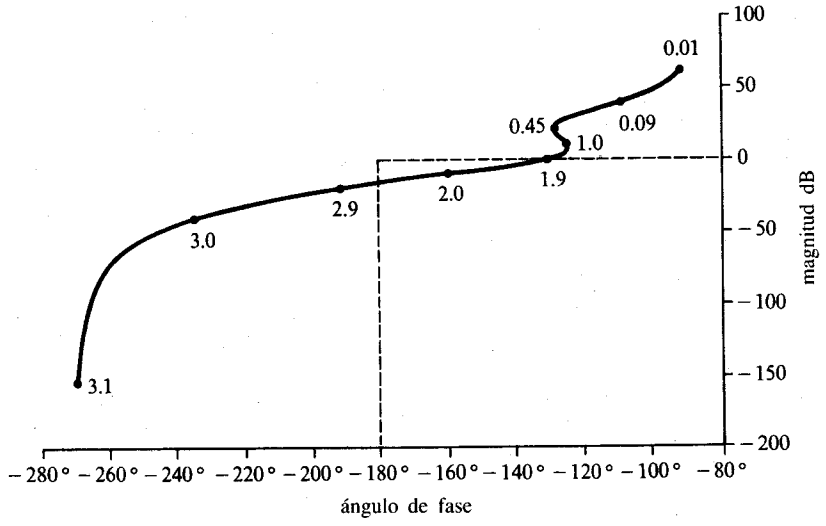


Figura 18-21

Problemas suplementarios

18.11. Encuentre el valor de K_B para el cual el sistema cuya función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{K_B}{s(1 + s/200)(1 + s/250)}$$

tiene un pico resonante M_p de 1.4 dB. *Resp.* $K_B = 119.4$.

18.12. Para el sistema del problema 18.11, encuentre la compensación de ganancia más atraso tal que $M_p \leq 1.7$, $\phi_{MF} \geq 35°$ y $K_v \geq 50$.

18.13. Para el sistema del problema 18.11, encuentre la compensación de ganancia más adelanto tal que $M_p \leq 1.7$, $\phi_{MF} \geq 50°$ y $K_v \geq 50$.

18.14. Para el sistema del problema 18.11, encuentre la compensación de ganancia más atraso-adelanto tal que $M_p \leq 1.5$, $\phi_{MF} \geq 40°$ y $K_v \geq 100$.

18.15. Encuentre la compensación de ganancia más atraso para el sistema cuya función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{K_B}{s(1 + s/10)(1 + s/5)}$$

tal que $K_v = 30$ y $\phi_{MF} \geq 40°$.

18.16. Para el sistema del problema 18.15, encuentre la compensación de ganancia más adelanto tal que $K_v \geq 30$, $\phi_{MF} \geq 45°$. *Sugerencia*: utilice dos redes de compensación por adelanto en cascada.

18.17. Encuentre la compensación de ganancia más adelanto para el sistema cuya función de transferencia en malla abierta es

$$GH = \frac{K_B}{s(1 + s/2)}$$

tal que $K_v = 20$ y $\phi_{MF} = 45°$.

Capítulo 19

Introducción a los sistemas de control no lineales

19.1 Introducción

Hasta ahora hemos limitado el estudio a los sistemas que pueden describirse mediante modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones de diferencia lineales invariables en el tiempo, o mediante sus funciones de transferencia, excitados por funciones de entrada transformables en Laplace o transformables en z. Las técnicas desarrolladas para estudiar estos sistemas son relativamente directas y a menudo conducen a diseños de sistemas de control prácticos. Si bien es cierto que ningún sistema físico es *exactamente* lineal e invariable en el tiempo, tales modelos a menudo son aproximaciones adecuadas y, como resultado, los métodos de sistemas lineales desarrollados en este libro tienen amplia aplicación. Sin embargo, hay muchas situaciones para las cuales son inapropiadas las representaciones lineales y se requieren modelos *no lineales*.

Las teorías y los métodos para el análisis y el diseño de sistemas de control no lineales constituyen un amplio campo de conocimiento, parte del cual es bastante complejo. El propósito de este capítulo es presentar algunas de las técnicas clásicas que prevalecen, utilizando las matemáticas casi en el mismo nivel que en los capítulos anteriores.

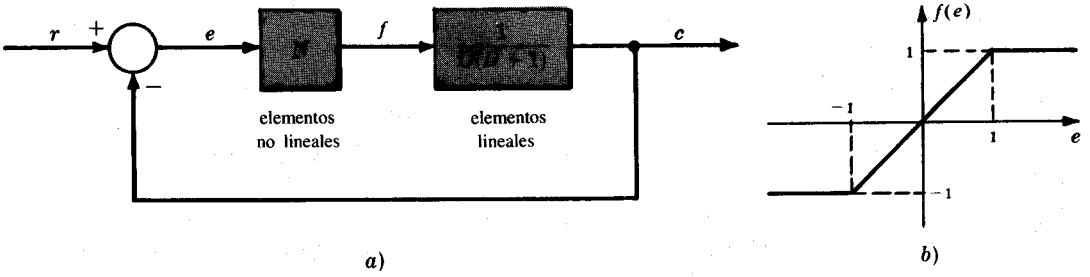
Los sistemas *lineales* se establecen en la definición 3.21. Cualquier sistema que no satisfaga esta definición es no lineal. La mayor dificultad con los sistemas no lineales, especialmente con los descritos mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o ecuaciones de diferencia no lineales, es que las soluciones analíticas o de forma cerrada sólo son posibles para muy pocos casos especiales, y éstos, por lo general, no son de interés práctico en el análisis o el diseño de sistemas de control. Además, a diferencia de los sistemas lineales, para los cuales pueden determinarse de manera separada las respuestas libre y forzada y luego superponer los resultados para obtener la respuesta total, las respuestas libre y forzada de los sistemas no lineales a menudo *interactúan* y no pueden estudiarse por separado y la superposición generalmente no se cumple para las entradas o las condiciones iniciales.

En general, las respuestas características y la estabilidad de los sistemas no lineales dependen cualitativa y cuantitativamente de los valores de las condiciones iniciales y de la magnitud, configuración y forma de las entradas al sistema. De otra parte, a menudo las soluciones a ecuaciones de sistemas no lineales en el dominio del tiempo pueden obtenerse mediante técnicas de simulación por computador, para entradas, parámetros y condiciones iniciales *específicas*. Los algoritmos y programas de aplicación para simulación, un tema especial que se encuentra fuera del alcance de este libro, son ampliamente accesibles y por tanto aquí no recibirán atención adicional. En lugar de ello, nos enfocaremos sobre varios métodos analíticos para estudiar sistemas de control no lineales.

Los problemas de sistemas de control no lineales aparecen cuando la estructura de elementos fijos de un sistema son inherentemente no lineales y/o se presenta compensación no lineal en el sistema con el propósito de mejorar su comportamiento. En cualquier caso, las propiedades de estabilidad son la consecuencia central.

EJEMPLO 19.1. La figura 19-1*a*) es un diagrama de bloques de un sistema retroalimentado no lineal que contiene dos bloques. El bloque *lineal* está representado por la función de transferencia $G_2 = 1/D(D + 1)$, en donde $D \equiv d/dt$ es el operador *diferencial*. Se utiliza D en lugar de s en esta función de transferencia lineal porque la transformada de Laplace y su inversa por lo general no son estrictamente aplicables en el análisis no lineal de sistemas con elementos tanto lineales como no lineales. De manera alterna, cuando se utiliza el método de las funciones descriptoras (sección 19.5), una técnica aproximada de respuesta de frecuencia, a menudo escribimos

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega + 1)}$$



a) *b*)

Figura 19-1

El *bloque no lineal N* tiene la característica de transferencia $f(e)$ definida en la figura 19-1*b*). Tales no linealidades se llaman (lineal por tramos) funciones de **saturación** que se describen en la siguiente sección.

EJEMPLO 19.2. Si se supone que la tierra es esférica y que todas las fuerzas externas diferentes de la gravedad son imperceptibles, entonces el movimiento de un satélite terrestre se encuentra en un plano llamado *plano de la órbita*. Este movimiento se define mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales (*véase* el problema 3.3):

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \text{(ecuación de la fuerza transversal)}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k^2}{pr^2} \qquad \text{(ecuación de la fuerza radial)}$$

El satélite, junto con cualquier controlador diseñado para modificar su movimiento, constituye un sistema de control no lineal.

A continuación se resumen varios métodos populares para el análisis no lineal.

19.2 Aproximaciones linealizadas y linealizadas por tramos de sistemas no lineales

Los términos no lineales en las ecuaciones diferenciales o en las de diferencia algunas veces pueden aproximarse mediante términos lineales o términos de orden cero (constantes), sobre rangos limitados de la respuesta del sistema o la función que fuerza el sistema. En cualquier caso, una o más ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencia lineales, pueden obtenerse como aproximaciones del sistema no lineal, válidas sobre los mismos rangos de operación limitados.

EJEMPLO 19.3. Considere el sistema masa-resorte de la figura 19-2, en donde la fuerza del resorte $f_s(x)$ es una función no lineal del desplazamiento x medido desde su posición de reposo, como se muestra en la figura 19-3.

La ecuación de movimiento de la masa es $M(d^2x/dt^2) + f_s(x) = 0$. Sin embargo, si la magnitud absoluta del desplazamiento no excede x_0, entonces $f_s(x) = kx$, en donde k es una constante. En este caso, la ecuación de movimiento es una ecuación lineal con coeficientes constantes dada por $M(d^2x/dt^2) + kx = 0$, válida para $|x| \leq x_0$.

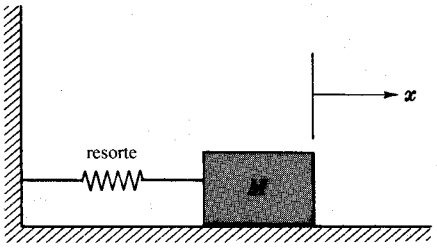


Figura 19-2

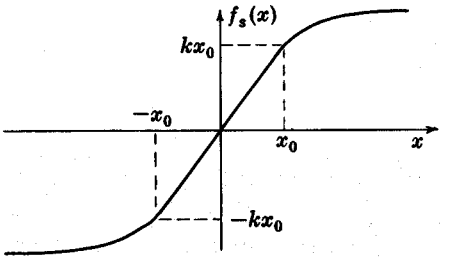


Figura 19-3

EJEMPLO 19.4. Consideremos de nuevo el sistema del ejemplo 19.3, pero ahora el desplazamiento x excede a x_0. Para tratar este problema, hagamos que la curva de fuerza del resorte sea aproximada por las tres líneas rectas que se muestran en la figura 19-4, una aproximación *lineal por tramos* de $f_s(x)$.

El *sistema* se aproxima entonces mediante un sistema lineal por tramos; es decir, el sistema se describe mediante la ecuación lineal $M(d^2x/dt^2) + kx = 0$ cuando $|x| \leq x_1$, y mediante las ecuaciones $M(d^2x/dt^2) \pm F_1$ cuando $|x| > x_1$. Se usa el signo + si $x > x_1$, y el signo − si $x < -x_1$.

Algunas veces los términos no lineales en la ecuación de un sistema se conocen de tal modo que puede expandirse fácilmente en una serie, por ejemplo una serie de Taylor o una de Maclaurin. De esta manera, un término no lineal puede aproximarse mediante los primeros términos de la serie, excluyendo los términos superiores al primer grado.

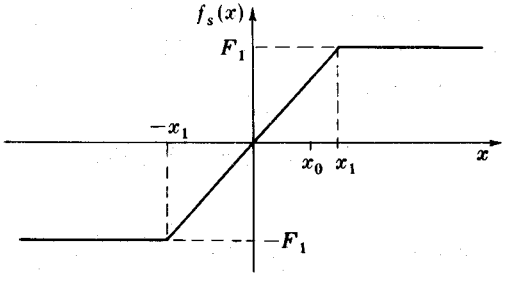


Figura 19-4

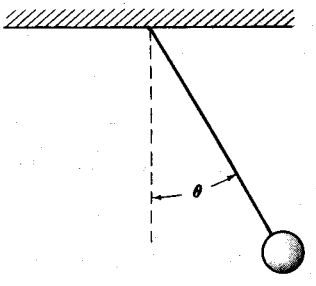


Figura 19-5

EJEMPLO 19.5. Considere la ecuación no lineal que describe el movimiento de un péndulo (*véase* la figura 19-5):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0$$

en donde l es la longitud de la cuerda del péndulo y g es la aceleración de la gravedad. Si nos interesan los pequeños movimientos del péndulo alrededor del "punto de operación", $\theta = 0$, entonces la ecuación del movimiento puede linealizarse alrededor de este punto de operación. Esto se logra con la expansión en serie de Taylor del término no lineal $(g/l)\text{sen}\,\theta$ alrededor del punto $\theta = 0$ y la retención de los términos de primer grado únicamente. La ecuación no lineal es

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^k}{k!}\left(\frac{d^k}{d\theta^k}(\operatorname{sen}\theta)\bigg|_{\theta=0}\right)$$
$$= \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots\right] = 0$$

La ecuación lineal es $d^2\theta/dt^2 + (g/l)\theta = 0$, válida para variaciones pequeñas de θ.

Es instructivo expresar más formalmente el proceso de linealización de las aplicaciones de la serie de Taylor, para establecer mejor su aplicabilidad y sus limitaciones.

Serie de Taylor

La expansión en serie infinita de una función no lineal general $f(x)$ puede ser muy útil en el análisis de sistemas no lineales. La función $f(x)$ puede escribirse como la siguiente serie infinita, expandida alrededor del punto $\bar{x}$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\bigg|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x}) + \frac{1}{2!}\frac{d^2f}{dx^2}\bigg|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x})^2 + \cdots$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-\bar{x})^k}{k!}\frac{d^kf}{dx^k}\bigg|_{x=\bar{x}} \qquad (19.1)$$

en donde $(d^kf/dx^k)|_{x=\bar{x}}$ es el valor de la k-ésima derivada de f con respecto a x evaluada en el punto $x = \bar{x}$. Obviamente, esta expansión existe (es posible) sólo si existen todas las derivadas requeridas.

Si la suma de los términos de segundo grado y de grado superior en $(x - \bar{x})$ de la ecuación (*19.1*) son insignificantes comparados con la suma de los dos primeros términos, podemos escribir

$$f(x) \cong f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\bigg|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x}) \qquad (19.2)$$

A menudo esta aproximación es adecuada si x es "suficientemente cercana" a $\bar{x}$, o, lo que es equivalente, si $x - \bar{x}$ es "suficientemente pequeño", en cuyo caso los términos de orden superior son *relativamente* pequeños.

La ecuación (*19.2*) puede escribirse de nuevo como

$$f(x) - f(\bar{x}) \cong \frac{df}{dx}\bigg|_{x=\bar{x}}(x-\bar{x}) \qquad (19.3)$$

Entonces, si definimos

$$\Delta x \equiv x - \bar{x} \tag{19.4}$$

$$\Delta f \equiv f(x) - f(\bar{x}) \tag{19.5}$$

La ecuación (*19.3*) se convierte en

$$\Delta f \cong \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=\bar{x}} \Delta x \tag{19.6}$$

Si $x = x(t)$ es una función de tiempo t, o de cualquier otra variable independiente, entonces t puede tratarse como un parámetro fijo para la mayor parte de las aplicaciones cuando se realizan los cálculos de linealización anteriores, y $\Delta x = \Delta x(t) \equiv x(t) - \bar{x}(t)$, etc.

EJEMPLO 19.6. Suponga que $y(t) = f[u(t)]$ representa un sistema no lineal con entrada $u(t)$ y salida $y(t)$, en donde $t \geq t_0$ para algún t_0, y df/du existe para todo u. Si las condiciones normales de operación de este sistema están definidas por la entrada $u = \bar{u}$ y la salida $y = \bar{y}$, entonces los cambios pequeños $\Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$ en la operación de salida en respuesta a cambios pequeños $\Delta u(t) = u(t) - \bar{u}(t)$ en la entrada pueden expresarse mediante la relación lineal aproximada

$$\Delta y(t) \cong \left.\frac{df}{du}\right|_{u=\bar{u}(t)} \Delta u(t) \tag{19.7}$$

para $t \geq t_0$.

Serie de Taylor para procesos vectoriales

Las ecuaciones (*19.1*) a (*19.7*) se generalizan fácilmente para funciones no lineales m-vectoriales de argumentos n-vectoriales, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, en donde

$$\mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y m y n son arbitrarios. En este caso, $\Delta\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$, $\Delta\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ y la ecuación (*19.6*) se hace

$$\Delta\mathbf{f} \cong \left.\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}\right|_{x=\bar{x}} \Delta\mathbf{x} \tag{19.8}$$

en donde $d\mathbf{f}/d\mathbf{x}$ es la matriz definida como

$$\frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{19.9}$$

EJEMPLO 19.7. Para $m = 1$ y $n = 2$, la ecuación (*19.9*) se reduce a

$$\frac{df}{d\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

y la ecuación (*19.8*) es

$$\Delta f \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 \qquad (19.10)$$

La ecuación (*19.10*) representa el caso común en donde una función escalar no lineal f de dos variables, digamos $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv y$ se linealizan alrededor del punto $\{\bar{x}, \bar{y}\}$ en el plano.

Linealización de ecuaciones diferenciales no lineales

Para linealizar ecuaciones diferenciales seguimos el mismo procedimiento empleado para linealizar funciones $\mathbf{f}(x)$. Considere un **sistema diferencial no lineal** escrito en forma de variables de estado:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)] \qquad (19.11)$$

en donde el vector de n variables de estado $\mathbf{x}(t)$ y el vector de r entradas $\mathbf{u}(t)$ se definen como en el Capítulo 3, en las ecuaciones (*3.24*) y (*3.25*), y $t \geq t_0$. En la ecuación (*19.11*), $\mathbf{f}$ es un vector de n funciones no lineales de $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$.

De manera similar, las **ecuaciones de salida no lineales** pueden escribirse en la forma vectorial:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t)] \qquad (19.12)$$

en donde $\mathbf{y}(t)$ es un vector de m salidas y $\mathbf{g}$ es un vector de m funciones no lineales de $\mathbf{x}(t)$.

EJEMPLO 19.8. Un ejemplo de un sistema diferencial ESSS no lineal de la forma de las ecuaciones (*19.11*) y (*19.12*) es

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(\mathbf{x}, u) = c_1 u x_2 - c_2 x_1^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(\mathbf{x}, u) = \frac{c_3 x_1}{c_4 + x_1}$$

$$y = g(\mathbf{x}) = c_5 x_1^2$$

Las *versiones linealizadas* de las ecuaciones (*19.11*) y (*19.12*) se representan por

$$\frac{d(\Delta\mathbf{x})}{dt} \cong \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(t)}} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(t)}} \Delta\mathbf{u} \qquad (19.13)$$

$$\Delta y(t) \cong \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)} \Delta\mathbf{x} \qquad (19.14)$$

en donde las matrices de derivadas parciales en estas ecuaciones se definen como en las ecuaciones (*19.9*) y (*19.10*), cada una evaluada en el "punto" $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\}$. Los pares $\bar{\mathbf{x}} \equiv \bar{\mathbf{x}}(t)$ y $\bar{\mathbf{u}} \equiv \bar{\mathbf{u}}(t)$ realmente son funciones de tiempo, pero se tratan como "puntos" en los cálculos indicados.

Las ecuaciones linealizadas (*19.13*) y (*19.14*) a menudo se interpretan como sigue. Si la entrada se distorsiona o se desvía de un "punto de operación" $\bar{\mathbf{u}}(t)$ en una cantidad suficientemente pequeña $\Delta\mathbf{u}(t)$, generando perturbaciones $\Delta\mathbf{x}(t)$ suficientemente pequeñas en el estado y perturbaciones $\Delta\mathbf{y}(t)$ suficientemente pequeñas en la salida alrededor de sus puntos de operación, entonces las ecuaciones *lineales* (*19.13*) y (*19.14*) son ecuaciones aproximadas razonables para los estados distorsionados $\Delta\mathbf{x}(t)$ y las salidas distorsionadas $\Delta\mathbf{y}(t)$.

Las ecuaciones linealizadas (*19.13*) y (*19.14*) a menudo se llaman **ecuaciones de perturbación** (*pequeña*) en el sistema diferencial no lineal. Son *lineales* en $\Delta\mathbf{x}$ y $(\Delta\mathbf{u})$ porque las matrices de coeficientes:

$$\left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)\\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(t)}} \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)\\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(t)}} \qquad \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)}$$

que se han evaluado en $\bar{\mathbf{x}}(t)$ y/o $\bar{\mathbf{u}}(t)$ *no* son funciones de $\Delta\mathbf{x}(t)$ [o de $\Delta\mathbf{u}(t)$].

Las ecuaciones linealizadas (*19.13*) y (*19.14*) también son *invariables en el tiempo* si $\bar{\mathbf{u}}(t) = \bar{\mathbf{u}}$ = constante y $\bar{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{x}}$ = constante. En este caso, todos los métodos desarrollados en este libro pueden aplicarse para ecuaciones diferenciales ordinarias invariables en el tiempo. Sin embargo, los resultados deben interpretarse juiciosamente porque, de nuevo, el modelo linealizado es una aproximación, válida sólo para perturbaciones "suficientemente pequeñas" alrededor de un punto de operación y, hablando de modo general, las perturbaciones "suficientemente pequeñas" no siempre son fáciles de descubrir.

EJEMPLO 19.9. Las ecuaciones linealizadas (de perturbación) del sistema dado en el ejemplo 19.8 se determinan como sigue, a partir de las ecuaciones (*19.13*) y (*19.14*). Por conveniencia, primero definimos

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}(t)\\ u=\bar{u}(t)}} \equiv \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}$$

etc., para simplificar la notación. Entonces

$$\frac{d(\Delta x_1)}{dt} = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial u}\Delta u = -2c_2\bar{x}_1\Delta x_1 + c_1\bar{u}\Delta x_2 + c_1\bar{x}_2\Delta u$$

De manera similar,

$$\frac{d(\Delta x_2)}{dt} \cong \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial u}\Delta u$$
$$= \frac{c_3c_4}{(c_4+\bar{x}_1)^2}\Delta x_1 + 0 + 0 = \frac{c_3c_4\,\Delta x_1}{(c_4+\bar{x}_1)^2}$$

y la ecuación de la perturbación de la salida es

$$\Delta y \cong \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_2}\Delta x_2 = 2c_5\bar{x}_1\Delta x_1$$

Linealización de ecuaciones discretas en el tiempo no lineales

El procedimiento de linealización en serie de Taylor puede aplicarse a muchos problemas de sistemas discretos en el tiempo, pero debe tenerse suficiente cuidado al justificar la existencia de la serie. A menudo la aplicación se justifica si las ecuaciones discretas en el tiempo representan procesos no lineales que se comportan razonablemente bien, tales como las representaciones discretas en el tiempo de sistemas continuos con variables de estado expresadas sólo en instantes de tiempo discretos.

EJEMPLO 19.10. El sistema discreto e invariable en el tiempo representado por la ecuación de diferencia no lineal $x(k+1) = ax^2(k)$, con $a < 0$ y $x(0) \neq 0$, se linealiza fácilmente porque el término no lineal $ax^2(k)$ es una función uniforme de x. Entonces tenemos

$$x(k+1) = ax^2(k) \equiv f(x)$$

$$\Delta f = f(x) - f(\bar{x})$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} = 2a\bar{x}$$

$$x(k) = \bar{x}(k) + \Delta x(k)$$

$$\bar{x}(k+1) = a\bar{x}^2(k)$$

La sustitución de estas ecuaciones en la ecuación (*19.16*) y el reordenamiento de términos produce

$$\Delta x(k+1) \cong 2a\bar{x}(k)\,\Delta x(k)$$

que es lineal en Δx, pero en general variable en el tiempo.

19.3 Métodos del plano de fase

En las secciones 3.15 y 4.6 se trató la forma de variables de estado de las ecuaciones diferenciales lineales y se demostró que es una herramienta útil para el análisis de sistemas lineales. En la sección 19.2 esta representación se aplicó a los sistemas no lineales mediante el concepto de linealización. En esta sección, los métodos de **plano de fase** se desarrollan para analizar ecuaciones diferenciales no lineales en forma de variables de estado, sin necesidad de linealizarlas.

Una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{19.15}$$

puede escribirse de nuevo como un par de ecuaciones diferenciales de primer orden, como se hizo en la sección 3.15, al hacer el cambio de variables $x = x_1$ y $dx/dt = x_2$, y producir

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{19.16}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2) \tag{19.17}$$

La dupla o par de variables de estado (x_1, x_2) puede considerarse como un punto en el plano. Puesto que x_1 y x_2 son funciones de tiempo, entonces a medida que t aumenta, $(x_1(t), x_2(t))$ describe una *línea* o *trayectoria* en el plano. Este plano se llama **plano de fase**, y la trayectoria es una gráfica paramétrica de x_2 respecto de x_1, parametrizada por t.

Si eliminamos el tiempo como variable independiente en las ecuaciones *(19.16)* y *(19.17)*, obtenemos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_2}{f(x_1, x_2)} \tag{19.18}$$

La solución de la ecuación *(19.18)* para x_1 en términos de x_2 (o viceversa) define una trayectoria en el plano de fase. Al resolver esta ecuación para varias condiciones iniciales de x_1 y x_2 y examinar las trayectorias resultantes en el plano de fase, podemos determinar el comportamiento del sistema de segundo orden.

EJEMPLO 19.11. La ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $(dx/dt)|_{t=0} = 1$, puede remplazarse por las dos ecuaciones de primer orden

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad x_1(0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2^2 \qquad x_2(0) = 1$$

en donde $x \equiv x_1$ y $dx/dt \equiv x_2$. Al eliminar el tiempo como variable independiente, obtenemos entonces

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_2^2} = -\frac{1}{x_2} \quad \text{o} \quad dx_1 = -\frac{dx_2}{x_2}$$

La integración de esta ecuación para las condiciones iniciales dadas produce

$$\int_{x_1(0)=0}^{x_1} dx_1' = x_1 = -\int_{x_2(0)=1}^{x_2} \frac{dx_2'}{x_2'} = -\ln x_2 \quad \text{o} \quad x_2 = e^{-x_1}$$

En la figura 19-6 se presenta la trayectoria del plano de fase definida por esta ecuación.

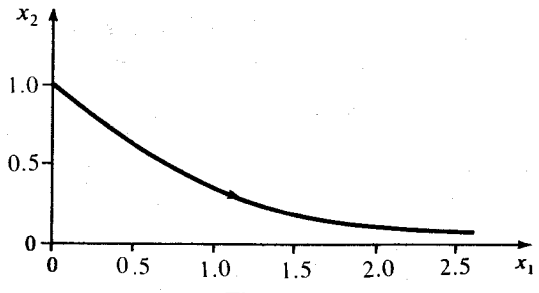


Figura 19-6

Su dirección en el plano de fase se determina al tener en cuenta que $dx_2/dt = -x^2_2 < 0$ para todo $x_2 \neq 0$. En consecuencia x_2 siempre disminuye y obtenemos la trayectoria que se muestra

Sistemas de control enciende - apaga (On-Off)

Una aplicación particularmente útil de los métodos de plano de fase es el diseño de *controladores enciende-apaga on-off* (definición 2.25), para la clase especial de sistemas de control con retroalimentación con plantas de segundo orden continuas en el tiempo, como las de la figura 19-7 y la ecuación (*19.19*).

$$\frac{d^2c}{dt^2} + a\frac{dc}{dt} = u \qquad a \geq 0 \tag{19.19}$$

Las condiciones iniciales $c(0)$ y $(dc/dt)|_{t=0}$ de la ecuación (*19.19*) son arbitrarias. El controlador enciende-apaga (*on-off*) con entrada $e = r - c$ genera la señal de control u, la cual sólo puede tener dos valores, $u = \pm 1$.

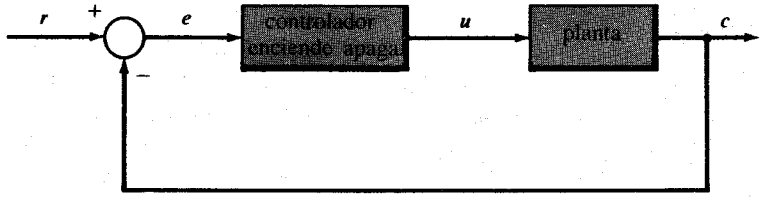


Figura 19-7

Especificaciones de diseño del controlador enciende-apaga (*on-off*)

Si la entrada de referencia r es una función paso unitario aplicada en el tiempo cero, las especificaciones de diseño típicas para el sistema de la figura 19-7 son las siguientes. La entrada de control u a la planta debe conducir la salida de la planta $c(t)$ a $c(t') = 1$ y su derivada dc/dt a $(dc/dt)|_{t=t'} = 0$, simultáneamente, y en el menor tiempo posible t'. El error en estado estacionario se hace cero en t' y permanece en cero si la señal de control se apaga ($u = 0$).

Puesto que se requiere que t' sea mínimo, éste es un *problema de control óptimo* (*véase* la sección 20.5). Puede demostrarse que t' se hace mínimo sólo si la señal de control u conmuta los valores de $+1$ a -1 o de -1 a $+1$, a lo sumo una vez durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq t'$.

Diseño del controlador enciende-apaga *on-off*

Al resolver este problema de diseño, es conveniente utilizar el error $e = r - c$, en donde $r = \mathbf{1}(t)$, en lugar de la salida controlada c, porque $e = 0$ y $de/dt = 0$ cuando $c = 1$ y $dc/dt = 0$. Por tanto, pedir que el error e y su derivada se hagan cero en el tiempo mínimo es equivalente a nuestro problema original.

Para resolver el problema, primero generamos una ecuación diferencial para e:

$$\frac{de}{dt} = \frac{d}{dt}(r - c) = -\frac{dc}{dt}$$

$$\frac{d^2e}{dt^2} = -\frac{d^2c}{dt^2} = a\frac{dc}{dt} - u = -a\frac{de}{dt} - u \tag{19.20}$$

con las condiciones iniciales $e(0) = 1 - c(0)$ y $(de/dt)|_{t=0} = -(dc/dt)|_{t=0}$. Luego remplazamos la ecuación (*19.20*) por dos ecuaciones diferenciales de primer orden, haciendo $e \equiv x_1$ y $de/dt \equiv x_2$:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \tag{19.21}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_2 - u \tag{19.22}$$

con las condiciones iniciales $x_1(0) = e(0) = 1 - c(0)$ y $x_2(0) = (de/dt)|_{t=0} = -(dc/dt)|_{t=0}$. Al eliminar el tiempo como variable independiente, obtenemos entonces

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{ax_2 + u}{x_2} \quad \text{o} \quad dx_1 = -\frac{x_2\,dx_2}{ax_2 + u} \tag{19.23}$$

Esta ecuación más las condiciones iniciales en $x_1(0)$ y $x_2(0)$ definen una trayectoria en el plano de fase.

Puesto que la señal de control u no conmuta (de $+1$ a -1 o de -1 a $+1$) más de una vez, podemos separar la trayectoria en dos partes, la primera, antes del tiempo de conmutación, y la segunda, después de la conmutación. Consideremos primero la segunda parte, ya que ésta termina en el origen del plano de fase, $x_1 = x_2 = 0$. Hacemos $u = \pm 1$ en la ecuación (*19.23*) y luego integramos entre un conjunto general de condiciones iniciales $x_1(t)$ y $x_2(t)$ y las condiciones terminales $x_1 = x_2 = 0$. Para efectuar la integración, consideramos cuatro conjuntos diferentes de condiciones iniciales, cada una correspondiente a uno de los cuadrantes del plano de fase.

En el primer cuadrante, $x_1 > 0$ y $x_2 > 0$. Nótese que $dx_1/dt = x_2 > 0$. De este modo x_1 aumenta cuando x_2 está en el primer cuadrante, y cuando x_2 tiende a cero, x_1 no puede ser cero. Por tanto, las trayectorias que comienzan en el primer cuadrante no pueden terminar en el origen del plano de fase si u no conmuta.

Cuando las condiciones iniciales están en el tercer cuadrante tenemos argumentos idénticos, es decir, si $x_1 < 0$ y $x_2 < 0$, la trayectoria no puede terminar en el origen si u no conmuta.

En el segundo cuadrante, $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$. Puesto que $dx_1/dt = x_2 > 0$, x_1 aumentará mientras $x_2 > 0$. Puesto que $a > 0$, entonces $-ax_2 < 0$ y así $dx_2/dt < 0$ para $u = +1$, dondequiera que $x_2 > 0$. La integración de la ecuación (*19.23*) con $u = +1$, condiciones iniciales en el segundo cuadrante y condiciones terminales $x_1 = x_2 = 0$, produce

$$\int_{x_1(t)}^{0} dx_1 = -x_1(t) = -\int_{x_2(t)}^{0} \frac{x_2\,dx_2}{ax_2 + 1}$$

$$\text{ó} \quad x_1(t) = \frac{1}{a^2}\left[ax_2 + 1 - \ln(ax_2 + 1)\right]\Big|_{x_2(t)}^{0} = -\frac{x_2(t)}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\left[ax_2(t) + 1\right] \tag{19.24}$$

en donde $x_1(t) \leq 0, x_2(t) \geq 0$. Esta ecuación define una curva en el segundo cuadrante del plano de fase, tal que, para cualquier punto sobre esta curva, la trayectoria termina en el origen si $u = +1$. Esto es, la señal de control $u = +1$ conduce a x_1 y a x_2 simultáneamente a cero.

Mediante argumentos idénticos, existe una curva en el cuarto cuadrante definida mediante

$$x_1(t) = -\frac{x_2(t)}{a} - \frac{1}{a^2}\ln\left[-ax_2(t) + 1\right] \tag{19.25}$$

en donde $x_1(t) \geq 0$, $x_2(t) \leq 0$ tales que, para cualquier $(x_1(t), x_2(t))$ sobre esta curva, la señal de control $u = -1$ conduce a x_1 y a x_2 simultáneamente a cero.

Las curvas definidas por las ecuaciones (*19.24*) y (*19.25*) se unen en $x_1 = x_2 = 0$ y juntas definen la **curva de conmutación** del controlador enciende-apaga (*on-off*). La curva de conmutación divide todo el plano de fase en dos regiones, como se indica en la figura 19-8. La parte de cualquier trayectoria después de la conmutación siempre comienza sobre esta curva, se mueve a lo largo de ella, y termina en $x_1 = x_2 = 0$.

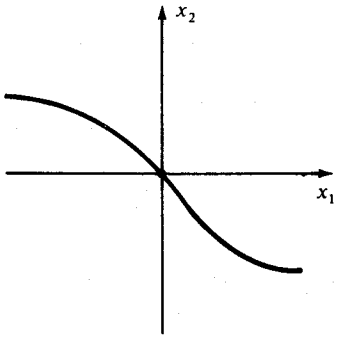


Figura 19-8

Consideremos ahora la parte de la trayectoria antes de la conmutación. Primero, exploremos una propiedad monótona de la curva de conmutación. En el segundo cuadrante, en donde $u = +1$, $x_2 > 0$ y la pendiente de la curva es negativa:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\left(a + \frac{1}{x_2}\right) < 0$$

En el cuarto cuadrante, en donde $u = -1$, $x_2 < 0$ y

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\left(a - \frac{1}{x_2}\right) < 0$$

Por tanto la pendiente de toda la curva de conmutación es negativa para todo (x_1, x_2) sobre la curva, es decir, la curva de conmutación *disminuye monótonamente*. De este modo, existe uno y sólo un valor de x_2 correspondiente con cualquier valor específico de x_1. Debido a la propiedad monótona de la curva de conmutación, la región por encima de la curva es igual a la región de la derecha de la curva de conmutación, es decir, consta del conjunto de puntos (x_1, x_2) tales que

$$x_1 > -\frac{x_2}{a} + \frac{1}{a^2}\ln(ax_2 + 1) \qquad (19.26)$$

cuando $x_2 \geq 0$ y

$$x_1 > -\frac{x_2}{a} - \frac{1}{a^2}\ln(-ax_2 + 1) \qquad (19.27)$$

cuando $x_2 \leq 0$.

Consideramos la parte de la trayectoria antes de la conmutación, cuando las condiciones $(x_1(0), x_2(0))$ se encuentran por encima de la curva de conmutación. Para este caso, $u = +1$, y la primera parte de la trayectoria se obtiene mediante la integración de la ecuación (*19.23*) con $u = +1$ entre las condiciones iniciales $(x_1(0), x_2(0))$ y un par de puntos arbitrarios $(x_1(t), x_2(t))$ que satisfacen las desigualdades (*19.26*) y (*19.27*). Obtenemos la trayectoria al integrar la ecuación (*19.23*), la cual produce

$$\int_{x_1(0)}^{x_1(t)} dx_1 = x_1(t) - x_1(0) = -\int_{x_2(0)}^{x_2(t)} \frac{x_2\,dx_2}{ax_2 + 1} = -\frac{1}{a^2}\left[ax_2 + 1 - \ln(ax_2 + 1)\right]\Big|_{x_2(0)}^{x_2(t)}$$

$$\text{o} \quad x_1(t) = x_1(0) + \frac{x_2(0)}{a} - \frac{1}{a^2}\ln[ax_2(0) + 1] - \frac{x_2(t)}{a} + \frac{1}{a^2}\ln[ax_2(t) + 1] \qquad (19.28)$$

Nótese que esta parte de la trayectoria tiene la misma forma que la de la ecuación (*19.24*), pero ésta se encuentra desplazada a la derecha. Así que, cuando $x_2(t) = 0$, $x_1(t) = x_1(0) + (1/a)[x_2(0) - (1/a)\ln(ax_2(0) + 1)]$, que es mayor que 0 debido a la desigualdad (*19.26*).

Así, cuando $(x_1(0), x_2(0))$ se encuentra por encima de la curva de conmutación, el controlador de encendido-apagado (*on-off*) desarrolla una señal de control $u = +1$, y la trayectoria resultante $(x_1(t), x_2(t))$ se define mediante la ecuación (*19.28*). Cuando esta trayectoria interseca la curva de conmutación, es decir, cuando $(x_1(t), x_2(t))$ satisface las ecuaciones (*19.25*) y (*19.28*) simultáneamente, el controlador de encendido-apagado (*on-off*) conmuta la señal a $u = -1$, y la trayectoria continúa a lo largo de la curva de conmutación hasta el origen del plano de fase.

Por razonamiento idéntico, si las condiciones iniciales se encuentran por debajo de la curva de conmutación, es decir,

$$x_1(0) < -\frac{x_2(0)}{a} + \frac{1}{a^2}\ln[ax_2(0) + 1]$$

cuando $x_2(0) \geq 0$, o

$$x_1(0) < -\frac{x_2(0)}{a} - \frac{1}{a^2}\ln[-ax_2(0) + 1]$$

cuando $x_2(0) \leq 0$, entonces el controlador de encendido-apagado (*on-off*) genera una señal de control $u = -1$ y la trayectoria $(x_1(t), x_2(t))$ satisface

$$x_1(t) = x_1(0) + \frac{x_2(0)}{a} + \frac{1}{a^2}\ln[-ax_2(0) + 1] - \frac{x_2(t)}{a} - \frac{1}{a^2}\ln[-ax_2(t) + 1] \qquad (19.29)$$

Cuando esta trayectoria interseca la curva de conmutación, es decir, cuando $(x_1(t), x_2(t))$ satisface las ecuaciones (*19.24*) y (*19.29*) simultáneamente, el controlador de encendido-apagado (*on-off*) conmuta la señal de control a $u = +1$ y la trayectoria se mueve a lo largo de la curva de conmutación en el segundo cuadrante y termina en el origen del plano de fase.

Recordando que $x_1 \equiv e$ y $x_2 \equiv \dot{e}$, la lógica de conmutación del controlador de encendido-apagado (*on-off*) es como sigue:

a) Cuando $\dot{e} > 0$ y $e + \frac{\dot{e}}{a} - \frac{1}{a^2}\ln(a\dot{e} + 1) > 0$, entonces $u = +1$

b) Cuando $\dot{e} < 0$ y $e + \frac{\dot{e}}{a} + \frac{1}{a^2}\ln(-a\dot{e} + 1) > 0$, entonces $u = +1$

c) Cuando $\dot{e} > 0$ y $e + \frac{\dot{e}}{a} - \frac{1}{a^2}\ln(a\dot{e} + 1) < 0$, entonces $u = -1$

d) Cuando $\dot{e} < 0$ y $e + \frac{\dot{e}}{a} + \frac{1}{a^2}\ln(-a\dot{e} + 1) < 0$, entonces $u = -1$

EJEMPLO 19.12. Para el sistema de control con retroalimentación descrito en la figura 19-7 y la planta definida por la ecuación (*19.19*) con parámetro $a = 1$, la curva de conmutación está definida por

$$e = -\dot{e} + \ln(\dot{e} + 1) \quad \text{para} \quad \dot{e} > 0$$
$$e = -\dot{e} - \ln(-\dot{e} + 1) \quad \text{para} \quad \dot{e} < 0$$

y en la tabla 19.1 se presenta la lógica de conmutación para el controlador de encendido-apagado (*on-off*)

Tabla 19.1

$\dot{e} > 0$	$f_1(e) = e + \dot{e} - \ln(\dot{e} + 1) > 0$	$f_2(e) = e + \dot{e} + \ln(-\dot{e} + 1) > 0$	u
No	No	No	-1
No	No	Sí	$+1$
No	Sí	No	-1
No	Sí	Sí	$+1$
Sí	No	No	-1
Sí	No	Sí	-1
Sí	Sí	No	$+1$
Sí	Sí	Sí	$+1$

Generalización

Los métodos del plano de fase se aplican a sistemas de segundo orden. La técnica se ha generalizado a sistemas de tercer orden y de orden superior, pero normalmente el análisis es mucho más complejo. Por ejemplo, para diseñar controladores de encendido-apagado (*on-off*) de esta manera en sistemas de tercer orden, las curvas de conmutación se remplazan por *superficies* de conmutación, y la lógica de conmutación se hace mucho más extensa que la presentada en la tabla 19.1 en sistemas de segundo orden.

19.4 Criterio de estabilidad de Lyapunov

Los criterios de estabilidad presentados en el Capítulo 5 en general no pueden aplicarse a sistemas no lineales, aunque pueden ser aplicables si el sistema se linealiza como en la sección 19.2, si las perturbaciones $\Delta\mathbf{x}$ son lo suficientemente pequeñas, y si $\bar{\mathbf{u}}(t)$ y $\bar{\mathbf{x}}(t)$ son constantes, es decir, si las ecuaciones linealizadas son invariables en el tiempo. La teoría de Lyapunov proporciona un método más general, para explorar la estabilidad de los sistemas, los estados $\mathbf{x}(t)$ y las salidas $\mathbf{y}(t)$ en el dominio del tiempo, para perturbaciones $\Delta\mathbf{x}(t)$ de cualquier tamaño. Puede utilizarse para sistemas, lineales o no lineales, descritos por conjuntos de ecuaciones simultáneas

ordinarias de primer orden, diferenciales o de diferencia, que escribimos aquí de manera concisa en forma de variables de estado:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{19.30}$$

o

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \tag{19.31}$$

Las siguientes definiciones de estabilidad son para sistemas no forzados, es decir, para $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, y por simplicidad escribimos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ o $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)]$.

Un punto $\mathbf{x}_s$ para el cual $\mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{0}$ se llama **punto singular**. Se dice que un punto singular $\mathbf{x}_s$ es **estable** si, para cualquier región hiperesférica S_R (por ejemplo, un círculo en dos dimensiones) de radio R centrado en $\mathbf{x}_s$, existe una región hiperesférica S_r de radio $r \leq R$ también centrada en $\mathbf{x}_s$ en la cual cualquier movimiento $\mathbf{x}(t)$ del sistema comenzando en S_r permanece en S_R siempre.

Un punto $\mathbf{x}_s$ para el cual $\mathbf{f}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{0}$ se llama **punto singular**. Se dice que un punto singular $\mathbf{x}_s$ es mientos) $\mathbf{x}(t)$ tienden hacia $\mathbf{x}_s$ a medida que el tiempo tiende a infinito.

El **criterio de estabilidad de Lyapunov** determina que, si el origen es un punto singular, es estable si puede encontrarse una **función de Lyapunov** $V(\mathbf{x})$ con las siguientes propiedades:

a) $V(\mathbf{x}) > 0$ para todos los valores de $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (19.32)

b) $dV/dt \leq 0$ para todo $\mathbf{x}$, en sistemas continuos, o $\Delta V[\mathbf{x}(k)] \equiv V[\mathbf{x}(k+1)] - V[x(k)] \leq 0$, para todo $\mathbf{x}$, en sistemas discretos (19.33)

Además, si dV/dt (o ΔV) nunca es cero excepto en el origen, este último es *estable asintóticamente*.

EJEMPLO 19.13. Un sistema continuo no lineal representado por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + x = 0$$

o, de modo equivalente, el par de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - x_2^3 - x_1$$

en donde $x_1 \equiv x$, tiene un punto singular en $x_1 = x_2 = 0$. La función $V = x_1^2 + x_2^2$ es positiva para todo x_1 y x_2, excepto $x_1 = x_2 = 0$ en donde $V = 0$. La derivada

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1\frac{dx_1}{dt} + 2x_2\frac{dx_2}{dt} = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_2 - x_2^3 - x_1) = -2x_2^2 - 2x_2^4$$

nunca es positiva. En consecuencia el origen es estable.

EJEMPLO 19.14. En la figura 19-9 se muestra el sistema no lineal representado por las ecuaciones diferenciales [con $x_1(t) \equiv -c(t)$]:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$

$$\dot{x}_2 = -f(x_1 + r)$$

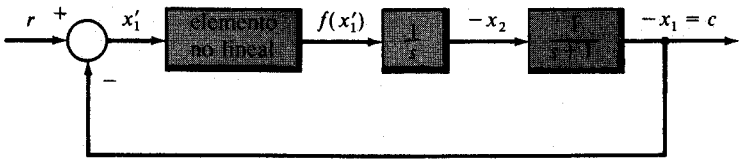


Figura 19-9

También, $f(0) \equiv 0$ para este elemento no lineal particular. Si r es constante, podemos hacer los cambios de variables $x_1' \equiv x_1 + r$, $x_2' \equiv x_2 + r$, y las ecuaciones de estado se convierten en

$$\dot{x}_1' = -x_1' + x_2'$$
$$\dot{x}_2' = -f(x_1')$$

El origen $x_1' = x_2' = 0$ es un punto singular puesto que $\dot{x}_1' = \dot{x}_2' = 0$ en el origen. La función de Lyapunov está definida por $V \equiv 2\int_0^{x_1'} f(e)\,de + x_2'^2 > 0$ para todo $x_1', x_2' \neq 0$, si $x_1' f(x_1') > 0$ para todo $x_1' \neq 0$. Derivando V,

$$\dot{V} = 2f(x_1')\dot{x}_1' + 2x_2'\dot{x}_2' = 2f(x_1')(-x_1' + x_2') - 2x_2' f(x_1') = -2x_1' f(x_1')$$

Así, si nos restringimos a $x_1' f(x_1') > 0$ para mantener $V > 0$, $\dot{V} \leq 0$ para $x_1' \neq 0$. En consecuencia el sistema es estable para cualquier elemento no lineal que satisfaga las condiciones

$$f(0) = 0$$
$$x_1' f(x_1') > 0 \quad \text{para} \quad x_1' \neq 0$$

Nótese que este resultado es muy general, y sólo se requieren las condiciones anteriores para asegurar la estabilidad.

Si r no es constante, la solución para $x_1(t)$ y para $x_2(t)$ correspondiente a $r(t)$, en general no es constante. Pero, si se conociera la solución, la estabilidad de la solución podría analizarse de modo similar.

EJEMPLO 19.15. Para el sistema discreto en el tiempo

$$x_1(k+1) = x_2(k)$$
$$x_2(k+1) = -f[x_1(k)]$$

en donde $f(x_1)$ es la no linealidad de saturación de la figura 19-1*b*), el origen es un punto singular porque $x_1(k) = x_2(k) = 0$ implica que $x_1(k+1) = x_2(k+1) = 0$.
Haciendo $V \equiv x_1^2 + x_2^2$, que es mayor que cero para todo $x_1, x_2 \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\Delta V &= x_1^2(k+1) + x_2^2(k+1) - x_1^2(k) - x_2^2(k) \\ &= x_2^2(k) + f^2[x_1(k)] - x_1^2(k) - x_2^2(k) \\ &= -x_1^2(k) + f^2[x_1(k)]\end{aligned}$$

Puesto que $f^2(x_1) \leq x_1^2$ para todo x_1, $\Delta V \leq 0$ para todo x_1, x_2, y en consecuencia el origen es estable.

Elección de las funciones de Lyapunov

Para muchos problemas, una elección conveniente de la función de Lyapunov $V(\mathbf{x})$ es la función de forma escalar cuadrática $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$, en donde $\mathbf{x}^T$ es la traspuesta del vector columna $\mathbf{x}$, y

P es una matriz simétrica real. Para producir $V > 0$, la matriz P debe ser *claramente positiva*. A partir del teorema de Sylvester [7], P es **claramente positiva** si y sólo si todos sus discriminantes son positivos, es decir

$$P_{11} > 0$$

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$\begin{vmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{vmatrix} > 0 \qquad (19.34)$$

En sistemas continuos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, la derivada de $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$ está dada por

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})P\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

En sistemas discretos, $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(k)]$ y

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) = \mathbf{x}^T(k+1)P\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k)$$
$$= \mathbf{f}^T[\mathbf{x}(k)]P\mathbf{f}[\mathbf{x}(k)] - \mathbf{x}^T(k)P\mathbf{x}(k)$$

EJEMPLO 19.16. En el sistema representado por $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, hacemos $V = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$ con $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T[A^T P + PA]\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\left[\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right]\mathbf{x}$$

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}\mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q\mathbf{x}$$

en donde $$Q = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

Puesto que P es claramente positiva, $V > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$. Los discriminantes de Q son 4 y $(24 - 9) = 15$. En consecuencia Q es claramente positiva y $-Q$ es claramente negativa, lo cual garantiza que $\dot{V} < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$. En este sistema, el origen es estable asintóticamente.

19.5 Métodos de respuesta de frecuencia

Funciones descriptoras

Las funciones descriptoras son funciones de respuesta de frecuencia aproximadas para los elementos no lineales de un sistema, las cuales pueden utilizarse para analizar todo el sistema utilizando las técnicas de respuesta de frecuencia desarrolladas en los capítulos anteriores.

Una función descriptora se desarrolla para un elemento no lineal, al analizar su respuesta a una entrada sinusoidal A sen ωt, la cual puede escribir como una serie de Fourier:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n) \tag{19.35}$$

La **función descriptora** es la relación de los coeficientes complejos de Fourier $B_1 e^{j\phi_1}$ de la frecuencia fundamental de esta salida, a la amplitud A de la entrada. Es decir, la *función descriptora* es la función compleja de ω, $(B_1/A)e^{j\phi_1}$, una función de respuesta de frecuencia de una aproximación del elemento no lineal. La función descriptora representa así la ganancia efectiva del elemento no lineal a la frecuencia de la sinusoide de entrada.

En general, B_1 y ϕ_1 son funciones tanto de la frecuencia de entrada $\omega = 2\pi/T$ como de la amplitud de entrada A. En consecuencia podemos escribir $B_1 = B_1(A, \omega)$, $\phi_1 = \phi_1(A, \omega)$, y la función descriptora como

$$\bar{N}(A, \omega) = \frac{B_1 e^{j\phi_1}}{A} = \frac{B_1(A, \omega)\, e^{j\phi_1(A,\omega)}}{A} \tag{19.36}$$

Para aplicar el método, remplazamos las no linealidades del sistema por las funciones descriptoras y luego aplicamos las técnicas del dominio de la frecuencia de los Capítulos 11, 12 y 15 hasta el 18, con algunas modificaciones para tener en cuenta la dependencia de B_1 y ϕ_1 en A.

EJEMPLO 19.17. La salida de la función no lineal $f(e) = e^3$ en respuesta a una entrada $e = A \operatorname{sen} \omega t$ es

$$f(e) = A^3 \operatorname{sen}^3 \omega t = \frac{A^3}{4}(3 \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen}^3 \omega t)$$

A partir de la ecuación (*19.36*), la función descriptora para $f(e)$ es

$$\bar{N}(A) = \frac{3A^2}{4}$$

Nótese que esta no linealidad no produce desplazamiento de fase, así que $\phi_1(A, \omega) = 0$.

Histéresis

En la figura 19-10 se presenta un tipo común de no linealidad llamada **histéresis** o **zona muerta**. En sistemas eléctricos puede ocurrir debido a las propiedades electromagnéticas no lineales, y en sistemas mecánicos puede resultar de la zona muerta en los trenes de engranaje o uniones mecánicas. Para otro ejemplo, véase el problema 2.16.

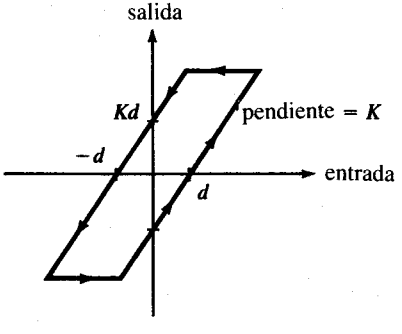


Figura 19-10

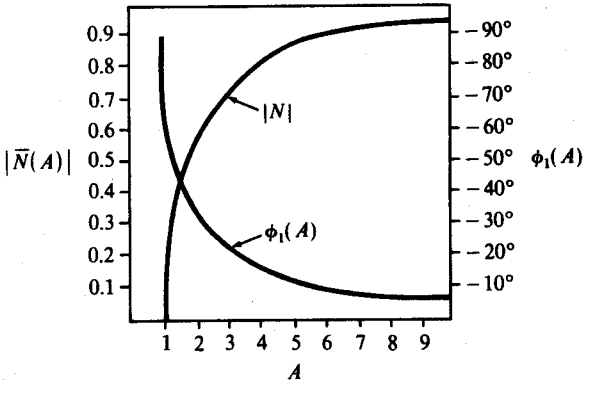


Figura 19-11

En la figura 19-11 se presenta la función característica descriptora de la histéresis, normalizada al parámetro de **zona muerta** $d = 1$ y pendiente $K = 1$. El atraso de fase $\phi_1(A)$ de esta función descriptora es función de la amplitud de entrada A, pero es independiente de la frecuencia de entrada ω.

La técnica de la función descriptora es particularmente muy apropiada en el análisis de sistemas continuos o discretos que contienen un elemento no lineal sencillo, como se ilustra en la figura 19-12, con función de transferencia en malla abierta $GH = \bar{N}(A, \omega)G(\omega)$. El análisis de respuesta de frecuencia de tales sistemas normalmente conlleva primero determinar si existen valores de A y ω que satisfagan la ecuación característica, $1 + \bar{N}(A, \omega)G(\omega) = 0$, o

$$G(\omega) = -\frac{1}{\bar{N}(A, \omega)}$$

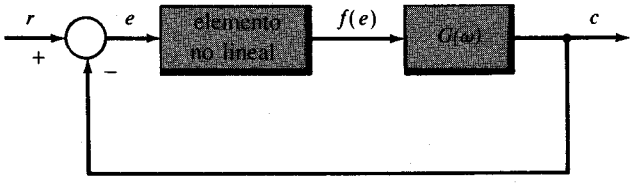


Figura 19-12

es decir, valores de A y ω que permitan oscilaciones. Los diagramas de Nyquist, de Bode o de Nichols de G y de $-1/\bar{N}$ pueden utilizarse por separado para resolver este problema, porque las gráficas deben cortarse si existen tales A y ω. La estabilidad relativa también puede evaluarse a partir de tales diagramas, al determinar la ganancia adicional (margen de ganancia) y/o el desplazamiento de fase (margen de fase) requerido para que las curvas se corten.

Debe tenerse presente que la función descriptora es sólo una aproximación de la no linealidad. La exactitud de los métodos de la función descriptora, que utilizan el análisis de respuesta de frecuencia basados en los métodos de sistemas lineales, dependen del filtraje efectivo de la planta $G(\omega)$ de los armónicos de orden superior al primero (despreciados) producidos por la no linealidad. Puesto que la mayor parte de las plantas tienen más polos que ceros, a menudo esta es una aproximación razonable.

EJEMPLO 19.18. Considere el sistema de la figura 19-12 con $G(\omega) = 8/j\omega(j\omega + 2)^2$ y la no linealidad de saturación del problema 19.17. En la figura 19-13 se presentan los diagramas polares de $G(\omega)$ y $-1/\bar{N}(A)$.

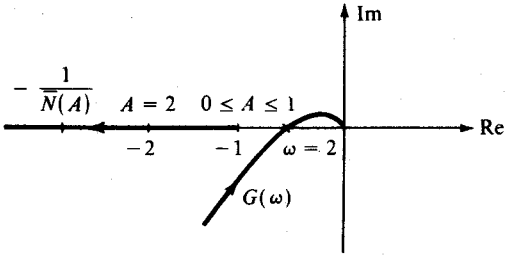


Figura 19-13

No hay valores de A y de ω para los cuales se corten las dos gráficas, indicando que el sistema es estable y no son posibles las oscilaciones sostenidas de amplitud constante. Sin embargo, si se incrementara la ganancia de la malla directa en un factor de 2, de 8 a 16, las gráficas se cortarían en $(-1, 0)$ para $\omega = 2$ y $0 < A < 1$, y serían posibles las oscilaciones sostenidas. De este modo un margen de ganancia aproximado de este sistema es 2 (6 dB).

Criterio de estabilidad de Popov

Este criterio se desarrolló para sistemas retroalimentados no lineales con un elemento no lineal sencillo en la malla, por ejemplo, como se muestra en la figura 19-12. Tales sistemas son estables si el elemento lineal G es estable, Re $G(\omega) > -1/K$, y el elemento no lineal $f(e)$ satisface las condiciones: $f(0) = 0$ y $0 < f(e)/e < K$ para $e \neq 0$. Nótese que este criterio no conlleva ninguna aproximación. El análisis de Nyquist es particularmente apropiado en esta aplicación.

EJEMPLO 19.19. En la figura 19-14 se presenta el diagrama polar del sistema de la figura 19.12, con $G = 1/(j\omega + 1)^3$. Para todo ω, Re $G \geq -1/4$. En consecuencia el sistema no lineal es estable si $K < 4$, $f(0) = 0$, y $0 < f(e)/e < K$ para $e \neq 0$.

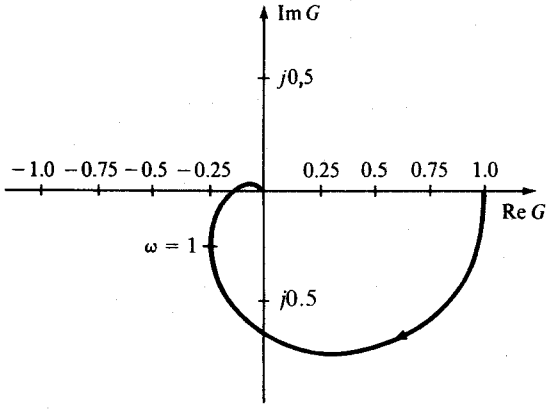


Figura 19-14

EJEMPLO 19.20. En el sistema no lineal de la figura 19-12, con una planta estable discreta en el tiempo $G = 1/z$,

$$G(e^{j\omega T}) = e^{-j\omega T} = \cos \omega T - j \operatorname{sen} \omega T$$

En la figura 19-15 se presenta el diagrama polar circular de G, y

$$\text{Re } G(e^{j\omega T}) > \frac{-1}{K} \quad \text{para} \quad K < 1$$

Así el sistema es estable si $f(0) = 0$ y $0 < f(e)/e < K < 1$ para $e \neq 0$.

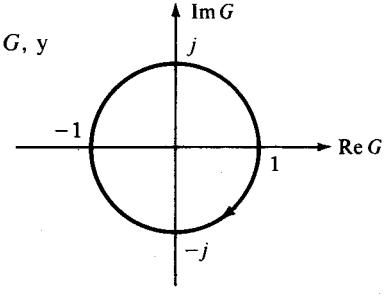


Figura 19-15

Problemas resueltos

Sistemas de control no lineales

19.1. En las definiciones 2.25 a 2.29 se presentaron varios tipos de *leyes de control* o de *algoritmos de control*. ¿Cuáles de ellos son no lineales y cuáles son lineales, desde el punto de vista de sus características de entrada-salida?

El controlador de encendido-apagado (binario) de la definición 2.25, claramente es no lineal, su salida es una función discontinua de su entrada. Los demás controladores, es decir, el proporcional (P), el derivativo (D), el integral (I) y los PD, PI, DI y PID que se dieron en las definiciones 2.26 a la 2.29, son todos lineales. Cada una de sus salidas está definida por operaciones lineales, o combinaciones lineales de operaciones lineales, en cada una de sus entradas.

19.2. ¿Por qué el sistema de calefacción controlado termostáticamente, descrito en el problema 2.16, es no lineal?

El controlador por termostato en este sistema es un dispositivo binario no lineal, con una histéresis característica de entrada-salida, como se describió en el problema 2.16. Este controlador regula la salida de la temperatura del recinto de este sistema de control de una manera oscilatoria entre los límites superior e inferior que encierran el ajuste de la temperatura deseada. Este tipo de comportamiento es característico de muchos sistemas de control no lineales.

Aproximaciones de sistemas linealizados y linealizados por tramos

19.3. La ecuación diferencial de cierto sistema físico está dada por

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + f(y) = 0$$

La función $f(y)$ es no lineal, pero puede aproximarse mediante la gráfica lineal por tramos que se ilustra en la figura 19-16. Determine una aproximación lineal por tramos para la ecuación diferencial del sistema no lineal.

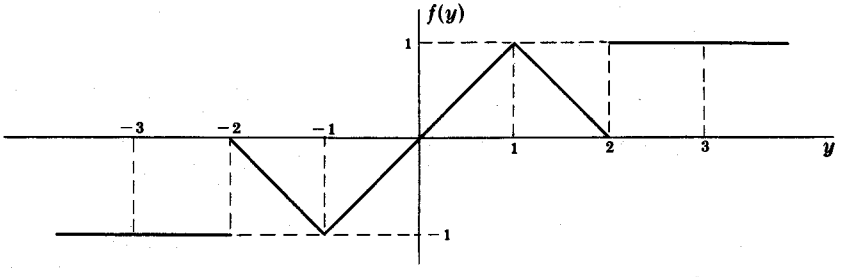


Figura 19-16

El sistema no lineal puede aproximarse mediante el siguiente conjunto de cinco ecuaciones lineales en los rangos indicados de y:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} - 1 = 0 \qquad y < -2$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} - y - 2 = 0 \qquad -2 \le y < -1$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \qquad -1 \le y \le 1$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} - y + 2 = 0 \qquad 1 < y \le 2$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 1 = 0 \qquad 2 < y$$

19.4. Una solución de la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y\cos y = u$$

con entrada $u = 0$, es $y = 0$. Linealice la ecuación diferencial alrededor de esta entrada y esta salida utilizando una expansión en serie de Taylor de la función $d^2y/dt^2 + y\cos y - u$ alrededor del punto $u = y = 0$.

La expansión en serie de Taylor de $\cos y$ alrededor de $y = 0$ es

$$\cos y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\left[\frac{d^k}{dy^k}(\cos y)\bigg|_{y=0}\right] = 1 - \frac{1}{2!}y^2 + \cdots$$

En consecuencia $$\frac{d^2y}{dt^2} + y\cos y - u = \frac{d^2y}{dt^2} + y\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \cdots\right) - u$$

Al conservar sólo los términos de primer orden, la ecuación linealizada es $d^2y/dt^2 + y = u$. Esta ecuación sólo es válida para desviaciones pequeñas (perturbaciones) alrededor del punto de operación $u = y = 0$.

19.5. Escriba las ecuaciones de perturbación determinadas en el ejemplo 19.9 en la forma de vectores y matrices. ¿Por qué son lineales? ¿Bajo qué condiciones serían invariables en el tiempo?

$$\frac{d(\Delta\mathbf{x})}{dt} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{d(\Delta x_1)}{dt} \\ \dfrac{d(\Delta x_2)}{dt} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} -2c_2\bar{x}_1(t) & c_1\bar{u}(t) \\ \dfrac{c_3c_4}{[c_4 + \bar{x}_1(t)]^2} & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x} + \begin{bmatrix} c_1\bar{x}_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y \cong \begin{bmatrix} 2c_5\bar{x}_1(t) & 0 \end{bmatrix} \Delta\mathbf{x}$$

Estas ecuaciones son lineales porque las matrices que previamente multiplican a $\Delta\mathbf{x}$ y Δu son independientes de $\Delta\mathbf{x}$ y de $\Delta\mathbf{u}$. Serían invariables en el tiempo si los parámetros $c_1, c_2, \ldots, c_5$ fueran constantes y el "punto de operación" del sistema, para $u = \bar{u}(t)$ y $x = \bar{x}(t)$, también fueran constantes. Este sería el caso si $\bar{u}$ = constante.

19.6. Deduzca las ecuaciones linealizadas (*19.13*) y (*19.14*) en el sistema diferencial no lineal dado por (*19.11*) y (*19.12*).

Consideramos los cambios $\Delta\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}$ como resultado de los cambios $\Delta\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}$, cada uno de ellos alrededor de los puntos de operación $\bar{\mathbf{x}}$ y $\bar{\mathbf{u}}$, respectivamente, es decir,

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\mathbf{x}}(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \bar{\mathbf{u}}(t) + \Delta\mathbf{u}(t)$$

En estas ecuaciones, t se considera un parámetro, que se mantiene constante en la derivación. Luego suprimimos t por conveniencia. La sustitución de $\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}$ por $\mathbf{x}$ y de $\bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u}$ por $\mathbf{u}$ en (*19.11*) produce

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{dt} + \frac{d(\Delta\mathbf{x})}{dt} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u})$$

Ahora expandimos esta ecuación en una serie de Taylor alrededor de $\{\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}\}$, reteniendo sólo los términos de primer orden:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{d(\Delta\mathbf{x})}{dt} \cong \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left.\frac{d\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)\\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(t)}} \Delta\mathbf{x} + \left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}(t)\\ \mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}(t)}} \Delta\mathbf{u}$$

Entonces, puesto que $d\bar{\mathbf{x}}/dt = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$, la ecuación (*19.11*) se obtiene inmediatamente después de restar estos términos correspondientes de ambos lados de las ecuaciones anteriores. De manera similar, para

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \Delta\mathbf{y} = \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) \cong \mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) + \left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{x=\mathbf{x}} \Delta\mathbf{x} = \bar{\mathbf{y}} + \left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \Delta\mathbf{x}$$

Restando $\bar{\mathbf{y}}$ a ambos lados de la ecuación finalmente se produce

$$\Delta\mathbf{y} \cong \left.\frac{\partial\mathbf{g}}{\partial\mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} \Delta\mathbf{x}$$

19.7. Las ecuaciones que describen el movimiento de un satélite terrestre en el plano de la órbita son

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0 \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k^2}{pr^2}$$

(Para más detalles *véanse* el problema 3.3 y el ejemplo 19.2). Un satélite está en una órbita casi circular determinada por r y $d\theta/dt \equiv \omega$. Una órbita exactamente circular se define mediante

$$r = r_0 = \text{constante} \qquad \omega = \omega_0 = \text{constante}$$

Puesto que $dr_0/dt = 0$ y $d\omega_0/dt = 0$, se elimina la primera ecuación diferencial para una órbita circular. La segunda ecuación se reduce a $r_0\omega_0^2 = k^2/pr_0^2$. Encuentre un conjunto de ecuaciones lineales que describa de manera aproximada las diferencias

$$\delta r \equiv r - r_0 \qquad \delta\omega \equiv \omega - \omega_0$$

En las ecuaciones del movimiento hacemos las sustituciones

$$r = r_0 + \delta r \qquad \omega = \omega_0 + \delta\omega$$

y obtenemos las ecuaciones

$$(r_0 + \delta r)\frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} + 2\frac{d(r_0 + \delta r)}{dt}(\omega_0 + \delta\omega) = 0$$

$$\frac{d^2(r_0 + \delta r)}{dt^2} - (r_0 + \delta r)(\omega_0 + \delta\omega)^2 = -\frac{k}{p(r_0 + \delta r)^2}$$

Hacemos notar que

$$\frac{d(r_0 + \delta r)}{dt} = \frac{d(\delta r)}{dt} \qquad \frac{d^2(r_0 + \delta r)}{dt^2} = \frac{d^2(\delta r)}{dt^2} \qquad \frac{d(\omega_0 + \delta\omega)}{dt} = \frac{d(\delta\omega)}{dt}$$

puesto que r_0 y ω_0 son constantes. La primera ecuación diferencial se convierte en

$$r_0\frac{d(\delta\omega)}{dt} + (\delta r)\frac{d(\delta\omega)}{dt} + 2\omega_0\frac{d(\delta r)}{dt} + 2\frac{d(\delta r)}{dt}\delta\omega = 0$$

Puesto que las diferencias δr, $\delta\omega$ y sus derivadas son pequeñas, los términos de segundo orden $(\delta r)(d(\delta\omega)/dt)$ y $2(d(\delta r)/dt)\delta\omega$ pueden suponerse insignificantes y eliminarse. La ecuación lineal resultante es

$$r_0\frac{d(\delta\omega)}{dt} + 2\omega_0\frac{d(\delta r)}{dt} = 0$$

la cual es una de las dos ecuaciones deseadas. La segunda ecuación diferencial puede escribirse de nuevo como

$$\frac{d^2(\delta r)}{dt^2} - r_0\omega_0^2 - 2r_0\omega_0\delta\omega - r_0(\delta\omega)^2 - \omega_0^2\delta r - 2\omega_0(\delta r)(\delta\omega) - (\delta\omega)^2\delta r$$

$$= -\frac{k}{pr_0^2} - \frac{2k\delta r}{r_0^3} + \text{términos de orden superior en } \delta r \text{ y } \delta\omega$$

en donde el lado derecho de la ecuación es la expansión en serie de Taylor de $-k\,pr^2$ alrededor de r_0. Todos los términos en δr y $\delta\omega$ de orden 2 o mayor que 2 de nuevo pueden suponerse insignificantes y eliminarse, dejando la ecuación lineal

$$\frac{d^2(\delta r)}{dt^2} - r_0\omega_0^2 - 2r_0\omega_0\delta\omega - \omega_0^2\delta\omega - \omega_0^2\delta r = -\frac{k}{pr_0^2} - \frac{2k\delta r}{pr_0^3}$$

En el enunciado del problema vemos que $r_0\omega_0^2 \doteq k/pr_0^2$. Por tanto la ecuación final es

$$\frac{d^2(\delta r)}{dt^2} - 2r_0\omega_0\delta\omega - \omega_0^2\delta r = -\frac{2k\delta r}{pr_0^3}$$

que es la segunda de las ecuaciones linealizadas deseadas.

Métodos del plano de fase

19.8. Demuestre que la ecuación $d^2x/dt^2 = f(x, dx/dt)$ puede describirse de modo equivalente mediante un par de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definimos un nuevo conjunto de variables: $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv dx_1/dt = dx/dt$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f\left(x_1, \frac{dx_1}{dt}\right) = f(x_1, x_2)$$

En consecuencia las dos ecuaciones deseadas son

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = f(x_1, x_2)$$

19.9. Demuestre que la trayectoria del plano de fase de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $(dx/dt)|_{t=0} = 1$ es un círculo de radio unitario centrado en el origen.

Haciendo $x \equiv x_1$ y $x_2 \equiv dx_1/dt$, obtenemos el par de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad x_1(0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_1 \qquad x_2(0) = 1$$

Eliminamos el tiempo como variable independiente al escribir

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_1} \quad \text{o} \quad x_1\,dx_1 + x_2\,dx_2 = 0$$

Al integrar esta ecuación para las condiciones iniciales dadas, obtenemos

$$\int_0^{x_1} x_1'\,dx_1' + \int_1^{x_2} x_2'\,dx_2' = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2 - \tfrac{1}{2} = 0 \quad \text{o} \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$$

que es la ecuación de un círculo de radio unitario centrada en el origen.

19.10. Determine la ecuación de la trayectoria del plano de fase de la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0$$

con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $(dx/dt)|_{t=0} = 1$.

Con $x_1 \equiv x$ y $x_2 \equiv dx_1/dt$ obtenemos el par de ecuaciones de primer orden

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \qquad x_1(0) = 0$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 \qquad x_2(0) = 1$$

Eliminamos el tiempo como variable independiente al escribir

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{x_2}{x_2} = -1 \qquad \text{o} \qquad dx_1 + dx_2 = 0$$

Entonces

$$\int_0^{x_1} dx_1' + \int_1^{x_2} dx_2' = x_1 + x_2 - 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad x_1 + x_2 = 1$$

que es la ecuación de una línea recta, como se muestra en la figura 19-17. La dirección del movimiento en el plano de fase se indica por la flecha y se determina al tener en cuenta que, inicialmente, $x_2(0) = 1$; por tanto $dx_1/dt > 0$ y x_1 aumenta y $dx_2/dt < 0$ y x_2 disminuye. La trayectoria termina en el punto $(x_1, x_2) = (1, 0)$, en donde $dx_1/dt = dx_2/dt = 0$, aun termina el movimiento.

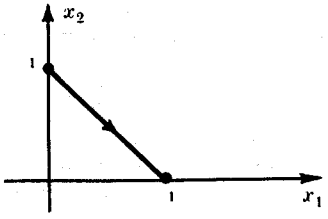


Figura 19-17

19.11. Diseñe un controlador de encendido-apagado (*on-off*) para el sistema dado por la ecuación (*19.19*) y la figura 19-7, con $a = 0$.

Para $a = 0$ en la ecuación (*19.19*), la ecuación (*19.23*) se convierte en

$$dx_1 = \frac{x_2 dx_2}{u}$$

La curva de conmutación se genera al integrar esta ecuación en el segundo cuadrante con $u = +1$ y terminar en el origen, lo cual produce

$$x_1(t) = -\frac{x_2^2(t)}{2} \qquad \text{ó} \qquad e = -\frac{\dot{e}^2}{2}$$

y al integrar en el cuarto cuadrante con $u = -1$ y terminar en el origen, se produce

$$x_1(t) = \frac{x_2^2(t)}{2} \qquad \text{ó} \qquad e = \frac{\dot{e}^2}{2}$$

En la figura 19-18 se presenta la curva de conmutación. En la tabla 19.2 se presenta la lógica de conmutación de este controlador de encendido-apagado.

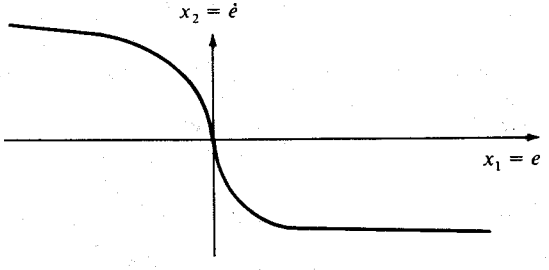


Figura 19-18

Tabla 19.2

$\dot{e} > 0$	$e + \dot{e}^2/2 > 0$	$e - \dot{e}^2/2 > 0$	u
No	No	No	-1
No	No	Sí	$+1$
No	Sí	No	-1
No	Sí	Sí	$+1$
Sí	No	No	-1
Sí	No	Sí	-1
Sí	Sí	No	$+1$
Sí	Sí	Sí	$+1$

Criterio de estabilidad de Lyapunov

19.12. Encuentre los puntos singulares para el par de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = \operatorname{sen} x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2$$

Los puntos singulares se encuentran al hacer sen $x_2 = 0$ y $x_1 + x_2 = 0$. La primera ecuación se satisface cuando $x_2 = \pm n\pi$, $n = 0,1,2,\ldots$ La segunda se satisface cuando $x_1 = -x_2$. Por tanto los puntos singulares se definen mediante

$$x_1 = \mp n\pi, x_2 = \pm n\pi \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

19.13. El origen es un punto singular para el par de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = cx_1 + dx_2$$

Utilizando la teoría de Lyapunov, encuentre las condiciones suficientes en a, b, c y d tales que el origen sea asintóticamente estable.

Escogemos una función

$$V = x_1^2 + x_2^2$$

la cual es positiva para todo x_1, x_2, excepto $x_1 = x_2 = 0$. La derivada de V con respecto al tiempo es

$$\frac{dV}{dt} = 2x_1\frac{dx_1}{dt} + 2x_2\frac{dx_2}{dt} = 2ax_1^2 + 2bx_1x_2 + 2cx_1x_2 + 2dx_2^2$$

Para hacer dV/dt negativa para todo x_1, x_2, podríamos escoger $a < 0$, $d < 0$ y $b = -c$. En este caso,

$$\frac{dV}{dt} = 2ax_1^2 + 2dx_2^2 < 0$$

excepto cuando $x_1 = x_2 = 0$. De donde se concluye que un conjunto suficiente de condiciones para la estabilidad asintótica es $a < 0$, $d < 0$ y $b = -c$. Hay otras soluciones posibles a este problema.

19.14. Determine las condiciones suficientes para la estabilidad del origen del sistema discreto no lineal descrito por

$$x_1(k+1) = x_1(k) - f[x_1(k)]$$

Hagamos $V[x(k)] = [x_1(k)]^2$, que es mayor que 0 para todo $x \neq 0$. Entonces

$$\Delta V = x_1^2(k+1) - x_1^2(k) = \big(x_1(k) - f[x_1(k)]\big)^2 - x_1^2(k)$$
$$= -x_1(k) f[x_1(k)]\left(2 - \frac{f[x_1(k)]}{x_1}\right)$$

Por tanto las condiciones suficientes para que $\Delta V \leq 0$ y de esta manera la estabilidad del sistema son

$$x_1 f(x_1) \geq 0$$
$$\frac{f(x_1)}{x_1} \leq 2 \quad \text{para todo } x_1$$

19.15. Determine las condiciones suficientes para la estabilidad del sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}f(x_1) \quad \text{en donde } A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Hagamos $V = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$ y $P = \begin{bmatrix} a & c \\ c & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\dot{V} = \mathbf{x}^T(PA + A^T P)\mathbf{x} + \mathbf{x}^T P\mathbf{b}f(x_1) + f(x_1)\mathbf{b}^T P\mathbf{x}$$
$$= \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} -4a & -a-4c \\ -a-4c & -2c-4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + 2(a+2c)x_1 f(x_1) + 2(c+2)x_2 f(x_1)$$

Para eliminar los términos del producto cruz $x_2 f(x_1)$, hacemos $c = -2$. Entonces

$$\dot{V} = -\mathbf{x}^T Q\mathbf{x} + 2(a-4)x_1 f(x_1)$$

En donde $Q \equiv \begin{bmatrix} 4a & a-8 \\ a-8 & 0 \end{bmatrix}$. Para $Q \geq 0$, $a = 8$. La $\dot{V}$ resultante es

$$\dot{V} = -32x_1^2 + 8x_1 f(x_1) = -8x_1^2\left(4 - \frac{f(x_1)}{x_1}\right)$$

Entonces $\dot{V} \leq 0$ y el sistema es estable si $f(x_1)/x_1 \leq 4$ para todo $x_1 \neq 0$.

19.16. Determine las condiciones suficientes para la estabilidad del sistema discreto en el tiempo no lineal

$$\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}f[x_1(k)]$$

en donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Hagamos $V = \mathbf{x}^T P\mathbf{x}$, en donde $P = \begin{bmatrix} a & c \\ c & 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\Delta V = V[\mathbf{x}(k+1)] - V[\mathbf{x}(k)] = \mathbf{x}(k+1)^T P\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{x}(k)^T P\mathbf{x}(k)$$
$$= \big[f[x_1(k)]\mathbf{b}^T + \mathbf{x}(k)^T A^T\big] P\big[A\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}f[x_1(k)]\big] - \mathbf{x}(k)^T P\mathbf{x}(k)$$
$$= \mathbf{x}^T(A^T PA - P)\mathbf{x} + f(x_1)\mathbf{b}^T P\mathbf{b}f(x_1) + f(x_1)\mathbf{b}^T PA\mathbf{x} + \mathbf{x}^T A^T P\mathbf{b}f(x_1)$$

en donde

$$A^TPA - P = \begin{bmatrix} 0 & a-2c \\ a-2c & a-2c \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b}^TPA = [\,-c \quad 1-c\,]$$

Ahora, para $A^TPA - P \leq 0$, hacemos $a = 2c$ y, para eliminar el término del producto cruz $x_2 f(x_1)$, hacemos $c = 1$. Entonces $A^TPA - P = 0$ y

$$\Delta V = [f(x_1)]^2 - 2x_1 f(x_1) = -x_1 f(x_1)\left(2 - \frac{f(x_1)}{x_1}\right)$$

Entonces las condiciones suficientes para que $\Delta V \leq 0$ y de esta manera la estabilidad en el origen son

$$x_1 f(x_1) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{f(x_1)}{x_1} \leq 2 \quad \text{para todo} \quad x_1.$$

Métodos de respuesta de frecuencia

19.17. Demuestre que la función descriptora del elemento de saturación lineal por tramos en el ejemplo 19.1 está dada por

$$\frac{B_1}{A} e^{j\phi_1} = \frac{2}{\pi}\left[\text{sen}^{-1}\frac{1}{A} + \frac{1}{A}\cos \text{sen}^{-1}\frac{1}{A}\right]$$

A partir de la figura 19-1*b*), vemos que, cuando la magnitud de la entrada es menor que 1.0, la salida se iguala a la entrada. Cuando la entrada excede a 1.0, entonces la salida se iguala a 1.0. Utilizando la notación del ejemplo 19.1, si

$$e(t) = A \,\text{sen}\,\omega t \qquad A > 1$$

entonces $f(t)$ es como se muestra en la figura 19-19 y puede escribirse como

$$f(t) = \begin{cases} A \,\text{sen}\,\omega t & \begin{cases} 0 \leq t \leq t_1 \\ t_2 \leq t \leq t_3 \\ t_4 \leq t \leq 2\pi/\omega \end{cases} \\ 1 & t_1 \leq t \leq t_2 \\ -1 & t_3 \leq t \leq t_4 \end{cases}$$

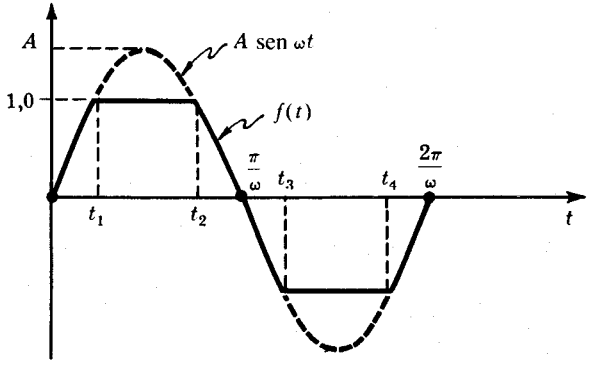


Figura 19-19

El tiempo t_1 se obtiene al tener en cuenta que

$$A \operatorname{sen} \omega t_1 = 1 \qquad \text{or} \qquad t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A}$$

De manera similar,

$$t_2 = \frac{\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A} \qquad t_3 = \frac{\pi}{\omega} + \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A} \qquad t_4 = \frac{2\pi}{\omega} - \frac{1}{\omega} \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A}$$

La magnitud de B_1 y el ángulo de fase ϕ_1 de la función descriptora se determinan a partir de la expresión del primer coeficiente de Fourier:

$$B_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} f(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

Puesto que $f(t)$ es una función impar, el ángulo de fase ϕ_1 es cero. La integral que define B_1 puede escribirse de nuevo como

$$B_1 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{t_1} A \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt + \frac{\omega}{\pi} \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen} \omega t \, dt$$
$$+ \frac{\omega}{\pi} \int_{t_2}^{t_3} A \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt - \frac{\omega}{\pi} \int_{t_3}^{t_4} \operatorname{sen} \omega t \, dt + \frac{\omega}{\pi} \int_{t_4}^{2\pi/\omega} A \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt$$

Pero

$$\int_0^{t_1} A \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt = \int_{t_4}^{2\pi/\omega} A \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \int_{t_2}^{t_3} A \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt$$

y

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen} \omega t \, dt = - \int_{t_3}^{t_4} \operatorname{sen} \omega t \, dt = 2 \int_{t_1}^{\pi/2\omega} \operatorname{sen} \omega t \, dt$$

Podemos escribir B_1 como

$$B_1 = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{t_1} A \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt + \frac{4\omega}{\pi} \int_{t_1}^{\pi/2\omega} \operatorname{sen} \omega t \, dt = \frac{2}{\pi} \left[A \omega t_1 - \frac{A}{2} \operatorname{sen} 2\omega t_1 + 2 \cos \omega t_1 \right]$$

Al sustituir $t_1 = (1/\omega)\operatorname{sen}^{-1}(1/A)$ y simplificar, obtenemos

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \left[A \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A} + \cos \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A} \right]$$

Finalmente, la función descriptora es

$$\frac{B_1}{A} = \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \cos \operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{A} \right]$$

19.18. Determine la amplitud A y la frecuencia ω para las cuales podrían mantenerse las oscilaciones en el sistema del ejemplo 19.18, aumentando la ganancia de la malla directa desde 8 hasta 32.

En la figura 19-20 se presentan los diagramas polares de

$$G(\omega) = \frac{32}{j\omega(j\omega + 2)^2}$$

y de $-1/\bar{N}(A)$. Los dos lugares se cortan en $A = 2.5$ y $\omega = 2$, que son las condiciones de oscilación.

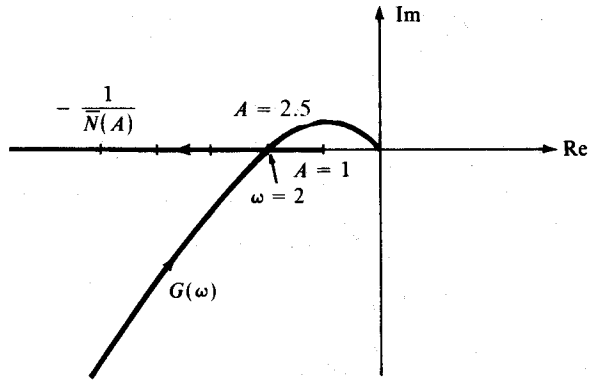


Figura 19-20

19.19. Determine la amplitud y la frecuencia de las posibles oscilaciones del sistema de la figura 19-12, con $f(e) = e^3$ y

$$G(\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^3}$$

A partir del ejemplo 19.17, la función descriptora de esta no linealidad es

$$\bar{N}(A) = \frac{3A^2}{4} \qquad \text{y} \qquad -\frac{1}{\bar{N}} = -\frac{4}{3A^2}$$

De los diagramas polares que se presentan en la figura 19-21, $G(\omega)$ y $-1/\bar{N}$ se cortan en $\omega = 1.732$ y $A = 3.27$, las cuales son las condiciones de oscilación.

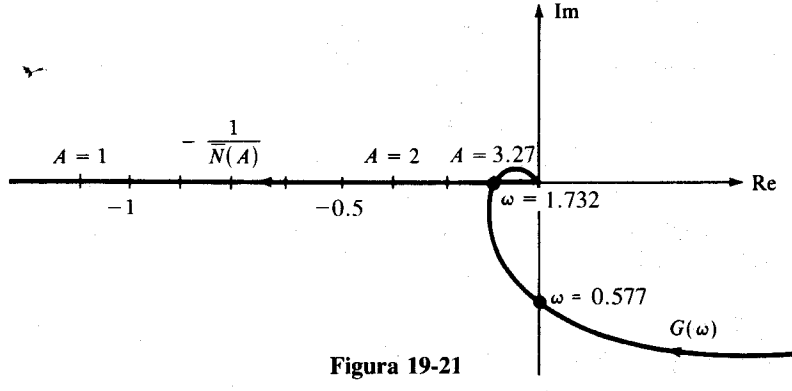


Figura 19-21

19.20. Determine la amplitud y la frecuencia de las posibles oscilaciones del sistema de la figura 19-12, con la no linealidad de histéresis que se muestra en la figura 19-22, y $G(\omega) = 2/j\omega(j\omega + 1)$.

El diagrama de bloques del sistema puede manipularse como se muestra en la figura 19-23, de tal modo que el elemento de histéresis se normalice, con una zona muerta de 1 y una pendiente de 1. La figura 19-11 puede utilizarse para construir el diagrama polar de $-1/\overline{N}$, el cual se muestra en la figura 19-24 con el diagrama polar de $2G(\omega)$, en lugar de $G(\omega)$, porque la función de transferencia de la malla que excluye la no linealidad es $4G(\omega)/2 = 2G(\omega)$.

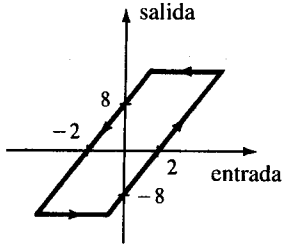


Figura 19-22

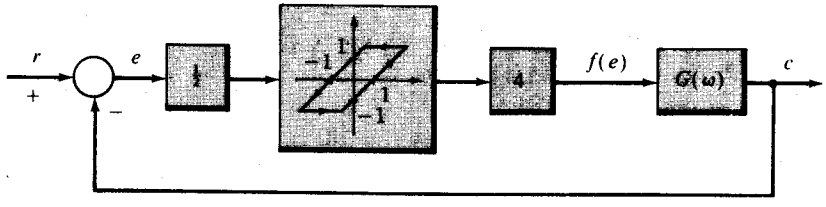


Figura 19-23

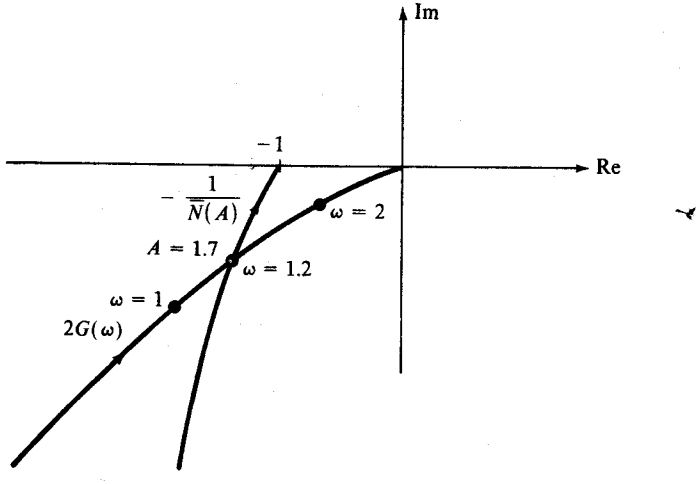


Figura 19-24

Las dos curvas se cortan en $\omega = 1.2$ rad/s y $A = 1.7$, que son las condiciones de oscilación del sistema. Nótese que A es la amplitud de la entrada a la no linealidad normalizada. Por tanto, en términos de e, la amplitud para las oscilaciones es 3.4.

Problemas suplementarios

19.21. Determine la trayectoria del plano de fase de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

19.22. Utilizando la teoría de Lyapunov, encuentre las condiciones suficientes en a_1 y a_0 que garanticen que el punto $x = 0$, $dx/dt = 0$ sea estable para la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0$$

Capítulo 20

Introducción a temas avanzados en análisis y diseño de sistemas de control

20.1 Introducción

Este capítulo final es una introducción a temas avanzados en la ciencia de los sistemas de control. Cada tema se trata aquí sólo de manera breve para familiarizar al lector con la terminología y el nivel matemático de metodologías avanzadas. También se espera que produzca cierta motivación para estudios avanzados. Las técnicas de variables de estado en el dominio del tiempo, que presentadas en los Capítulos 3 y 4 y utilizadas de manera extensa en el Capítulo 19, predominan en los desarrollos metodológicos avanzados, principalmente porque proporcionan la base para resolver muchas clases de problemas de sistemas de control, inclusive problemas mucho más complejos de los que pueden tratarse con los métodos del dominio de la frecuencia.

20.2 Controlabilidad y observabilidad

Gran parte de la teoría moderna de control se desarrolla en el dominio del tiempo, en lugar del dominio de la frecuencia, y al modelo básico de la *planta* (proceso controlado) lineal e invariable en el tiempo se le da típicamente una descripción de *variables de estado* (Capítulo 3), la ecuación (*3.25b*): $d\mathbf{x}(t)/dt = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)$ para plantas de sistemas continuos, o la ecuación (*3.36*): $\mathbf{x}(k + 1) = A_{\mathbf{x}}(k) + B_{\mathbf{u}}(k)$ para plantas de sistemas discretos. Para cualquier tipo de modelo, la ecuación de salida puede escribirse como $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$, en la cual $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ o $\mathbf{y}(k)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ o $\mathbf{x}(k)$, y C es una matriz de dimensión compatible. De paso mencionamos que esta forma de modelo básico a menudo se usa para representar sistemas lineales que *varían con el tiempo*, con los elementos que varían en el tiempo en las matrices A, B o C, y (menos frecuente) *sistemas no lineales*, en los que A, B o C contienen elementos que son funciones del vector de estados $\mathbf{x}$.

El concepto de *controlabilidad* formula la pregunta de si es posible *controlar* o *guiar* el vector de estados $\mathbf{x}$ desde la entrada $\mathbf{u}$. De manera específica, ¿existe una entrada $\mathbf{u}$ físicamente factible que pueda aplicarse a la planta durante un periodo finito de tiempo y que guíe el vector de estados $\mathbf{x}$ completo (todos y cada uno de los n componentes de $\mathbf{x}$) desde cualquier punto $\mathbf{x}_0$ en el *espacio de estados* a cualquier otro punto $\mathbf{x}_1$? Si la respuesta es sí, la planta es **controlable**: si es no, es **incontrolable**.

El concepto de *observabilidad* es complementario al de controlabilidad. Este formula la pregunta de si es posible determinar todos los n componentes del vector de estados $\mathbf{x}$ mediante la medida de la salida $\mathbf{y}$ durante un periodo finito de tiempo. Si la respuesta es sí, el sistema es **observable**; si es no, es **inobservable**. Obviamente, si $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, es decir, si se miden todas las variables de estado, el sistema es observable. Sin embargo, si $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ y C no es una matriz cuadrada, la planta aún puede ser observable.

Las propiedades de controlabilidad y observabilidad de la planta tienen importantes consecuencias prácticas en el análisis y, aún más importantes, en el diseño de sistemas de control retroalimentados modernos. Intuitivamente, las plantas incontrolables no pueden guiarse de manera arbitraria; y es imposible conocer todas las variables de estado de las plantas inobservables. Estos problemas están claramente relacionados porque juntos significan que los estados (o varia-

bles de estado) inobservables no pueden controlarse de manera individual si se requiere que la variable de control **u** sea una función de **x**, esto es, si se necesita un control *retroalimentado*.

Los modelos de plantas lineales invariables en el tiempo, en forma de variables de estado [ecuaciones (*3.25b*) o (*3.36*)] son **controlables** si y sólo si la siguiente **matriz de controlabilidad** tiene rango n (n columnas linealmente independientes), en donde n es el número de variables de estado en el vector de estados **x**:

$$[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \tag{20.1}$$

De modo similar, el modelo de planta es **observable** si y sólo si la siguiente **matriz de la observabilidad** tiene rango n (n filas linealmente independientes):

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \tag{20.2}$$

EJEMPLO 20.1. Considere el siguiente modelo de planta de entrada sencilla salida sencilla (ESSS) con $\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ y cada uno de los a_{11}, a_{12}, a_{22} diferentes de cero:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y = C\mathbf{x} = [1 \quad 0]\mathbf{x}$$

Para probar si este sistema es controlable, primero evaluamos la matriz dada por la ecuación (*20.1*):

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & a_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mediante la definición 3.11, las dos columnas $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$ serían linealmente independientes si las únicas constantes α y β para las cuales

$$\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} a_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

fueran $\alpha \equiv \beta \equiv 0$. Claramente este *no* es el caso, porque $\alpha = 1$ y $\beta = -1/a_{11}$ satisfacen esta ecuación. Por tanto las dos columnas de $[B \quad AB]$ son linealmente *dependientes*, el rango de $[B \quad AB] = 1 \neq 2 = n$, y esta planta entonces es *incontrolable*.

De modo similar, a partir de la ecuación (*20.2*),

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$$

Para esta matriz, los únicos α y β para los cuales $\alpha[1 \quad 0] + \beta[a_{11} \quad a_{12}] = [0 \quad 0]$ son $\alpha \equiv \beta \neq 0$, porque $a_{12} \neq 0$. En consecuencia el rango de $\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$ es $n = 2$, y la planta es *observable*.

20.3 Diseño en el dominio del tiempo de sistemas con retroalimentación (retroalimentación de estados)

El diseño de muchos sistemas de control retroalimentados puede lograrse al utilizar representaciones en el dominio del tiempo y los conceptos de controlabilidad y observabilidad tratados antes. Como se anotó en capítulos anteriores, particularmente en el Capítulo 14, Diseño utilizando el análisis del lugar de las raíces, el diseño de sistemas de control lineales a menudo se efectúa al manipular las localizaciones de los polos de la función de transferencia en malla cerrada (las raíces de la ecuación característica), utilizando compensadores apropiados en la trayectoria de alimentación directa o en la de retroalimentación con el fin de cumplir con las especificaciones de desempeño. Este acercamiento es satisfactorio en muchas circunstancias, pero tiene ciertas limitaciones que pueden salvarse utilizando una filosofía de diseño diferente, llamado diseño con *retroalimentación de estados*, el cual permite la colocación *arbitraria* de polos y, en consecuencia, suministra de manera sustancial más flexibilidad en el diseño.

La idea básica que rige el diseño de sistemas de control con retroalimentación de estados es como sigue para plantas continuas de entrada sencilla $d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x} + Bu$. El procedimiento es el mismo para sistemas discretos en el tiempo.

Con referencia a la figura 2-1, buscamos un control con retroalimentación de estados:

$$u = -G\mathbf{x} + r \tag{20.3}$$

en donde G es una matriz de retroalimentación $1 \times n$ de ganancias constantes (que va a diseñarse) y r es la entrada de referencia. Al combinar estas ecuaciones, el sistema en malla cerrada resulta

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = (A - BG)\mathbf{x} + Br \tag{20.4}$$

Si la planta es *controlable* la matriz G existe y puede producir cualquier conjunto (arbitrario) de raíces deseadas para la ecuación característica de este sistema en malla cerrada, representado por $|\lambda I - A + BG| = 0$, en donde las λ soluciones de este determinante son las raíces de la ecuación. Este es el resultado básico.

EJEMPLO 20.2. En la figura 20-1 se presenta un diagrama de bloques del sistema con retroalimentación de estados definido en las ecuaciones (*20.3*) y (*20.4*).

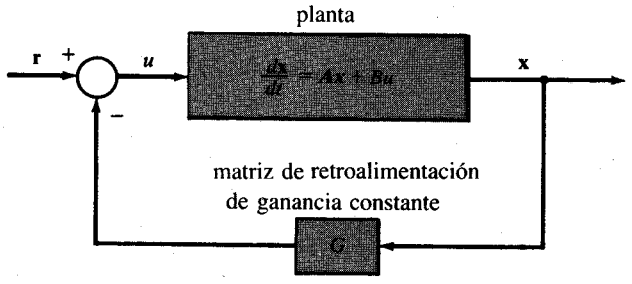


Figura 20-1

Para implementar un diseño con retroalimentación de estados, de alguna manera debe disponerse de todo el vector de estados $\mathbf{x}$ como $\mathbf{x}$ exactamente o como alguna aproximación adecuada, representada como $\hat{\mathbf{x}}$. Si la salida es $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, como se muestra en la figura 20-1, obviamente no hay problema. Pero, si no todos los estados están disponibles como salidas, lo que es más común, entonces se necesita la *observabilidad* de las ecuaciones diferenciales y de las ecuaciones de salida del modelo de la planta ($d\mathbf{x}/dt = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$ y $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$) para obtener el estado *estimado* necesario u *observador* $\hat{\mathbf{x}}$. Las ecuaciones de un sistema observador de estados típico son

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = (A - LC)\hat{\mathbf{x}} + L\mathbf{y} + B\mathbf{u} \tag{20.5}$$

en donde A, B y C son las matrices de los sistemas de medida de la planta y de la salida, y L es una *matriz de diseño del observador* que se determina para un problema particular.

EJEMPLO 20.3. En la figura 20-2 se presenta un diagrama de bloques detallado del sistema observador de estados definido por la ecuación (*20.5*), junto con el diagrama de bloques de la planta y el sistema de medida (parte superior) para generar las señales de entrada necesarias del sistema observador (parte inferior).

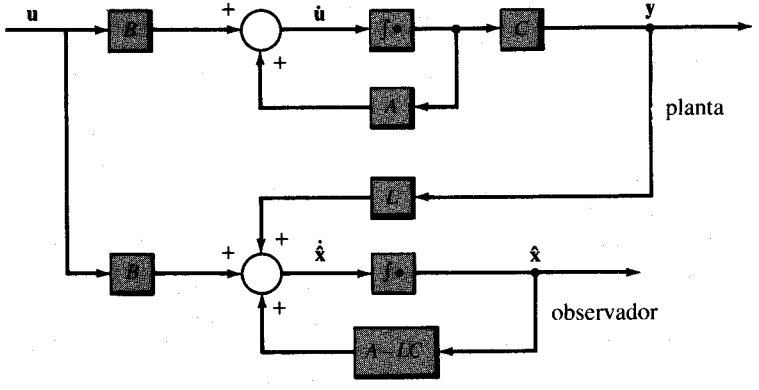


Figura 20-2

EJEMPLO 20.4. Bajo condiciones apropiadas, las cuales incluyen controlabilidad y observabilidad de la planta que se va a controlar, se aplica un *principio de separación* y la parte de retroalimentación de estados (matriz G) y la parte observadora (matriz L) de un sistema de control con retroalimentación de estados (con $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$) pueden diseñarse independientemente. La figura 20-3 presenta un diagrama de bloques de los sistemas combinados.

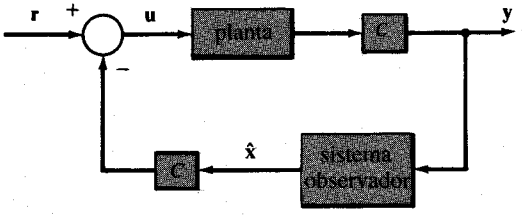


Figura 20-3

Hemos omitido muchos detalles en este material introductorio y a menudo los sistemas de control con retroalimentación de estados son más complejos que lo descrito antes.

20.4 Sistemas de control con entradas aleatorias

Los estímulos del sistema a menudo presentan componentes aleatorios o de cualquier forma "desconocidos". Esto significa que las funciones de entrada algunas veces pueden definirse más apropiadamente de manera probabilística que determinística. Tales excitaciones se llaman **procesos aleatorios**. Las perturbaciones n del sistema (definición 2.21), estudiadas en varios capítulos anteriores, algunas veces se representan mediante modelos de procesos aleatorios en la teoría y en la práctica de controles modernos.

Un proceso aleatorio puede considerarse como una función de dos variables, t y η, en donde t representa el tiempo y η un *evento aleatorio*. El valor de η se determina al azar.

EJEMPLO 20.5. Un proceso aleatorio particular se designa como $\mathbf{x}(t,\eta)$. El evento aleatorio η es el resultado de lanzar al aire una moneda no cargada; las caras y los sellos aparecen con igual probabilidad. Definimos

$$x(t,\eta) \equiv \begin{cases} \text{una función paso unitario si } \eta = \text{cara} \\ \text{una función rampa unitaria si } \eta = \text{sello} \end{cases}$$

De este modo $x(t,\eta)$ consta de dos funciones simples, pero es un proceso aleatorio porque el azar decide qué función ocurre.

En la práctica, los procesos aleatorios constan de una infinidad de funciones de tiempo posibles, llamadas *realizaciones*, y a menudo no podemos describirlas tan explícitamente como la del ejemplo 20.5. En lugar de ello, debemos describirlas en un sentido estadístico, mediante promedios sobre todas las funciones de tiempo posibles. Los criterios de desempeño estudiados antes se han relacionado todos con entradas específicas (por ejemplo, K_p se define para una entrada paso unitario, M_p y ϕ_{MF}, para ondas sinusoidales). Pero la satisfacción de las especificaciones de desempeño definidas para una señal de entrada, no necesariamente garantiza la satisfacción de las otras. En consecuencia, para una entrada aleatoria, no puede diseñarse para una señal *particular*, tal como una función paso, sino para el promedio estadístico de señales de entrada aleatorias.

EJEMPLO 20.6. El sistema con retroalimentación unitaria de la figura 20-4 se excita mediante una entrada de proceso aleatorio r que tiene infinitas posibilidades. Queremos determinar la compensación de tal manera que el error e no sea excesivo. Hay posibilidades infinitas para r y, por tanto, también para e. En consecuencia no podemos pedir que cada error posible satisfaga los criterios de desempeño dados, sino que el promedio de errores sea pequeño. Por ejemplo, podríamos esperar que G_1 sea escogida del conjunto de todos los sistemas causales, tal que, a medida que el tiempo tiende a infinito, el promedio estadístico de $e^2(t)$ no exceda alguna constante o sea mínimo.

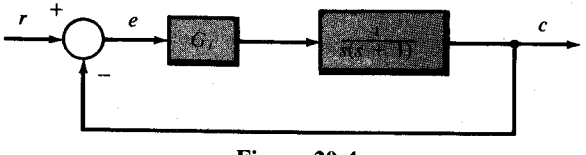


Figura 20-4

El estudio de los procesos aleatorios en sistemas de control, a menudo llamado *teoría de control estocástico*, es un tema de nivel avanzado en matemáticas aplicadas.

20.5 Sistemas de control óptimo

Los problemas de control estudiados en los capítulos anteriores son, en un sentido elemental, problemas de control óptimo. Las medidas clásicas de desempeño del sistema, tales como error en estado estacionario, margen de ganancia y margen de fase, son esencialmente criterios de optimización, y los compensadores de sistemas de control se diseñan para cumplir estos requerimientos. En problemas de control óptimo más generales, la medida de desempeño del sistema, o *índice de desempeño*, no se fija de antemano. En lugar de ello, se elige la compensación de tal modo que el índice de desempeño se *hace máximo* o se *hace mínimo*. El valor del índice de desempeño no se conoce hasta que se complete el proceso de optimización.

En muchos problemas, el índice de desempeño es una medida o función del error $e(t)$ entre las respuestas real e ideal. Se formula en términos de los parámetros de diseño elegidos, con el fin de optimizar el índice de desempeño, sujeto a las limitaciones físicas existentes.

EJEMPLO 20.7. En el sistema ilustrado en la figura 20-5, queremos encontrar un $K \geq 0$ tal que la integral del cuadrado del error e sea mínima cuando la entrada sea una función paso unitario. Puesto que $e \equiv e(t)$ no es constante, sino una función de tiempo, podemos formular este problema como sigue: escoger $K \geq 0$ tal que $\int_0^\infty e^2\,(t)dt$ sea mínima, y en donde

$$e(t) = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s^2+2s+K}\right] = \sqrt{\frac{K}{K-1}}\, e^{-t}\,\text{sen}\left(\sqrt{K-1}\,t + \tan^{-1}\sqrt{K-1}\right)$$

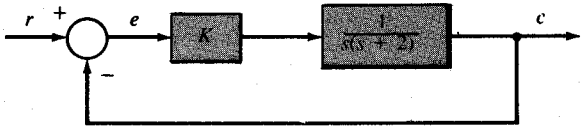


Figura 20-5

La solución puede obtenerse para $K > 1$ utilizando las técnicas convencionales del cálculo integral para hallar mínimos, como se muestra a continuación:

$$\int_0^\infty e^2(t)\,dt = \frac{K}{K-1}\int_0^\infty \left[e^{-t}\,\text{sen}\left(\sqrt{K-1}\,t + \tan^{-1}\sqrt{K-1}\right)\right]^2 dt$$

La integración produce

$$\int_0^\infty e^2(t)\,dt = \left(\frac{K}{K-1}\right)\left(\frac{e^{-2t}}{4}\right)\left[-1 - \frac{\cos\left(2\sqrt{K-1}\,t + 2\tan^{-1}\sqrt{K-1} - \tan^{-1}\left(-\sqrt{K-1}\right)\right)}{\sqrt{K}}\right]\Bigg|_0^\infty$$

$$= \frac{K}{4(K-1)}\left[1 + \frac{\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{K-1} - \tan^{-1}\left(-\sqrt{K-1}\right)\right)}{K}\right]$$

Pero

$$\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{K-1}-\tan^{-1}\left(-\sqrt{K-1}\right)\right)=-\cos 3\sqrt{K-1}=3\cos\sqrt{K-1}-4\cos^3\sqrt{K-1}$$

$$=\frac{3K-4}{K\sqrt{K}}$$

En consecuencia

$$\int_0^\infty e^2(t)\,dt=\frac{K}{4(K-1)}\left(1+\frac{3K-4}{K^2}\right)=\frac{K}{4(K-1)}\frac{(K-1)(K+4)}{K^2}=\frac{K+4}{4K}$$

La primera derivada de $\int_0^\infty e^2(t)dt$ con respecto a K es

$$\frac{d}{dK}\left(\frac{K+4}{4K}\right)=-\frac{1}{K^2}$$

En apariencia, $\int_0^\infty e^2(t)\,dt$ disminuye monótonamente a medida que K aumenta. Por tanto el valor óptimo de K es $K=\infty$, que por supuesto es irrealizable. Para este valor de K,

$$\lim_{K\to\infty}\int_0^\infty e^2(t)\,dt=\lim_{K\to\infty}\left(\frac{K+4}{4K}\right)=\frac{1}{4}$$

Nótese que también la frecuencia natural ω_n del sistema óptimo es $\omega_n=\sqrt{K}=\infty$, y la relación de amortiguación $\xi=1/\omega_n=0$, haciéndolo marginalmente estable. Por tanto sólo puede realizarse de manera práctica un sistema *subóptimo* (menos que el óptimo) y su diseño depende de la aplicación específica.

Los problemas de control óptimo comunes son sin embargo mucho más complejos que este simple ejemplo y requieren técnicas matemáticas más sofisticadas para su solución. Hacemos aquí poco más que mencionar su existencia.

20.6 Sistemas de control adaptable

En algunos sistemas de control, ciertos parámetros son o no constantes, o varían de un modo desconocido. En el Capítulo 9 estudiamos una manera de minimizar los efectos de tales contingencias mediante el diseño para mínima sensitividad. Sin embargo, si las variaciones del parámetro son grandes o muy rápidas, puede ser conveniente diseñar para lograr la capacidad de medirlos continuamente y cambiar la compensación de tal modo que los criterios de desempeño del sistema siempre se satisfagan. Este se llama diseño de *control adaptable*.

EJEMPLO 20.8. La figura 20-6 presenta un bosquejo de un diagrama de bloques de un sistema de control adaptable. Se sabe que los parámetros A y B de la planta varían con el tiempo. El bloque marcado "identificación y ajuste de parámetros" mide continuamente la entrada $u(t)$ y la salida $c(t)$ de la planta para *identificar* (cuantificar) los parámetros A y B. De esta manera, a y b del compensador por adelanto se modifican de acuerdo con la salida de este elemento para satisfacer las especificaciones del sistema. El diseño del bloque de identificación y ajuste de parámetros es el principal problema del control adaptable, otro tema que requiere el conocimiento avanzado de matemáticas aplicadas.

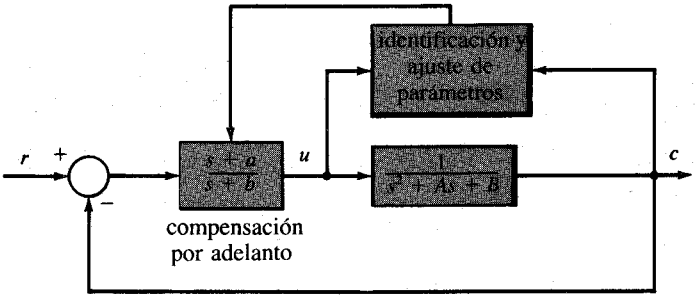

identificación y
ajuste de
parámetros
r
+
−
$\frac{s+a}{s+b}$
u
$\frac{1}{s^2+As+B}$
c
compensación
por adelanto

Figura 20-6

Apéndice A

Algunos pares de transformadas de Laplace útiles para el análisis de sistemas de control

$F(s)$	$f(t)$ $t>0$
1	$\delta(t)$ impulso unitario
e^{-Ts}	$\delta(t-T)$ impulso retardado
$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\dfrac{1}{(s+a)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ $n=1,2,3,\ldots$
$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$
$\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{-at}-be^{-bt})$
$\dfrac{s+z_1}{(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}[(z_1-a)e^{-at}-(z_1-b)e^{-bt}]$
$\dfrac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{s+z_1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\dfrac{(z_1-a)e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\dfrac{(z_1-b)e^{-bt}}{(c-b)(a-b)}+\dfrac{(z_1-c)e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$
$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$	sen ωt
$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$	cos ωt

$\dfrac{s+z_1}{s^2+\omega^2}$	$\sqrt{\dfrac{z_1^2+\omega^2}{\omega^2}}\ \operatorname{sen}(\omega t+\phi) \qquad \phi \equiv \tan^{-1}(\omega/z_1)$
$\dfrac{s\operatorname{sen}\phi+\omega\cos\phi}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$
$\dfrac{1}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega}e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$
$F(s)$	$f(t) \qquad t>0$
$\dfrac{1}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$	$\dfrac{1}{\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}\omega_d t \qquad \omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$
$\dfrac{s+z_1}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\sqrt{\dfrac{(z_1-a)^2+\omega^2}{\omega^2}}\ e^{-at}\operatorname{sen}(\omega t+\phi) \qquad \phi \equiv \tan^{-1}\left(\dfrac{\omega}{z_1-a}\right)$
$\dfrac{1}{s}$	$\mathbf{1}(t)$ paso unitario
$\dfrac{1}{s}e^{-Ts}$	$\mathbf{1}(t-T)$ paso retardado
$\dfrac{1}{s}(1-e^{-Ts})$	$\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-T)$ pulso rectangular
$\dfrac{1}{s(s+a)}$	$\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$
$\dfrac{1}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{ab}\left(1-\dfrac{be^{-at}}{b-a}+\dfrac{ae^{-bt}}{b-a}\right)$
$\dfrac{s+z_1}{s(s+a)(s+b)}$	$\dfrac{1}{ab}\left(z_1-\dfrac{b(z_1-a)e^{-at}}{b-a}+\dfrac{a(z_1-b)e^{-bt}}{b-a}\right)$
$\dfrac{1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$
$\dfrac{s+z_1}{s(s^2+\omega^2)}$	$\dfrac{z_1}{\omega^2}-\sqrt{\dfrac{z_1^2+\omega^2}{\omega^4}}\cos(\omega t+\phi) \qquad \phi \equiv \tan^{-1}(\omega/z_1)$

$\dfrac{1}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$	$\dfrac{1}{\omega_n^2}-\dfrac{1}{\omega_n\omega_d}e^{-\zeta\omega_n t}\operatorname{sen}(\omega_d t+\phi)$ $\omega_d \equiv \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \phi \equiv \cos^{-1}\zeta$
$\dfrac{1}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}(1-e^{-at}-ate^{-at})$
$\dfrac{s+z_1}{s(s+a)^2}$	$\dfrac{1}{a^2}[z_1-z_1e^{-at}+a(a-z_1)te^{-at}]$
$\dfrac{1}{s^2}$	t rampa unitaria
$\dfrac{1}{s^2(s+a)}$	$\dfrac{1}{a^2}(at-1+e^{-at})$
$\dfrac{1}{s^n} \qquad n=1,2,3,\ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \qquad 0!=1$

Apéndice B

Algunos pares de transformadas *z* útiles para el análisis de sistemas de control

$F(z)$	k-ésimo término de la secuencia de tiempo $f(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
z^{-k}	1 en k, 0 en cualquier otra parte (secuencia delta de Kronecker)
$\dfrac{z}{z - e^{-aT}}$	e^{-akT}
$\dfrac{Te^{-aT}z}{(z - e^{-aT})^2}$	kTe^{-akT}
$\dfrac{T^2e^{-aT}z(z + e^{-aT})}{(z - e^{-aT})^3}$	$(kT)^2e^{-akT}$
$\dfrac{z^n}{(z - A)^n}$	$\dfrac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}{(n-1)!}A^k$ (A es cualquier número complejo)
$\dfrac{z}{z - 1}$	1 (secuencia de paso unitario)
$\dfrac{Tz}{(z-1)^2}$	kT (secuencia de rampa unitaria)
$\dfrac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$	$(kT)^2$
$\dfrac{z^n}{(z-1)^n}$	$\dfrac{(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1)}{(n-1)!}$
$\dfrac{z \operatorname{sen}\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$	$\operatorname{sen}\omega kT$
$\dfrac{z(z - \cos\omega T)}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$	$\cos\omega kT$
$\dfrac{ze^{-aT}\operatorname{sen}\omega T}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\operatorname{sen}\omega kT$
$\dfrac{z(z - e^{-aT}\cos\omega T)}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos\omega T + e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\cos\omega kT$

$\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$	0 para $k=0$ $\dfrac{1}{a-b}(a^{k-1}-b^{k-1})$ para $k>0$
$\dfrac{z}{(z-a)(z-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}(a^k-b^k)$
$\dfrac{z(1-a)}{(z-1)(z-a)}$	$1-a^k$

Bibliografía y referencias

1. Churchill, R. V. y Brown, J. W., *Complex Variables and Applications*, Fourth Edition, McGraw-Hill, New York, 1984.
2. Hartline, H. K. y Ratliff, F., "Inhibitory Interaction of Receptor Units in the Eye of the Limulus", *J. Gen. Physiol.*, 40:357, 1957.
3. Bliss, J. C. y Macurdy, W.B., "Linear Models for Contrast Phenomena", *J. Optical Soc. America*, 51:1375, 1961.
4. Reichardt, W. y MacGinitie, "On the Theory of Lateral Inhibition", *Kybernetic* (German), 1:155, 1962.
5. Desoer, C. A., "A General Formulation of the Nyquist Criterion", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-12, No. 2, June 1965.
6. Krall, A. M., "An Extension and Proof of the Root-Locus Method", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 9, No. 4, December 1961, pp. 644-653.
7. Wiberg, D. M., *State Space and Linear Systems*, Schaum Outline Series, McGraw-Hill, New York, 1971.
8. LaSalle, J. y Lefschetz, S., *Stability by Liapunov's Direct Method, with Applications*, Academic Press, New York, 1958.
9. Lindorff, D. P., *Theory of Sampled-Data Control Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1965.
10. Åström K. J. y Wittenmark, B., *Computer Controlled Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
11. Leigh, J. R., *Applied Digital Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
12. Chen, C. T., *Introduction to Linear System Theory*, Second Edition. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1985.
13. Truxal, J. G., *Automatic Feedback Control System Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1955.
14. Aizerman, M. A., *Theory of Automatic Control*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1963.
15. Bode, H. W., *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1945.
16. Brown, G. S. y Campbell, D. P., *Principles of Servomechanisms*, John Wiley, New York, 1948.
17. James, H. M., Nichols, N. B. y Phillips, R. S., *Theory of Servomechanism*, McGraw-Hill, New York, 1947.
18. Kuo, B. C., *Automatic Control Systems*, Fifth Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1987.

Indice

Acelerómetro, 185
Aleatorio(os, as):
  entradas, 618
  evento, 618
  procesos, 618
Amortiguación:
  coeficiente de, 59
  razón (relación) de, 59, 122, 341, 424, 440
Analógico:
  computador, 263
  sistema de control, 6
Ancho de banda, 5, 300, 312, 388, 392, 394, 403, 408, 486, 563
Angulos:
  de llegada, 417, 433
  de partida, 416, 433
Aproximaciones:
  por polo-cero dominante, 449, 458, 463
  por serie de Taylor, 584, 602
Asíntotas (lugar de las raíces), 417, 433
Asintóticos(as):
  aproximaciones, 476, 491
  errores, 478
Atraso:
  compensación por, 391, 445
  compensador por, 165, 170, 505, 562
  continuo, 165
  digital, 170, 404
Auto-malla, 234

Barrorreceptores, 188
Bilineal:
  ecuación, 50
  transformación, 151, 305, 487, 509
Bloque, 18
Bode:
  análisis de, 471
  análisis y diseño de sistemas discretos en el tiempo, 487, 509
  diagrama de ángulo de fase de, 472
  diagrama de magnitud de, 472
  diagramas de, 471, 489, 499
  diseño utilizando el análisis de, 499
  forma de, 472, 489
  ganancia de, 472, 489, 499
  sensitividad de, 269

c.c.:
  entrada de, 166
  ganancia en, 166, 169
  motor de, 184
Calibrar, 4
Canónico(a):
  forma, de un sistema de control con retroalimentación, 200, 211
  sistema, control con retroalimentación, 200, 211
Carta de Nichols, 537, 538, 548
  diagrama de la, 539
  diseño de sistemas discretos en el tiempo utilizando el análisis de la, 568
  diseño utilizando el análisis de la, 556
Causa y efecto, 5
Causalidad, 71, 91
Centro de asíntotas, 415
Círculo unitario, 150, 329, 438
Círculos *M*, 339, 373, 386
Círculos *N*, 339, 373
Clasificación de los sistemas de control, 277, 290
Cofactor, 67
Compensación:
  activa, 305
  de fase, 445, 461, 573
  de magnitud, 446, 462
  del factor de ganancia, 384, 386, 398, 443, 458, 499, 556, 557, 569
  en cascada, 304
  pasiva, 305
  por adelanto, 387, 400, 445, 501, 515, 558
  por atraso, 391, 445, 505, 519, 562
  por atraso-adelanto, 393, 400, 507, 521, 564

por cancelación, 444, 459
por retroalimentación, 304, 456, 467, 526
tacométrica, 402
Compensador por adelanto, 165, 169, 445, 501, 558
continuo, 165
digital, 169, 405
Compensador por atraso-adelanto, 165, 393, 507, 564
Compensadores, análogo y digital:
derivada (*D*), 402
integral (*I*), 26
PID, 26, 166, 395
por adelanto, 165, 169, 176, 272, 501, 558
por atraso, 165, 170, 177, 178, 404, 505, 561
por atraso-adelanto, 165, 177, 507, 564
proporcional (P), 26
Complejo(a):
convolución, 95, 128
forma, 324
función, 319
plano, 118
traslación, 95
Componente, 18
Conjunto fundamental, 52, 65, 78, 91
Constante de tiempo dominante, 303, 392, 394, 563
Constantes de error, 282, 292
de aceleración, 280, 294
de paso, 282, 294
de posición, 278, 294
de rampa, 279, 282, 294
de velocidad, 279, 294
parabólico, 283, 294
Continua a tramos, 23
Continuo(a, os) en el tiempo (datos):
señal, 5
sistema de control, 6
Contorno cerrado, 320
Control, 1
acción de, 3, 11
algoritmos (leyes) de, 26, 601
modelos de sistemas de, 8
problema de la ingeniería del sistema de, 7
relación de, 212
señal de, 20
sistema de, 1
subsistema de, 2
Control de:
calefacción, 3, 7
refrigeración, 16
temperatura del horno, 16, 42
un avión, 4
Controlabilidad, 614
matriz de, 615
Controlable, 614
Controlado(a):
salida, 20
sistema, 20
variable, 4
Controlador:
de encendido-apagado (on-off), 26, 40, 590
derivativo, 26
I, 26
integral, 26
P, 26
PD, 26
PI, 26
PID, 26, 166, 395
proporcional, 26
Controladores, 26 (*véase también*, Compensadores; Compensación)
Convertidor A/D, 23, 46
Convertidor analógico a digital (A/D), 23
Convertidor D/A, 23, 46
Convertidor digital a analógico, 23, 46
Convolución:
integral de, 55, 70, 90, 95
suma de, 66, 89, 107
Corte:
frecuencia de, 300
tasa de, 301
Criterio de estabilidad:
de fracciones continuas, 148, 157
de Hurwitz, 147, 155
de Lyapunov, 594, 607, 613
de Popov, 600
de Routh, 146, 154
Criterio del ángulo de fase, 413, 426
Curva de conmutación, 592

Datos discretos en el tiempo (digitales):
señal de, 5
sistema de control de, 6
Datos experimentales de respuesta de frecuencia, 318, 324, 356

Decibel, 300
Delta de Kronecker:
  respuesta, 66, 168, 182
  secuencia, 66, 111
Detector por fotocelda, 14
Determinante, 66
Diagrama polar, 324, 354, 375
  propiedades del, 325, 355
Diagramas de bloques, 18, 28, 198
  reducción de, 206, 210, 219, 242, 257
  transformaciones de, 201, 213
Diagramas de magnitud en *dB*-ángulo de fase, 529, 542
Digital(es):
  compensador, por adelanto, 169, 405, 406
  compensador, por atraso, 170, 404, 449
  datos, 5
  filtro, 23
  señal (datos), 5, 21
Dipolo, 446
Dirección, 3
  de potencia, 27
  de potencia de automóviles, 27
Directa:
  función de transferencia, 201
  trayectoria, 20, 234
Discretización de ecuaciones diferenciales, 69
Diseño:
  lugar de las raíces, 443
  métodos de, 305
  objetivos del, 298
  por análisis, 7, 305
  por síntesis, 7, 305
  puntual, 454, 464
  utilizando el análisis de Bode, 499, 509
  utilizando el análisis de Nichols, 556, 568
  utilizando el análisis de Nyquist, 384
Diseño ayudado por computador (DAC), 305
Diseño algebraico (síntesis) de sistemas digitales, 308
Distorsión (perturbación), 25, 618
Distorsiones externas, 5
Divisor de voltaje, 11
Dominio del tiempo:
  diseño en el, 616
  especificaciones en el, 302
  respuesta en el, 63, 113, 131, 420, 438
Ecuación auxiliar, 147
Ecuación característica, 51, 64, 78, 201, 238, 411
  raíces diferentes de la, 52
  raíces repetidas de la, 53
Ecuación de difusión, 47
Ecuación diferencial:
  homogénea, 52, 54
  ordinaria, 48
Ecuaciones de diferencia, 47, 63, 67, 86
Ecuaciones de perturbación, 587, 602
Ecuaciones del péndulo, 583
Ecuaciones del satélite, 72, 582, 603
Ecuaciones del sistema masa-resorte, 583
Ecuaciones diferenciales, 47
  invariables en el tiempo, 49, 77, 587
  lineales, 49, 71, 77
  no lineales, 49, 77, 586
  ordinarias, 48
  soluciones de las, 53, 63, 81, 112, 131
  variables en el tiempo (variantes en el tiempo), 49, 76
Ecuaciones invariables en el tiempo, 49, 587
Ecuaciones variables en el tiempo (variantes con el tiempo), 49
Ecualizadores, 304
Efectos de carga, 34, 200, 211, 242, 255
Elemento(s), 18
  anticipativos, 20
Encerrados, 321, 353
Entrada, 2
  nodo de, 234
Entrada de prueba, 25
Entrada de referencia, 21
Entradas múltiples, 204, 215
Error:
  detector de, 25
  relación de, 212
  señal de, 21, 619
Escalas logarítmicas, 471
Especificaciones de desempeño, 298, 619
  en el dominio de la frecuencia, 298
  en el dominio del tiempo, 302
  en estado estacionario, 302
  transitorio, 302, 619
Especificaciones en el dominio de la frecuencia, 298
  métodos para sistemas no lineales, 598, 608

Espejo, 1
Estabilidad, 145, 595
  asintótica, 595
  condicional, 386
  criterios de, 146, 594
  de fracciones continuas, 148, 157
  de Hurwitz, 147, 155
  de Lyapunov, 594, 613
  de Popov, 600
  de Routh, 146, 154, 161
  marginal, 145
  prueba de Jury, 150, 159
  relativa, 145, 338, 372, 484, 495, 535
Estable:
  asintóticamente, 595
  marginalmente, 145
Estado estacionario:
  errores en, 292, 295
  respuesta en, 57, 67
Estado:
  diseño de control con retroalimentación de, 616
  espacios de, 614
  estimado, 617
  observador, 617
  representaciones por variables de (modelos), 60, 67, 68, 86, 586, 595, 614
  soluciones del vector de, 63, 68
  vector de, 62, 68
Estímulo, 25
Avaluación gráfica de residuos, 120
Exactitud, 5

Factibilidad física, 71
Factor de ganancia, 164
  compensación del, 384, 398, 443, 499, 514, 556, 557, 569
Fase:
  ángulo de, 324
  compensación de, 445
  frecuencia de cruce de, 299, 339, 536
  margen de, 299, 312, 339, 423, 439, 484, 498, 536, 546
  mínima, 165
  plano de, 588, 589
Forma:
  de Euler, 324
  polar, 324
  rectangular, 320
Fórmula de ganancia entrada-salida, 237
Fórmula general de ganancia entrada-salida, 237, 250
Frecuencia:
  a escala de, 94, 96
  de corte, 300, 476
  de cruce de fase, 299, 339, 536
  de cruce de ganancia, 299, 339, 536
  natural amortiguada, 59, 122
  natural no amortiguada, 59, 122
Función:
  de Lyapunov, 595
  de saturación, 582
  de transferencia de pulso, 188
  de transferencia general, 324
  de transferencia sinusoidal, 318, 324
  matricial exponencial, 63, 87
  multivaluada, 349
  nominal de transferencia, 268
  unificada de respuesta de frecuencia en malla abierta, 298, 324
Funciones completas, 343
Funciones de singularidad, 57, 84
Funciones de transferencia, 163
  continuas en el tiempo, 163, 173, 174
  de malla, 201
  de malla abierta, 201
  de retroalimentación, 201
  derivadas de las, 319
  directa, 201
  discretas en el tiempo, 169
Funciones descriptoras, 597, 609
Funciones racionales (algebraicas), 101, 103, 110, 118, 119, 345

Ganancia, 167, 170, 171, 235
  frecuencia de cruce de, 299, 339, 536
  margen de, 299, 312, 339, 422, 439, 484, 498, 536, 546
Ganancia de malla, 235
Generador (eléctrico), 9
Giróscopo, 186
Grado de un polinomio, 345
Grafo de flujo de señales, 231, 244

Histéresis, 40, 598, 612
Horno, 3

Impulso unitario:
  función, 57, 84